

Chapitre 13

Endomorphismes des Espaces Euclidiens

<https://www.jean-philippe-preaux.fr/>

TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces préhilbertiens réels	1
1.1. Produit scalaire ; norme euclidienne	1
1.2. Orthogonalité.	5
1.3. Base orthonormale d'un espace euclidien	6
1.4. Projection orthogonale dans un espace euclidien	10
2. Endomorphismes d'un espace euclidien	15
2.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien	15
2.2. Matrices orthogonales	17
2.3. Application : orientation d'un espace vectoriel réel	18
2.4. Endomorphismes symétriques	19
2.5. Réduction des endomorphismes symétriques	20
2.6. Endomorphismes/matrices symétriques positifs, définis positifs	22
2.7. Classification des isométries du plan euclidien	23

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont réels.

1. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1.1. Produit scalaire ; norme euclidienne.

DÉFINITION 1. (Produit scalaire sur un espace vectoriel réel)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; une application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E lorsque c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire :

- forme bilinéaire : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y | z \rangle &= \lambda \langle x | z \rangle + \mu \langle y | z \rangle && (\text{linéarité à gauche}) \\ \langle x | \lambda y + \mu z \rangle &= \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | z \rangle && (\text{linéarité à droite}). \end{aligned}$$
- symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle y | x \rangle = \langle x | y \rangle$.
- définie positive : pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \langle x | x \rangle &\geq 0 && (\text{positive}) \\ \langle x | x \rangle = 0 &\Rightarrow x = O_E && (\text{définie}). \end{aligned}$$

Le couple $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est alors appelé un espace préhilbertien réel, et, si E est de dimension finie, un espace euclidien.

Remarques.

- Le produit scalaire est parfois noté $(x | y)$ ou $x \cdot y$.
- Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, on se contentera de montrer la linéarité d'un seul côté et la symétrie.

DÉFINITION 2. (Norme associée)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, pour tout $x \in E$ le réel positif $\sqrt{\langle x | x \rangle}$ est noté $\|x\|$; l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

s'appelle norme euclidienne induite par le produit scalaire.

Remarque. Par linéarité et définie positivité du produit scalaire, $\|x\| = 0 \iff x = O_E$.

THÉORÈME 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité : $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

(c'est-à-dire $x = O_E$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$)

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$.

Si $x = O_E$ alors $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = 0$ et la conclusion est vérifiée.

Supposons dans la suite que $x \neq O_E$; par définie positivité, $\|x\| > 0$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \|tx + y\|^2 \geq 0$, or $\|tx + y\|^2 = \langle tx + y | tx + y \rangle = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x | y \rangle + \|y\|^2$ est un trinôme en t de signe constant, donc $\Delta = 4\langle x | y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ c'est-à-dire $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Supposons que $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$; alors $\Delta = 4\langle x | y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$, et donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|tx + y\|^2 = 0$, c'est à dire par définie-positivité $tx + y = O_E = 0$ et donc il existe $\lambda = -t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, c'est-à-dire x et y sont colinéaires.

Si x et y sont colinéaires, on vérifie aisément que $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$. ■

THÉORÈME 2. (Inégalité triangulaire, ou de Minkowski)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec cas d'égalité :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont positivement colinéaires.}$$

(c'est-à-dire $x = O_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$).

Démonstration. On a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x | y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

et donc comme $\|x + y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ sont positifs :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Si de plus $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors les inégalités ci dessus sont des égalités, d'où, d'une part, x et y sont colinéaires, d'après le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz et donc si $x \neq O_E$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda x$, et d'autre part $(x | y) = |(x | y)|$ d'où, si $x \neq O_E$, $\lambda\|x\|^2 = |\lambda| \cdot \|x\|^2$, ce qui montre $\lambda \geq 0$. ■

PROPRIÉTÉ 3. (de la norme euclidienne)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tous $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ (positivité)
- $\|x\| = 0 \iff x = O_E$ (séparation)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On dit que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur E , associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Démonstration. Par définition $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \geq 0$; d'où la positivité.

Par bilinéarité du produit scalaire : $\|O_E\|^2 = \langle O_E | O_E \rangle = \langle 0 \cdot O_E | O_E \rangle = 0 \cdot \langle O_E | O_E \rangle = 0$. Par définie positivité du produit scalaire, $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle = 0 \implies x = O_E$; d'où la séparation.

Par bilinéarité du produit scalaire : $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x | x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x | x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$; d'où l'homogénéité.

L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minkowski prouvée précédemment. ■

PROPRIÉTÉ 4. (Identités remarquable)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors on a pour tout $(x, y) \in E^2$,

— Norme euclidienne d'une somme, d'une différence :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2$$

— Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(elle est caractéristique d'une norme euclidienne)

— Identités de polarisation :

$$(x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

(c'est à dire qu'on peut retrouver le produit scalaire grâce à sa norme euclidienne).

Démonstration. La première s'obtient en développant par bilinéarité $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y | x \pm y \rangle$ et les suivantes en découlent. ■

La norme euclidienne permet de définir une distance entre éléments de E :

PROPOSITION-DÉFINITION 3. (Distance associée)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors l'application :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

possède les propriétés suivantes : pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- $d(x, y) \geq 0$ (positivité)
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

On dit que c'est une distance sur E , associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, ou à la norme $\|\cdot\|$.

Exemples. À retenir.

- Structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

(où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$) est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ dont la norme associée est :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

En notant X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique, on a $\langle x | y \rangle = X^T Y$.

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure Euclidienne canonique, les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski deviennent :

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\bullet \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$\bullet \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (\text{Minkowski})$$

- Structures euclidiennes sur un espace vectoriel réel de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors à toute base $\mathcal{B}$ de E correspond un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ munissant E d'une structure d'espace euclidien, défini comme ci-dessus, par $\langle x | y \rangle = X^T Y$ où X et Y sont les matrices respectives des coordonnées de x, y dans la base $\mathcal{B}$.

- Un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E .

En effet, la bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale, la positivité de la positivité de l'intégrale, et la définie positivité du fait que si h est une application continue et positive sur $[a, b]$, et si $\int_a^b h(t)dt = 0$, alors h est nulle sur $[a, b]$; ainsi $\langle f | f \rangle = \int_a^b f^2(t)dt = 0 \implies f = O_E$.

En particulier, on obtient les inégalités :

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \int_a^b fg \right| &\leq \int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} \times \sqrt{\int_a^b |g|^2} && (Cauchy-Schwarz) \\ \bullet \quad \sqrt{\int_a^b |f+g|^2} &\leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} + \sqrt{\int_a^b |g|^2} && (Minkowski) \end{aligned}$$

- De même, en se plaçant sur $\mathcal{L}^2(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continues, de carré intégrable sur } I\}$ avec le produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt$, on montre les mêmes inégalités :

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et de carré intégrable :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \int_I fg \right| &\leq \int_I |fg| \leq \sqrt{\int_I f^2} \times \sqrt{\int_I g^2} && (Cauchy-Schwartz) \\ \bullet \quad \sqrt{\int_I (f+g)^2} &\leq \sqrt{\int_I f^2} + \sqrt{\int_I g^2} && (Minkowski). \end{aligned}$$

- Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$:

– L'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k b_k \end{aligned}$$

où $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

La bilinéarité découle de la bilinéarité de $\times$ dans $\mathbb{R}$ et de la linéarité de la somme, la symétrie de la commutativité de $\times$ de $\mathbb{R}$, et la définie positivité du fait qu'une somme de carré est positive et qu'elle est nulle ssi chaque carré est nul.

– L'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_a^b P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

où $a < b$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. L'argument est le même que dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

- Produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

L'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T B) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire usuel.

La bilinéarité découle de la linéarité de la trace et de la transposition et de la bilinéarité du produit

matriciel.

La symétrie découle de la trace d'une transposée et de la transposée d'un produit puisque :

$$\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}((A^T B)^T) = \operatorname{tr}(B^T A)$$

La définie positivité découle du fait que si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors $A^T A$ a comme coefficients diagonaux :

$$(A^T A)_{j,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \quad \text{et donc} \quad \operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}^2.$$

En particulier, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire usuel s'écrit (en identifiant une matrice $(1,1)$ avec un scalaire) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \langle X | Y \rangle = X^T Y \end{aligned}$$

1.2. Orthogonalité.

Dans tout ce qui suit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel, et $\| \cdot \|$ sa norme associée.

Le produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité :

DÉFINITION 4. (Famille orthogonale/orthonormale)

- On dit que x est un vecteur unitaire de E lorsque $\|x\| = 1$
- On dit que x et y sont deux vecteurs orthogonaux de E lorsque $\langle x | y \rangle = 0$; on note $x \perp y$.
- On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une famille orthogonale lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

- On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une famille orthonormale si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad \langle x_i | x_j \rangle = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ 5. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E . Il faut montrer que toute sous-famille finie est libre. Notons sans perte de généralité $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie quelconque de vecteurs de la famille et soient des scalaires

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = O_E$. On a alors, par linéarité à droite, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$0 = \langle x_k | O_E \rangle = \left\langle x_k \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_k | x_i \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2$$

donc, puisque par hypothèse $x_k \neq O_E$, $\lambda_k = 0$. ■

THÉORÈME 6. (de Pythagore)

Pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Démonstration. Si $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale, on obtient par bilinéarité du produit scalaire :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \left| \sum_{j=1}^n x_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

PROPOSITION-DÉFINITION 5. (Orthogonal d'une partie)

- On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \langle x | y \rangle = 0.$$

On note $F \perp G$.

Dans ce cas F et G sont en somme directe ; on note $F \oplus^\perp G$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E , on appelle orthogonal de F , noté $F^\perp$ l'ensemble

$$F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in F, \langle x | y \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

- Plus généralement, soit $A \subset E$. On note

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall a \in A, \langle a | y \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel, plus précisément $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

- Soit, de plus, $x \in E$. On écrit $x \perp A$ lorsque $x \in A^\perp$, c'est-à-dire $\forall a \in A, a \perp x$.

Démonstration. Soient F et G deux sev de E ; si $x \in F \cap G$ alors en particulier $\langle x | x \rangle = 0$ et donc $x = O_E$. Ainsi F et G sont en somme directe.

Soit A une partie de E et soient $x_1, x_2 \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in A$:

$$\langle x | \lambda \cdot x_1 + x_2 \rangle = \lambda \cdot \langle x | x_1 \rangle + \langle x | x_2 \rangle = 0$$

et bien sur $\langle x | O_E \rangle = 0$; ainsi $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel. C'est vrai notamment lorsque $A = F$ est un sev. ■

Méthode. Pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel il suffit de déterminer l'orthogonal d'une famille génératrice : $\{x_1, \dots, x_n\}^\perp = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp$.

Remarques.

- $E^\perp = \{O_E\}$ et $\{O_E\}^\perp = E$.
- Lorsque F et G sont orthogonaux, ils sont en somme directe $F \oplus G$, mais pas nécessairement supplémentaires dans E : $E \neq F \oplus G$; nous verrons que par contre que c'est le cas lorsque F ou G est de dimension finie.

PROPRIÉTÉ 7.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $F \subset (F^\perp)^\perp$,
- $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$,
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Démonstration. Soit $x \in F$, alors pour tout $y \in F^\perp$, $\langle x | y \rangle = 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp$; ainsi $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Soient $F \subset G$ et $x \in G^\perp$; pour tout $y \in G$, $\langle x | y \rangle = 0$, en particulier pour tout $y \in F$, $\langle x | y \rangle = 0$, et donc $x \in F^\perp$; donc $G^\perp \subset F^\perp$.

Soient F et G deux sev ; soit $x \in (F + G)^\perp$; en particulier pour tout $y \in F$, $\langle x | y \rangle = \langle x | y + O_G \rangle = 0$ et donc $x \in F^\perp$; de même $x \in G^\perp$; d'où l'inclusion $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement si $x \in F^\perp \cap G^\perp$ alors pour tout $(y_1, y_2) \in F \times G$, $\langle x | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \langle x | y_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ et donc $x \in (F + G)^\perp$. Ainsi $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. ■

Remarque. Pour A, B des parties quelconques de E , on a encore $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.

1.3. Base orthonormale d'un espace euclidien.**DÉFINITION 6. (Base orthonormale)**

On appelle *base orthonormale* (ou *orthonormée*) d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ toute base de E qui soit une famille orthonormale.

Remarque. Si $\dim E = n$ alors toute famille orthonormale constituée de n vecteurs de E est une base orthonormale (d'après la propriété 5).

Exemples.

• Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.

• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$, la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base orthonormale. En effet :

$$E_{i,j}^T E_{i',j'} = E_{j,i} E_{i',j'} = \begin{cases} O_n & \text{si } (i,j) \neq (i',j') \\ E_{j,j} & \text{si } (i,j) = (i',j') \end{cases} \implies \text{tr}(E_{i,j}^T E_{i',j'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (i',j') \\ 1 & \text{si } (i,j) = (i',j') \end{cases}$$

C'est le cas aussi dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

• Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire usuel :

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$$

la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormale.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k)$$

L'application est :

- Bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$,
- Bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ (distributivité de $\times$ sur $+$ et associativité de $\times$).
- Symétrique par commutativité de $\times$ sur $\mathbb{R}$.
- Positive car $\langle P | P \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 \geq 0$.
- Définie positive car $\langle P | P \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 \geq 0 \implies P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0 \implies P = O_{\mathbb{R}[X]}$ puisque $\deg(P) \leq n$.

C'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille constituée des polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n$, associés à $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, où :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$$

vérifie pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$.

La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale en effet pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$:

$$\langle L_i | L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(x_k) L_j(x_k) = \delta_{i,j}.$$

THÉORÈME 8. (Existence de bases orthonormale)

Tout espace euclidien non réduit à $\{O_E\}$ admet (au moins) une base orthonormale.

Démonstration. De l'existence d'une base, on en déduit une base orthonormale en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir ci-dessous). ■

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est un algorithme qui transforme une famille de vecteurs en une famille orthonormale engendrant le même sous-espace. C'est un résultat important et très utile.

THÉORÈME 9. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre finie d'un espace préhilbertien réel. Il existe une unique famille orthonormée $(v_1, \dots, v_p)$ telle que :

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k),$
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle e_i \mid v_i \rangle > 0.$

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ s'obtient par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1 \\ v_{k+1} &= \frac{1}{\|u_{k+1}\|} \cdot u_{k+1} \\ \text{avec } u_{k+1} &= e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1} \mid v_i \rangle \cdot v_i \end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

(I) Pour $k = 1$, le seul vecteur qui convient est $v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$.

(H) Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et supposons l'assertion vérifiée au rang k ; soit $(v_1, \dots, v_k)$ la famille orthonormale correspondante. Puisque $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, e_{k+1})$, le vecteur v_{k+1} peut s'écrire sous la forme :

$$v_{k+1} = \lambda \cdot \underbrace{(e_{k+1} - \alpha_1 \cdot v_1 - \dots - \alpha_k \cdot v_k)}_{=u_{k+1}}$$

avec $\lambda \neq 0$.

La condition d'orthonormalité de la famille $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ équivaut par bilinéarité à ce que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, 0 = \langle v_i \mid v_{k+1} \rangle = \lambda \cdot (\langle v_i \mid e_{k+1} \rangle - \alpha_i \cdot \langle v_i \mid v_i \rangle)$$

ce qui équivaut puisque $\langle v_i \mid v_i \rangle = 1$ à :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i = \langle v_i \mid e_{k+1} \rangle$$

De $\|v_{k+1}\| = 1$ découle par homogénéité que $|\lambda| = \frac{1}{\|u_{k+1}\|}$. Mais $\lambda > 0$ puisque :

$$\langle e_{k+1} \mid v_{k+1} \rangle > 0 \implies \left\langle \frac{1}{\lambda} \cdot v_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot v_i \mid v_{k+1} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \cdot \|v_{k+1}\|^2 > 0$$

$=u_{k+1}$

Donc $\lambda = \frac{1}{\|u_{k+1}\|}$. ■

Méthode. Dans la pratique, on applique plutôt le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt avant de "normaliser" les vecteurs obtenus :

À partir de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ on construit une famille orthogonale $(w_1, \dots, w_p)$ par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1 \\ w_{k+1} &= e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot w_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \frac{\langle e_{k+1} \mid w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \end{aligned}$$

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ orthonormale s'en déduit alors par :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v_i = \frac{1}{\|w_i\|} \cdot w_i$$

Exemple. Orthonormalisation de la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

On calcule successivement :

$$Q_0 = 1, \quad \|Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 dt = 2, \quad \langle Q_0 \mid X \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

$$Q_1 = X - \frac{\langle Q_0 \mid X \rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 = X, \quad \|Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\langle Q_0 \mid X^2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad \langle Q_1 \mid X^2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0,$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= X^2 - \frac{\langle Q_0 | X^2 \rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 - \frac{\langle Q_1 | X^2 \rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}, \quad \|Q_2\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}, \\
\langle Q_0 | X^3 \rangle &= \int_{-1}^1 t^3 dt = 0, \quad \langle Q_1 | X^3 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}, \quad \langle Q_2 | X^3 \rangle = \int_{-1}^1 \left(t^5 - \frac{t^3}{3}\right) dt = 0 \\
Q_3 &= X^3 - \frac{\langle Q_0 | X^3 \rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 - \frac{\langle Q_1 | X^3 \rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 - \frac{\langle Q_2 | X^3 \rangle}{\|Q_2\|^2} Q_2 = X^3 - \frac{3}{5} X, \\
\|Q_3\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3t}{5}\right)^2 dt = \frac{8}{175}
\end{aligned}$$

Donc $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = (1, X, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{3}{5}X)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire et

$$(P_0, P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} X^3 - \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} X \right)$$

est une base orthonormale.

THÉORÈME 10. (de la base orthonormale incomplète)

Dans un espace euclidien toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration. Avec le théorème de la base incomplète, la famille orthonormale (étant libre) peut être complétée en une base orthonormale, en lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on la transforme en une base orthonormale, qui par unicité, contient la famille orthonormale initiale comme sous-famille. ■

Dans une base orthonormale les coordonnées d'un vecteur se calculent facilement à l'aide du produit scalaire.

PROPOSITION 11. (Coordonnées dans une base orthonormale)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \langle x | e_i \rangle.$$

En particulier,

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x | e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \middle| e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \langle e_i | e_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_{i,k} = x_k.$$

Remarque. Ainsi si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i | f(e_j) \rangle.$$

Dans un espace euclidien, tout produit scalaire s'écrit sous forme canonique $\langle x | y \rangle = \sum x_i \cdot y_i$ à l'aide des coordonnées $(x_i), (y_i)$ des vecteurs x et y dans une base orthonormale.

PROPOSITION 12. (Forme canonique du produit scalaire)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et soient $x, y \in E$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

En particulier, pour la norme associée $\| \cdot \|$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Démonstration. En écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$, on obtient par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x | y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \left| \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right. \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \cdot y_j \cdot \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \cdot y_j \cdot \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Le reste en découle puisque $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$. ■

Sous écriture matricielle, le résultat devient :

COROLLAIRE 13. (Forme canonique du produit scalaire)

En notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ les matrices des coordonnées dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de deux vecteurs x, y d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$,

$$\langle x | y \rangle = X^T Y = Y^T X \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{X^T X}$$

1.4. Projection orthogonale dans un espace euclidien.

Dans un espace préhilbertien, un sous-espace vectoriel F et son orthogonal sont en somme directe. Si de plus F est de dimension finie, ils sont en outre supplémentaires :

PROPOSITION 14. (Supplémentaire orthogonal d'un sev de dim. finie)

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus F^\perp$; le sev $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F . On note :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. On a déjà établi que F et $F^\perp$ étaient en somme directe ; aussi pour montrer qu'il sont supplémentaires dans E il suffit de montrer que $E = F + F^\perp$.

Puisque F est de dimension finie, c'est un espace euclidien et il admet donc une base orthonormale, disons $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ quelconque ; notons :

$$x_1 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \cdot e_k \quad \text{et} \quad x_2 = x - x_1$$

de sorte que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$. Il s'agit de prouver que $x_2 \in F^\perp$, et pour cela il suffit de montrer que $\langle x_2 | e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle x_2 | e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \cdot e_k \left| e_i \right. \right\rangle = \langle x | e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \cdot \langle e_k | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \cdot \delta_{k,i} = \langle x | e_i \rangle - \langle x | e_i \rangle = 0.$$

Ainsi tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$. ■

Remarque. Attention le résultat est en général faux lorsque F n'est pas de dimension finie, comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire :

$$\left\langle \sum_{k=1}^n a_k X^k \left| \sum_{k=1}^n b_k X^k \right. \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$; c'est clairement un sous-espace vectoriel (mais pas de dimension finie).

Soit $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k \in F^\perp$; puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k = X^{k+1} - X^k \in F$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \langle Q | P_k \rangle = a_{k+1} - a_k = 0 \quad \text{et} \quad \langle Q | P_n \rangle = -a_n = 0$$

Donc $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$, c'est à dire $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi :

$$F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}.$$

Puisque $F \neq \mathbb{R}[X]$, F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires dans E .

COROLLAIRE 15. (Dimension de $F^\perp$ dans un espace euclidien)

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, tout sous-espace vectoriel F est supplémentaire à son orthogonal; on a alors :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

En particulier, dans un espace euclidien :

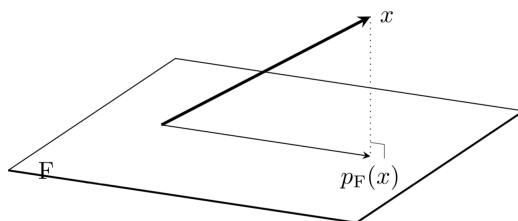
$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration. La relation sur les dimensions découle immédiatement de $E = F \oplus F^\perp$. En particulier $\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$, et puisque $F \subset (F^\perp)^\perp$ et ont même dimension, l'inclusion est en fait une égalité. ■

Remarque. Ce résultat sur les dimensions est un théorème du rang, en considérant la projection p de E sur F parallèlement à $F^\perp$ (ce qu'on appelle projection orthogonale sur F); en effet $\text{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = F^\perp$.

DÉFINITION 7. (Projection orthogonale sur un sev de dimension finie)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie. La projection orthogonale p_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.



Exemple. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$, et $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. Alors $F^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques puisque pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$:

$$\left. \begin{aligned} \langle S | A \rangle &= \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) \\ \langle A | S \rangle &= \text{tr}(A^T S) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(AS) \end{aligned} \right\} \implies \langle S | A \rangle = 0$$

La projection orthogonale sur $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe alors à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice symétrique $p_F(M) = \frac{M+M^T}{2}$.

PROPOSITION 16. (Expression des projections orthogonales)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sev de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F .

- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthogonale de F :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \frac{\langle x | e_i \rangle}{\|e_i\|^2} \cdot e_i$$

- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$$

Démonstration. Pour une base orthonormale de F ; le vecteur $x_1 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$ est clairement dans F Il suffit de montrer que $x - x_1 \in F^\perp$. La preuve est identique à la proposition 14.

Pour une base orthogonale $(e_1, \dots, e_p)$ la famille $(\frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1, \dots, \frac{1}{\|e_p\|} \cdot e_p)$ est une base orthonormale et donc avec ce qui précède et par bilinéarité :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \left\langle x \left| \frac{1}{\|e_i\|} \cdot e_i \right. \right\rangle \cdot \frac{1}{\|e_i\|} \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \frac{\langle x | e_i \rangle}{\|e_i\|^2} \cdot e_i.$$

Remarque. Avec cette formule, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui permet à partir d'une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ d'obtenir une famille orthonormale $(v_1, \dots, v_p)$ engendrant le même sous-espace, s'écrit :

$$v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{\|u_{k+1}\|} \cdot u_{k+1}$$

$$u_{k+1} = e_{k+1} - p_{\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)}(e_{k+1})$$

COROLLAIRE 17. (Inégalité de Bessel)

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors $\forall x \in E$:

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

En particulier $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration. La base $(e_1, \dots, e_p)$ étant orthonormale cela découle immédiatement de l'expression du projeté orthogonal :

$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$ et du théorème de Pythagore, par homogénéité :

$$\|p_F\|^2 = \sum_{i=1}^p \|\langle x | e_i \rangle \cdot e_i\|^2 = \sum_{i=1}^p |\langle x | e_i \rangle|^2 \cdot \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2.$$

■

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p_F sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où :

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

Résolution.

Méthode. Pour calculer la projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ sur F :

- Soit on dispose d'une base orthogonale/orthonormale de F et on applique l'une des formules données plus haut.
- Si on ne dispose que d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F on peut appliquer Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser avant d'appliquer la même méthode que ci-dessus.
- Mais on peut aussi plutôt chercher $p_F(x)$ en remarquant que $p_F(x)$ est l'unique point de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^\perp$ et en le caractérisant par $\langle x | e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$; on arrive à un système de p équations linéaires qu'on résout pour trouver les coordonnées de $p_F(x)$ sur la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soient $e_1 : t \mapsto 1$ et $e_2 : t \mapsto t \in E$. Déterminons le projeté orthogonal de $\phi : t \mapsto t^2$ sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Puisque $p_F(\phi) \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(\phi) = ae_1 + be_2$ et tel que :

$$\begin{cases} 0 = \langle e_1 | \phi - ae_1 - be_2 \rangle = \int_0^1 (t^2 - a - bt) dt = \frac{1}{3} - a - \frac{b}{2} \\ 0 = \langle e_2 | \phi - ae_1 - be_2 \rangle = \int_0^1 (t^3 - at - bt^2) dt = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{3} \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $(a, b) = (-\frac{1}{6}, 1)$; donc le projeté orthogonal de ϕ sur F est

$$p_F(\phi) : t \mapsto t - \frac{1}{6}.$$

DÉFINITION 8. (Distance à un sev)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E . La distance d'un vecteur $x \in E$ au sous-espace vectoriel F est définie par :

$$d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

C'est un réel positif.

Remarque. La distance de x à F est bien définie puisque $\{\|x - f\| \mid f \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}_+$; d'où l'existence de sa borne inférieure, qui de plus est positive.

Le résultat, très important, est que lorsque F est de dimension finie, la distance d'un vecteur quelconque $x \in E$ à F est atteinte, au projeté orthogonal de x sur F .

THÉORÈME 18. (Projection orthogonale et distance à un sev)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit F un sev de dimension finie. Alors pour tout $x \in E$:

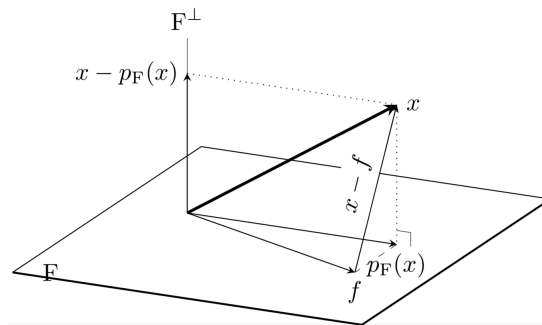
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{f \in F} \|x - f\|.$$

Autrement dit la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte : c'est la distance de x à son projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F . De plus le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique point minimisant la distance de x à un point de F .

Démonstration. Montrons que la distance de x à F est atteinte et qu'elle vaut $\|x - p_F(x)\|$; soit $f \in F$ quelconque :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \|x - p_F(x) + p_F(x) - f\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + 2\underbrace{\langle x - p_F(x) | p_F(x) - f \rangle}_{\in F^\perp \text{ et } \in F} + \|p_F(x) - f\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2 \\ &\geq \|x - p_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - f\|^2 = 0$ c'est à dire si et seulement si $f = p_F(x)$. ■



COROLLAIRE 19.

$$\forall x \in E, d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

Démonstration. Découle du théorème de Pythagore. ■

Exercice 2. On reprend comme dans l'exemple plus haut : $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

avec $e_1 : t \mapsto 1$ et $e_2 : t \mapsto t \in E$, $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\phi : t \mapsto t^2$.

Déterminer la distance de ϕ à F .

Résolution.

2. ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

2.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

DÉFINITION 9. (Isométrie vectorielle)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

c'est à dire que u est un endomorphisme qui préserve la norme euclidienne.

Exemples.

- $\pm \text{id}_E$ sont des isométries vectorielles.
- C'est aussi le cas dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, de $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$ puisque $\|f(x, y)\|^2 = \langle (-y, x) | (-y, x) \rangle = y^2 + x^2 = \|(x, y)\|^2$.
- Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle : une symétrie orthogonale s est une symétrie de F parallèlement à $F^\perp$. Alors pour tout $x \in E$: soient $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$:

$$\|s(x)\|^2 = \|s(x_1 + x_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$$

(par Pythagore, puisque x_1 et $-x_2$ sont orthogonaux).

Remarques.

- Une isométrie (tout court!) f de l'espace euclidien est une application qui préserve les distances : $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme qui préserve les distances puisque :

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y\|$$

C'est donc une isométrie. Ce calcul montre aussi que pour un endomorphisme, être une isométrie équivaut à préserver la norme, c'est à dire à être une isométrie vectorielle. Ainsi les isométries vectorielles sont précisément les endomorphismes d'un espace euclidien qui préservent les distances.

- On montre que toute isométrie de l'espace euclidien est la composée d'une isométrie vectorielle et d'une translation. Ainsi l'étude des isométries vectorielles permet de comprendre les isométries de l'espace euclidien. Les isométries vectorielles jouent un rôle central en géométrie euclidienne.

PROPOSITION 20. (Caractérisation à l'aide du produit scalaire)

Un endomorphisme u d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si u préserve le produit scalaire, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Démonstration. Si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, on a en particulier :

$$\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2 \xrightarrow{\|\cdot\| \geq 0} \|u(x)\| = \|x\|.$$

Réciproquement, soit u une isométrie vectorielle et $(x, y) \in E^2$; d'après l'identité de polarisation $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$,

$$\begin{aligned} \langle u(x) | u(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

Donc u préserve le produit scalaire. ■

PROPRIÉTÉ 21.

Soit u une isométrie vectorielle ; alors u est inversible et $-u$ et u^{-1} sont aussi des isométries vectorielles.

Démonstration. Montrons que u est inversible : si $x \in \text{Ker } u$ alors $\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle O_E | O_E \rangle = 0$; mais donc $\langle x | x \rangle = 0$ et par définie positivité $x = O_E$; ainsi $u \in \text{GL}(E)$.

Clairement $-u$ est un endomorphisme de E et pour tout $(x, y) \in E^2, \langle -u(x) | -u(y) \rangle = \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle = \langle -x | -y \rangle$. Donc $-u$ est une isométrie vectorielle.

Enfin, soit $(x, y) \in E^2$; posons $\alpha = u^{-1}(x)$ et $\beta = u^{-1}(y)$ alors puisque $\langle u(\alpha) | u(\beta) \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$, on obtient : $\langle u^{-1}(x) | u^{-1}(y) \rangle = \langle x | y \rangle$; donc u^{-1} est une isométrie vectorielle. ■

PROPOSITION-DÉFINITION 10. Groupe orthogonal

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E noté $O(E)$, est appelé groupe orthogonal de E . C'est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$, c'est à dire :

- $O(E) \subset GL(E)$,
- $\forall u \in O(E), u^{-1} \in O(E)$,
- $\forall u, v \in O(E), u \circ v \in O(E)$.

Démonstration. Les deux premiers points découlent de la propriété précédente. Le dernier de la définition : $\forall x \in E, \|u \circ v(x)\| = \|v(x)\| = \|x\|$. ■

La caractérisation suivante des isométries vectorielles en tant qu'endomorphismes envoyant une base orthonormale sur une base orthonormale est très utile :

THÉORÈME 22. (Caractérisation des isométries vectorielles)

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \in O(E)$
- (ii) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dont l'image par u est une base orthonormale.
- (iii) Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , l'image par u de $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

Démonstration.

(iii) $\implies$ (ii) est évident.

(i) $\implies$ (iii). Soit $u \in O(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .
On a alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle u(e_i) | u(e_j) \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

ce qui montre que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est aussi une base orthonormale de E .

(ii) $\implies$ (i). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit aussi une base orthonormale de E .

On a alors pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$ de E , $u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot u(e_k)$.

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ sont orthonormales, d'après la proposition 12 :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

donc $\|u(x)\| = \|x\|$: ainsi $u \in O(E)$. ■

Puisqu'une isométrie vectorielle préserve l'orthogonalité, on a naturellement :

PROPRIÉTÉ 23. (F stable par $u \in O(E) \implies F^\perp$ stable par u)

Si un sous-espace F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in O(E)$, son orthogonal $F^\perp$ est également stable par u .

Démonstration. Soit $F \subset E$ stable par $u \in O(E)$; soit $x \in F^\perp$, montrons que $u(x) \in F^\perp$.

Puisque u est un automorphisme, que $u(F) \subset F$ et que F est de dimension finie, $u(F) = F$. Donc u^{-1} est aussi une isométrie vectorielle qui laisse stable F . Alors pour tout $y \in F$:

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle u^{-1}(u(x)) | u^{-1}(y) \rangle = \langle \underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u^{-1}(y)}_{\in F} \rangle = 0.$$

et donc $u(x) \in F^\perp$. ■

PROPRIÉTÉ 24. (Spectre d'une isométrie vectorielle)

Soit u une isométrie vectorielle ; ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1 .

Démonstration. Si λ est une valeur propre, alors il existe $x \in E \setminus \{O_E\}$ tels que $u(x) = \lambda \cdot x$ et donc $\|u(x)\| = \|x\| = \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ et donc $|\lambda| = 1$. ■

Remarque. Une isométrie vectorielle peut avoir un spectre (réel) vide. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme u de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une isométrie vectorielle, puisqu'elle envoie la base canonique (e_1, e_2) , qui est orthonormale, sur la base orthonormale $(e_2, -e_1)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = X^2 + 1$ qui n'a aucune racine réelle.

2.2. Matrices orthogonales.

DÉFINITION 11. (Matrice orthogonale)

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si :

$$M^T M = I_n$$

c'est-à-dire si sa transposée est son inverse $M^T = M^{-1}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 12. (Groupe orthogonal)

L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $O_n(\mathbb{R})$ ou plus simplement $O(n)$:

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$$

Démonstration. Toute matrice de $O(n)$ est inversible. Il s'agit de montrer que pour toutes matrices $M, N \in O(n)$, on a aussi $MN \in O(n)$ et $M^{-1} \in O(n)$.

$$(MN)^T MN = (N)^T \underbrace{M^T M}_{=I_n} N = N^T N = I_n \implies MN \in O(n)$$

$$(M^{-1})^T M^{-1} = (M^T)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^{-1} M^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

PROPOSITION 25.

Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration. En effet, $1 = \det(I_n) = \det(M^T M) = \det(M^T) \det(M) = \det(M)^2$. ■

PROPOSITION-DÉFINITION 13. (Groupe spécial orthogonal)

On note :

$$SO_n(\mathbb{R}) = SO(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$$

appelé le groupe spécial orthogonal; c'est un sous-groupe du groupe orthogonal (appelé aussi sous-groupe des rotations).

Démonstration. Produit et inverse de matrices de $O(n)$ de déterminants 1 sont aussi de déterminant 1. ■

Remarque. Les matrices de $SO(n)$ sont appelées les matrices de rotation.

Remarque. Notons C_i la i -ème colonne d'une matrice carrée M . La matrice $M^T M$ a pour coefficient ligne i colonne j le produit scalaire scalaire usuel $C_i^T C_j$ de ses colonnes C_i et C_j . Ainsi une matrice orthogonale est une matrice dont les matrices colonnes forment une famille orthonormale (et donc une base orthonormale) pour le produit scalaire usuel.

Puisqu'un automorphisme orthogonal (isométrie vectorielle) est caractérisé par le fait d'envoyer une base orthonormale sur une base orthonormale, sans surprise vu la remarque précédente, les isométries vectorielles sont caractérisées par le fait d'avoir une matrice orthogonale pour matrice dans une base orthonormale.

THÉORÈME 26. (Caractérisation matricielle des isométries vectorielles)

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \in O(E)$
- (ii) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.
- (iii) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration. Comme déjà remarqué (remarque page 9), si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice dans $\mathcal{B}$, $M = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est la i -ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ et donc $a_{i,j} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$.

(iii) $\implies$ (ii) est évident.

(i) $\implies$ (iii). Soit $u \in O(E)$; u est inversible et d'après la remarque précédente : $M^T = (\langle e_j | u(e_i) \rangle)_{i,j}$ et $M^{-1} = (\langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle)_{i,j}$; or en composant par u :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle \underset{u \circ}{=} \langle u(e_i) | e_j \rangle \implies M^{-1} = M^T$$

Donc la matrice de u est orthogonale dans toute base orthonormée.

(ii) $\implies$ (i). Soit $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ orthogonale dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E : $M^{-1} = M^T$. Donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $\langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle = \langle u(e_i) | e_j \rangle$.

Soient $x = \sum_i x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_j y_j \cdot e_j$ quelconques dans E . Par bilinéarité :

$$\langle x | u^{-1}(y) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \left| \sum_{j=1}^n y_j \cdot u^{-1}(e_j) \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot u(e_i) \left| \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right. \right\rangle = \langle u(x) | y \rangle$$

En particulier, pour tout $(x, z) \in E^2$, $\langle u(x) | u(z) \rangle \underset{y=u(z)}{=} \langle x | u^{-1}(u(z)) \rangle = \langle x | z \rangle$. Donc u préserve le produit scalaire, c'est une isométrie vectorielle. ■

COROLLAIRE 27.

- Toute isométrie vectorielle $u \in O(E)$ a pour déterminant $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
- Toute matrice orthogonale $M \in O(n)$ a pour spectre $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 14. (Groupe spécial orthogonal $SO(E)$)

On appelle groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E , noté $SO(E)$, l'ensemble :

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$$

C'est un sous-groupe de $O(E)$.

Démonstration. Si $u, v \in SO(E)$ alors $u \circ v \in O(E)$, $u^{-1} \in O(E)$ et :

$$\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v) = 1 \quad ; \quad \det(u^{-1}) = \det(u)^{-1} = 1.$$

2.3. Application : orientation d'un espace vectoriel réel.

Rappelons que si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , pour toute famille $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{B}'$, noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs x_i de la famille dans la base $\mathcal{B}$. On aura alors que $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

DÉFINITION 15. (Orientation d'un espace vectoriel réel)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Orienter E , c'est choisir l'un des deux ensembles $\{\mathcal{B}' \in E^n \mid \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0\}$ ou $\{\mathcal{B}' \in E^n \mid \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0\}$ appelés respectivement ensemble des bases directes, et ensemble des bases indirectes.

Remarque. Ainsi le choix d'une base scinde les bases en deux catégories, les bases directes et les bases indirectes. Après un tel choix, l'espace vectoriel est dit orienté.

Dans le cas de bases orthonormales :

THÉORÈME 28. (Image d'une b.o.n. par une isométrie vectorielle)

L'image d'une base orthonormale directe par une isométrie vectorielle de déterminant 1 est une b.o.n. directe et par une isométrie vectorielle de déterminant -1 est une b.o.n. indirecte. (Il s'agit même d'une caractérisation des isométries vectorielles et de leur déterminant.)

Démonstration. L'image d'une base orthonormale par une isométrie vectorielle est une base orthonormale (théorème 22). De plus pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base, ici orthonormale directe, et $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ alors : $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et donc $\mathcal{B}'$ est orthonormale et directe si $\det(u) > 0$, indirecte si $\det(u) < 0$, c'est-à-dire selon que $\det(u) = 1$ ou $\det(u) = -1$ (corollaire 27). ■

THÉORÈME 29. (Changement de bases orthonormales directes)

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E , et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E . Alors

- $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale directe de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ sur les vecteurs de $\mathcal{B}'$. D'après le théorème 22, $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale si et seulement si $u \in O(E)$, et d'après le théorème 26 si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$. Or par définition $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. De plus $\mathcal{B}'$ sera orthonormé directe, ssi $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) > 0$, c'est à dire ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$. ■

2.4. Endomorphismes symétriques.**DÉFINITION 16. Endomorphisme symétrique ou autoadjoint**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est un endomorphisme autoadjoint, ou symétrique, de E lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est noté $\mathcal{S}(E)$.

Exemples.

- id_E et $-\text{id}_E$ sont autoadjoints dans l'espace euclidien E . Il en est de même des homothéties $\lambda \cdot \text{id}_E$.
- Les symétries orthogonales sont autoadjointes. En effet puisque ce sont des isométries vectorielles :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x | s(y) \rangle = \langle s(x) | s^2(y) \rangle = \langle s(x) | y \rangle$$

puisque $s \circ s = \text{id}_E$.

- Les projections orthogonales ne sont pas en général des isométries vectorielles (puisque en général $\ker p \neq \{O_E\}$). Ce sont par contre des endomorphismes autoadjoints : de $p = \frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$ où s est la symétrie orthogonale associée, on déduit que p est combinaison linéaire de deux endomorphismes autoadjoints, et le résultat découle de la proposition suivante.

PROPOSITION 30. Soit E un espace vectoriel euclidien, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E , $\mathcal{S}(E)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Démonstration. L'endomorphisme nul $O_{\mathcal{L}(E)}$ est autoadjoint puisque pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x | O_{\mathcal{L}(E)}(y) \rangle = \langle x | O_E \rangle = 0 = \langle O_E | y \rangle = \langle O_{\mathcal{L}(E)}(x) | y \rangle$$

Pour tout $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $(x, y) \in E^2$ par bilinéarité :

$$\langle x | (\lambda \cdot u + v)(y) \rangle = \langle x | \lambda \cdot u(y) + v(y) \rangle = \lambda \langle x | u(y) \rangle + \langle x | v(y) \rangle = \lambda \langle u(x) | y \rangle + \langle v(x) | y \rangle = \langle (\lambda \cdot u + v)(x) | y \rangle$$

donc $\lambda \cdot u + v \in \mathcal{S}(E)$. ■

Exercice 3. Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$; montrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si u et v commutent.

Résolution.

THÉORÈME 31. (Caractérisation des projections/symétries orthogonales)

Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

De même, une symétrie s est orthogonale (c'est à dire de F parallèlement à $F^\perp$) si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Démonstration. On a déjà traité en exemple la preuve du sens direct $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Supposons que p soit un projecteur autoadjoint. Alors pour tout $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \ker(p)$:

$$\langle x | y \rangle = \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle = \langle x | 0_E \rangle = 0$$

donc $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux : p est une projection orthogonale.

Si s est une symétrie autoadjointe, alors son projecteur associé $p = \frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$ est autoadjoint comme combinaison linéaire d'endomorphismes autoadjoints. Ainsi, d'après ce qui précède $\text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et donc s est une symétrie orthogonale (de $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$). ■

Parmi les symétries orthogonales on distingue les réflexions.

DÉFINITION 17. (Réflexions)

Une réflexion d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, c'est à dire un sev de dimension $\dim(E) - 1$.

Les endomorphismes autoadjoints sont ceux dont la matrice dans une base orthonormale est symétrique.

THÉORÈME 32. (Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$: les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est un endomorphisme autoadjoint.
- (ii) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.
- (iii) Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration. On rappelle que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est la i -ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ et donc $a_{i,j} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$.

Ainsi

$$\begin{aligned} u \text{ est autoadjoint} &\iff \forall (x, y) \in E^2, \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle u(e_i) | e_j \rangle && \text{par bilinéarité car } \mathcal{B} \text{ base} \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle && \text{par symétrie} \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = a_{j,i} \\ &\iff A \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

■

Remarques.

- En considérant pour $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , l'isomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}} u \end{cases}$$

on en déduit que la dimension de $\mathcal{S}(E)$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

- Soit M une matrice symétrique, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme canonique de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R}) : X \mapsto MX$ est autoadjoint pour la structure euclidienne usuelle de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$. En effet soient $(X, Y) \in \text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X | MY \rangle = \text{tr}(X^T MY) = \text{tr}(X^T M^T Y) = \text{tr}((MX)^T Y) = \langle MX | Y \rangle.$$

2.5. Réduction des endomorphismes symétriques.**PROPOSITION 33. (Sous-espaces propres orthogonaux)**

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E .

- Si F est un sous-espace stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u et l'endomorphisme induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ est aussi autoadjoint ; $u_F \in \mathcal{S}(F)$.
- Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$ alors pour tout $f \in F$, $\langle u(x) | f \rangle = \langle x | u(f) \rangle = 0$ donc $u(x) \in F^\perp$ et bien sur $u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$; $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ et donc $\langle u(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle$ par bilinéarité. Donc si $\lambda \neq \mu$ alors $\langle x | y \rangle = 0$; et puisque c'est vrai pour tout $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$, alors $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. ■

Le résultat suivant est très important :

THÉORÈME 34. (Théorème spectral)

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E .

Alors u est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Démonstration. (Non exigible).

Par récurrence forte sur $\dim E = n$.

(I) Si $n = 1$ c'est clair.

(H) Supposons l'assertion vraie dans tout sous-espace de dimension $< n$. Soit E de dimension n et u un endomorphisme autoadjoint de E .

Soit M une représentation matricielle de u dans une b.o.n. de E et soit λ une valeur propre éventuellement complexe de M associé à un vecteur propre $X = (x_i)_{i=1\dots n} \in \text{Mat}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On a $\overline{X}^\top M X$ est une matrice $(1, 1)$ (un scalaire) :

$$\overline{X}^\top M X = \overline{X}^\top \lambda \cdot X = \lambda \overline{X}^\top X = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

elle est donc égale à sa transposée :

$$\overline{X}^\top M X = (\overline{X}^\top M X)^\top = X^\top M^\top \overline{X} = X^\top M \overline{X}$$

puisque M est symétrique. Or M étant réelle λ est une valeur propre associée à X ssi $\overline{\lambda}$ est une valeur propre associée à $\overline{X}$:

$$M X = \lambda X \iff \overline{M X} = \overline{\lambda X} \iff \overline{M} \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X} \iff M \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$$

puisque somme et produit de conjugués sont les conjugués des somme et produit. Ainsi :

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \overline{X}^\top M X = X^\top M \overline{X} = \overline{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

et donc puisque $X \neq 0$, $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$, et donc $\lambda = \overline{\lambda}$. Ainsi la valeur propre λ est réelle. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u , et d'après la proposition 33 son orthogonal $E_\lambda(u)^\perp$ est aussi stable par u et l'endomorphisme induit $u_{E_\lambda(u)^\perp}$ est aussi autoadjoint.

On considère alors une base orthonormée de $E_\lambda(u)$ que l'on complète en une base de E grâce à une base orthonormée de vecteurs propres dans $E_\lambda(u)^\perp$ donnés par l'hypothèse de récurrence (puisque $\dim u_{E_\lambda(u)^\perp} < n$). On construit ainsi une base orthonormée constituée de vecteurs propres de u ; u est diagonalisable dans une base orthonormée. ■

Reformulons matriciellement ces résultats : puisque la matrice d'un endomorphisme autoadjoint est dans une base orthonormale, symétrique, ils se reformulent pour les matrices symétriques réelles. Dans la suite on se donne $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne classique :

$$\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M | M' \rangle = \text{tr}(M^\top M')$$

et on désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sev des matrices symétriques réelles.

PROPOSITION 35. (Sous-espaces propres orthogonaux)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; les sous-espaces propres de la matrice A sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration. Puisque A est symétrique, l'endomorphisme $u : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est autoadjoint comme déjà remarqué; Or ses éléments propres sont ceux de la matrice A . Le résultat découle donc de la proposition 33. ■

THÉORÈME 36. (Théorème spectral : formulation matricielle)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec pour matrice de passage une matrice orthogonale, c'est-à-dire que :

Pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, telles que

$$P^{-1} M P = P^\top M P = D.$$

Démonstration. On considère encore l'endomorphisme $u : X \mapsto M X$ de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$; il est autoadjoint puisque M est symétrique réelle, et ses éléments propres sont ceux de la matrice M . D'après le théorème spectral, M est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres; la matrice de passage correspondante est celle dans la base canonique, qui est orthonormale pour le produit scalaire usuel, d'une famille orthonormale, c'est donc d'après le théorème 29 une matrice orthogonale. ■

Remarque. Ce résultat est en défaut pour les matrices symétriques complexes. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a pour polynôme caractéristique } \chi_M(X) = X^2$$

et n'est donc pas diagonalisable (autrement elle serait semblable à la matrice nulle).

2.6. Endomorphismes/matrices symétriques positifs, définis positifs.

DÉFINITION 18. (Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif)

Un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ d'une espace euclidien E est dit :

- positif si $\forall x \in E, \langle x | u(x) \rangle \geq 0$.
- défini positif si $\forall x \in E \setminus \{O_E\}, \langle x | u(x) \rangle > 0$.

L'ensemble des endomorphismes :

- positifs est noté $\mathcal{S}^+(E)$,
- définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Matriciellement, la définition se reformule pour les matrices symétriques :

DÉFINITION 19. (Matrice symétrique positive, définie positive)

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite :

- positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$.
- définie positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_n\}, X^T M X > 0$.

L'ensemble des matrices :

- positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
- définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarques.

- Un endomorphisme autoadjoint défini positif définit un produit scalaire sur E :

$$(x, y) \longmapsto \langle x | u(y) \rangle$$

puisque l'application est :

- bilinéaire, par bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et linéarité de u ,
- symétrique, par symétrie de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et car u est autoadjoint :

$$\langle x | u(y) \rangle = \langle u(y) | x \rangle = \langle y | u(x) \rangle$$

- définie positive par défini positivité de u .

- Une matrice symétrique définie positive définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$(X, Y) \longmapsto X^T M Y$$

puisque l'application est :

- bilinéaire, par bilinéarité de $(X, Y) \longmapsto X^T Y$ et linéarité de $Y \longmapsto M Y$,
- symétrique, par symétrie de $(X, Y) \longmapsto X^T Y$ et car M est symétrique :

$$X^T M Y = (M Y)^T X = Y^T M^T X = Y^T M X$$

- définie positive par défini positivité de M .

Avec le théorème spectral, les endomorphismes/matrices positifs/défini positifs sont caractérisés par leurs valeurs propres :

THÉORÈME 37. (Caractérisation de la positivité/définie positivité)

- Un endomorphisme autoadjoint est :
 - positif ssi ses valeurs propres sont positives,
 - défini positif ssi ses valeurs propres sont strictement positives.
- Une matrice symétrique est :
 - positive ssi ses valeurs propres sont positives,
 - définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. Pour un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{S}(E)$: d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. Soit $x \in E$, $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n$, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs

propres associées (éventuellement avec répétition) :

$$\langle x | u(x) \rangle = \langle x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n e_n | u(x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n e_n) \rangle = \langle x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n e_n | \lambda_1 \cdot x_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n e_n \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \langle x | u(x) \rangle \geq 0 &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0 \\ \forall x \in E \setminus \{O_E\}, \langle x | u(x) \rangle > 0 &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0 \end{aligned}$$

Pour une matrice symétrique M , l'argument est identique en considérant l'endomorphisme $X \mapsto MX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et le produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^T Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ■

2.7. Classification des isométries du plan euclidien.

On se place dans l'espace euclidien orienté E de dimension 2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe, u une isométrie vectorielle de E , et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice M est orthogonale d'après le théorème 26. Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1 \text{ et } aa' + bb' = 0$$

D'après la première égalité il existe $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta' \\ \sin \theta & \sin \theta' \end{pmatrix}$$

Pour cela :

$$\theta = \begin{cases} \text{Arccos}(a) & \text{si } b \geq 0 \\ -\text{Arccos}(a) & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta' = \begin{cases} \text{Arccos}(a') & \text{si } b' \geq 0 \\ -\text{Arccos}(a') & \text{si } b' < 0 \end{cases}$$

La deuxième égalité devient alors :

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta - \theta') = 0$$

D'où :

$$\theta - \theta' \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \theta' \equiv \theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \left(\theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -\varepsilon \cdot \sin \theta \\ \sin \theta' &= \sin \left(\theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \varepsilon \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\varepsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{pmatrix} \implies \det(M) = \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta = \varepsilon$$

et réciproquement une telle matrice est orthogonale.

On obtient :

PROPOSITION 38.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors :

- $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

2.7.1. Rotations.

DÉFINITION 20. (Rotations)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

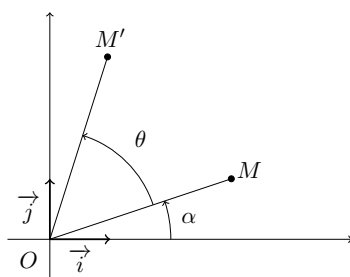
est appelée matrice de rotation d'angle θ . L'endomorphisme $u \in SO(E)$ de matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M(\theta)$ est appelé rotation d'angle θ .

En effet, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons la rotation R_θ de centre l'origine et d'angle θ : pour un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan :

$$r = OM \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha [2\pi] \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ = r \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j})$$

son image $R_\theta(M) = M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vérifie :

$$r = OM' \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \alpha + \theta [2\pi] \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{OM'} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \\ = r \cdot (\cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \theta) \cdot \vec{j})$$



Les coordonnées de M' s'obtiennent de celles de M par :

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = x \sin \theta + y \cos \theta$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La composée de deux rotations est une rotation ; matriciellement on obtient :

PROPOSITION 39. (Composée de deux rotations)

Soient $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$; on a :

$$M(\theta_1) \times M(\theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2)$$

En particulier deux matrices de rotations commutent entre elles.

Démonstration. Découle immédiatement par produit matriciel du développement du cos et du sin d'une somme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

■

Remarque. En particulier l'inverse de $M(\theta)$ est $M(\theta)^{-1} = M(-\theta)$ puisque $M(0) = I_2$.

COROLLAIRE 40.

$$M(\theta)^{-1} = M(-\theta)$$

La notion d'angle orienté entre deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ peut être défini à l'aide des rotations.

PROPOSITION-DÉFINITION 21. (Angle orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$)

Soient x, y deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien orienté $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Il existe une unique isométrie vectorielle $u \in SO(E)$ qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.

Si sa matrice dans une base orthonormée directe est $M(\theta)$, θ est la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs x et y ; il est défini modulo 2π .

Démonstration. Puisque $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont des sev de dimension 1 dans un ev de dimension 2, leur orthogonal est de dimension 1 ; ainsi il existe un unique vecteur $x' \in \text{Vect}(x)^\perp$ et un unique vecteur $y' \in \text{Vect}(y)^\perp$ tels que $\mathcal{B} = \left(\frac{x}{\|x\|}, x' \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\frac{y}{\|y\|}, y' \right)$ soient des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème 29 la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans

$SO_2(\mathbb{R})$, c'est donc la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une isométrie vectorielle $u \in SO(E)$ qui envoie la base $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$ terme à terme sur $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$; d'où l'existence. Et puisqu'un endomorphisme est caractérisé par son image d'une base, c'est le seul qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. Pour l'unicité, une isométrie vectorielle qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$ envoie aussi $\text{Vect}(x)^\perp$ sur $\text{Vect}(y)^\perp$, et si elle directe, x' sur y' , soit $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. ■

2.7.2. Réflexions.

PROPOSITION 41. (Réflexions)

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$; il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\text{Vect}(e_\theta)$ avec

$$e_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2$$

Démonstration. Calculons son polynôme caractéristique :

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & X + \cos \theta \end{vmatrix} = X^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = X^2 - 1 \implies \text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$$

Donc u est une réflexion par rapport à son sous-espace propre $E_1(u)$, qu'il suffit de déterminer; $E_1(u)$ est de dimension 1. Or $e_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2$ en est vecteur propre puisque :

$$\begin{aligned} u(e_\theta) &= (\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}) \cdot e_1 + (\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2}) \cdot e_2 \\ &= \cos \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_1 + \sin \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_2 \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2 = e_\theta \end{aligned}$$

Ainsi $E_1(u) = \text{Vect}(e_\theta)$. ■

Exercice 4. Notons $R(\theta)$ la matrice de rotation θ ; $R(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que pour tout $P \in O_2(\mathbb{R})$,

$$P^{-1}R(\theta)P = R(\pm\theta).$$

(2) Montrer si $P \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $P^{-1}R(\theta)P = R(\theta)$.

(3) Montrer que si $P \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ alors $P^{-1}R(\theta)P = R(-\theta)$.

(Indication : remarquer que P s'écrit alors $R(\theta') \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.)

Résolution.

