Chapitre 7 : Réduction des endomorphismes

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Sous-espaces vectoriels stables

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres
- Valeurs propres, vecteurs propres
- Sous-espace propre
- Éléments propres d'une matrice carrée

Polynôme caractéristique
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme
- Propriété fondamentale
- Ordre de multplicité d'une valeur propre
- Théorème de Hamilton-Cayley

Endomorphismes et matrices diagonalisables
- Définition et caractérisation
- Conditions nécessaires, suffisantes, de diagonalisabilité
- Diagonalisabilité et polynôme annulateur

Trigonalisation

Exemples d'applications
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable
- Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Sous-espaces vectoriels stables

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v des endomorphismes de E.

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$; Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$. On dit aussi que u stabilise F.

Exemples. : $\{O_E\}$, E, $\mathrm{Im}\, u$, $\mathrm{Ker}\, u$, n'importe quel sous-espace si u est une homothétie, si F et G sont stables par u alors il en est de même de $F + G$ et $F \cap G$.

Propriété

Si F est stable par u, on peut définir l'endomorphisme induit de u sur F par :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

ainsi $u_F \in \mathscr{L}(F)$.

Remarque. C'est tout l'intérêt de cette définition. La preuve est immédiate.

Propriété

Avec les mêmes notations :

- $\operatorname{Im} u_F = u(F)$
- $\operatorname{Ker} u_F = F \cap \operatorname{Ker} u$
- *Si F est de dimension finie, si u stabilise F et si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u(F) = F$, u^{-1} stabilise F et $\left(u^{-1}\right)_F = (u_F)^{-1}$.*

Démonstration.

$\operatorname{Im} u_F = \{u_F(x) \mid x \in F\} = \{u(x) \mid x \in F\} = u(F)$.

$\operatorname{Ker} u_F = \{x \in F \mid u_F(x) = O_F\} = \{x \in F \mid u(x) = O_E\} = \operatorname{Ker} u \cap F$.

• Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$: u est un automorphisme, qui stabilise F. Considérons une base de F, alors u l'envoie sur une famille libre de F de même cardinal, c'est-à-dire sur une base de F, u_F est donc un automorphisme de F. Ainsi $u(F) = \operatorname{Im} u_F = F$, et $(u_F)^{-1}$ est un automorphisme de F qui coïncide sur F avec u^{-1} ; donc $u_F^{-1} = \left(u^{-1}\right)_F$. ■

Dans la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_F$. Complétons $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Théorème

(Sous-espace stable et matrice triangulaire par bloc)

F stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$.

Dans ce cas, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration. Immédiate : la matrice de u est de cette forme triangulaire par bloc ssi $u(F) \subset F$ et dans ce cas $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$. ∎

Ce sous-espace stable nous a permis de trigonaliser par blocs dans une base adaptée.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E, $E = F \oplus G$, munis des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ et soit $\mathcal{B}$ la base adaptée obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

Théorème

(Sous-espaces supplémentaires stables et matrice diagonale par bloc)

F et G sont stables par u ssi la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & C \end{array}\right)$.

Dans ce cas, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u_G) \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Immédiate : la matrice de u est de cette forme diagonale par bloc ssi $u(F) \subset F$, $u(G) \subset G$ et dans ce cas $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u_G)$. ■

Dans ce cas, cette somme directe de supplémentaires stables nous a permis de diagonaliser par blocs dans une base adaptée.

Exercice. On se donne un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ ainsi que $x \in E \setminus \{O_E\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite $\text{Vect}(x)$ soit stable par u.

Résolution.

Une condition nécessaire et suffisante est que (x) se complète en une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la première forme, et si $u(\text{Vect}(x)) = \text{Vect}(x)$ soit de la deuxième forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ de E tel que $u(x) = \lambda \cdot x$.

Tout vecteur de ce type est appelé vecteur propre associé à λ.
L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u, on le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Exercice. Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.
2) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ soit une droite. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ non nul, un vecteur directeur. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \alpha \cdot x$.

Résolution.

On a $u \circ v = v \circ u$.

1) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$;

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(O_E) = O_E \implies v(x) \in \operatorname{Ker} u$$

Donc $\operatorname{Ker} u$ et stable par v.

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$; $y = u(x)$ pour un $x \in E$.

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) \in \operatorname{Im} u \implies v(y) \in \operatorname{Im} u$$

Ainsi $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

2) Puisque v et u commutent, alors v et $u - \lambda \mathrm{id}_E$ commutent aussi :

$$v \circ (u - \lambda \mathrm{id}_E) = v \circ u - v \circ \lambda \mathrm{id}_E = u \circ v - \lambda \mathrm{id}_E \circ v = (u - \lambda \mathrm{id}_E) \circ v$$

Donc d'après 1), $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est stable par v. Puisque $\dim \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 1$, $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(x)$, alors $v(x) \in \mathrm{Vect}(x)$; donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $v(x) = \alpha \cdot x$.

Caractérisation des valeurs propres

Proposition

$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) \neq \{O_E\} \iff u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E$ *est non injective.*

Si E est de dimension finie

$$\iff \det(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0$$

Démonstration.
$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \exists x \neq O_E,\ u(x) - \lambda \cdot x = O_E \iff \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) \neq \{O_E\} \iff u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E$ n'est pas injective $\iff \det(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = 0$ (lorsque $\dim E < \infty$). ■

Remarques.

– La condition $x \neq O_E$ est importante : en effet $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot O_E = O_E = u(O_E)$.

– x est vecteur propre signifie que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

– À un vecteur propre est associée une unique valeur propre.

– À une valeur propre est associée une infinité de vecteurs propres : si x est vecteur propre associé à λ tout vecteur non nul de $\mathrm{Vect}(x)$ est aussi un vecteur propre associé à λ.

– Si λ est valeur propre de u alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de u^k.

– $Sp(u) = \varnothing$ est possible lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : exemple $f(x,y) = (y,-x)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

Par contre nous verrons qu'en endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet toujours une valeur propre.

Exercice. Étudier les éventuelles valeurs propres de :

1) L'endomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$.

2) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Résolution.

1) $XP = \lambda.P \iff XP - \lambda.P = O_{\mathbb{K}[X]}$. Si $\deg P \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$, c'est impossible : il n'y a aucune valeur propre.

2) λ est valeur propre ssi :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Delta = -4\sin^2\theta \leqslant 0$$

– Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$: il n'y a pas de solution : aucune valeur propre.

– Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$: $\lambda = 1$. (C'est l'identité : $(x, y) \longmapsto (x, y)$).

– Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$: $\lambda = -1$. (C'est la symétrie de centre O : $(x, y) \longmapsto (-x, -y)$).

Pour déterminer les valeurs propres, la proposition suivante peut être utile.

Proposition

Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors :

$$\lambda \in Sp(u) \implies P(\lambda) = 0.$$

Démonstration. Soit $l \in Sp(u)$ et $x \neq O_E$ un vecteur propre associé à λ. Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$; puisque P est annulateur de u :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k = O_{\mathscr{L}(E)}$$

$$\implies P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k(x) = O_E$$

$$\implies P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \lambda^k \cdot x = O_E \qquad \text{car } u^k(x) = \lambda^k \cdot x$$

$$\implies P(\lambda) \cdot x = O_E \underset{x \neq O_E}{\implies} P(\lambda) = 0$$

La valeur propre de u est bien racine de P. ■

Sous-espace propre

Définition

On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $u \in \mathscr{L}(E)$, le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)$$

Remarques.

• $E_\lambda(u)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on rajoute O_E de façon a obtenir un sev.

• On étendra la notation $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ à tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ainsi $E_\lambda(u) \neq \{O_E\} \iff \lambda$ est une valeur propre de u.

• u est non injective $\iff$ 0 est valeur propre de u ; en effet $E_0(u) = \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice. Homothéties, projecteurs, symétries : donner leurs éléments propres (c'est-à-dire leurs valeurs propres et espaces propres).

Résolution.

• Homothéties : $u : x \longmapsto \lambda.x$ a une seule valeur propre λ ; $E_\lambda(u) = E$.

• Projecteurs : sur F parallèlement à G : soit $x \in E = F \oplus G$; $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

$$p(x) = x_1 = \lambda.(x_1 + x_2) \iff (1-\lambda).x_1 = \lambda \cdot x_2$$

$$\iff (1-\lambda).x_1 = O_E = \lambda \cdot x_2 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou } x_1 = O_E \\ \text{et} \\ \lambda = 0 \text{ ou } x_2 = O_E \end{cases}$$

Un projecteur a pour valeurs propres :

– $\lambda = 1$ si $F \neq \{O_E\}$, $E_1 = F$.

– $\lambda = 0$ si $G \neq \{O_E\}$, $E_0 = G$.

• Symétries : de F parallèlement à G : soit $x \in E = F \oplus G$; $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

$$\begin{aligned} s(x) = x_1 - x_2 = \lambda.(x_1 + x_2) &\iff (1-\lambda).x_1 = (1+\lambda)\cdot x_2 \\ &\iff (1-\lambda).x_1 = O_E = (1+\lambda)\cdot x_2 \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou } x_1 = O_E \\ \text{et} \\ \lambda = -1 \text{ ou } x_2 = O_E \end{cases} \end{aligned}$$

Une symétrie a pour valeurs propres :

– $\lambda = 1$ si $F \neq \{O_E\}$, $E_1 = F$.

– $\lambda = -1$ si $G \neq \{O_E\}$, $E_{-1} = G$.

Les sous-espaces propres sont en somme directe

Le théorème suivant est important :

Théorème

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de u alors la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$$

Démonstration. À connaître !

On raisonne par récurrence sur $p \geqslant 1$. Soit : $\mathscr{P}(p)$: « $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ est directe ».

(I) $\mathscr{P}(1)$ est trivialement vraie.

(H) Soit $p \geqslant 2$. On suppose l'assertion vraie au rang $p-1$. Supposons que l'on dispose d'une famille $(x_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ telle que pour tout $i \in [\![1,p]\!], x_i \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ et :

$$
\begin{aligned}
(1) &: \quad \sum_{k=1}^{p} x_k = O_E \\
(2) &: \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = O_E \qquad\qquad \text{en composant par } u \\
(2) - \lambda_p \cdot (1) &: \quad \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_k - \lambda_p)\, x_k = O_E
\end{aligned}
$$

Par hypothèse de récurrence $\bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ est directe donc $\forall k \in [\![1, p-1]\!]\ (\lambda_k - \lambda_p)\, x_k = O_E$ et comme $\lambda_k \neq \lambda_p$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ x_k = O_E$$

Il découle alors de (1) qu'on a aussi $x_p = O_E$. Ceci montre $\mathscr{P}(p)$. ■

On a les conséquences immédiates :

Corollaire

Soit E un e.v. de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *;*

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim(E)$,
- $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) = p \leqslant \dim(E)$,
- *Soit pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$; alors la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$, ...,$\mathcal{B}_p$ est libre.*

Le résultat suivant généralise une propriété déjà vue pour le noyau.

Proposition

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent.

Tous les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda(u)$; $u(x) = \lambda \cdot x$.

$$\lambda \cdot v(x) = v(\lambda.x) = v\left(u(x)\right) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \implies v(x) \in E_\lambda(u)$$

Ainsi $E_\lambda(u)$ est stable par v. ∎

Éléments propres d'une matrice carrée

On retranscrit naturellement aux matrices toutes ces notions.

Définition

- *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M lorsque λ est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \longmapsto MX$.*
- *Son spectre, noté $\mathrm{Sp}(M)$ est l'ensemble de ses valeurs propres.*
- *Si λ est valeur propre de M, un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{O_{n,1}\}$ tel que $MX = \lambda \cdot X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
- *On notera également $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}$ le sous-espace propre associé à λ.*

Remarque. Tous les résultats précédents se retranscrivent immédiatement ;

– $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff \det(\lambda \cdot I_n - M) = 0$.

– Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de M ; alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \implies P(\lambda) = 0$.

– Les sous-espaces propres de M sont en somme directe.

– Si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec M, alors tous les sous-espaces propres de M sont stables par multiplication (à gauche) par N.

Polynôme caractéristique

On supposera désormais que E est de dimension finie n.

Proposition

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \det(x \cdot I_n - M) \end{array}$$

est polynômiale de degré n, de la forme :

$$\det(X.I_n - M) = X^n - (\operatorname{tr} M)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det M$$

c'est un polynôme unitaire.

Pour prouver ce résultat on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; alors $\det(X.A - B)$ est un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Soit X un scalaire quelconque, la matrice $X.A - B$ a pour coefficient $(X.a_{i,j} - b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) Pour $n = 1$, $X.A - B = (X.a_{1,1} - b_{1,1})$ et $\det(X.A - B) = X.a_{1,1} - b_{1,1}$; l'assertion est vraie.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n et supposons que $A, B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$; en décomposant le long de la première ligne le calcul de $\det(X.A - B)$ on obtient :

$$\det(X.A - B) = \sum_{k=1}^{n+1} (X.a_{1,k} - b_{1,k}) \times (-1)^{1+k} \det\left((X.A - B)^{[1,k]}\right)$$

où $(X.A - B)^{[i,j]}$ désigne la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice $(X.A - B)$. Or trivialement $(X.A - B)^{[i,j]} = X.A^{[i,j]} - B^{[i,j]}$ et $A^{[i,j]}, B^{[i,j]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; ainsi par hypothèse de récurrence, $\det((X.A - B)^{[1,k]})$ est un polynôme de degré au plus n. Ainsi $(X.a_{1,k} - b_{1,k}) \times (-1)^{1+k} \det((X.A - B)^{[1,k]})$ est un polynôme de degré au plus $(n+1)$, et comme somme de polynômes de degrés $\leqslant (n+1)$, $\det(X.A - B)$ aussi. L'assertion reste donc vraie au rang $(n+1)$. ∎

Démonstration. Proposition 10.

Notons encore $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour les trois premiers points.

(I) Pour $n = 1$ c'est clair.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n-1 \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, une décomposition par rapport à la dernière ligne donne :

$$\det(X.I_n - M) = (X - a_{n,n}) \det\left((X.I_n - M)^{[n,n]}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k} (-a_{n,k}) \det\left((X.I_n - M)^{[n,k]}\right)$$

avec les mêmes notations que dans le lemme précédent.

– Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $(X.I_n - M)^{[n,k]}$ est une matrice carrée d'ordre $(n-1)$ dont la k-ième ligne ne dépend pas de X. En décomposant par cette ligne, le lemme précédent (appliqué aux cofacteurs) nous assure que son déterminant est un polynôme de degré au plus $(n-2)$.

– Les coefficients de X^n et X^{n-1} de $\det(X.I_n - M)$ sont donc ceux de
$(X - a_{n,n}) \det\left((X.I_n - M)^{[n,n]}\right)$.

– On a $(X.I_n - M)^{[n,n]} = X.I_n^{[n,n]} - M^{[n,n]}$; or $I_n^{[n,n]} = I_{n-1}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurence :

$$\det(X.I_n - M)^{[n,n]} = X^{n-1} - \mathrm{tr}\left(M^{[n,n]}\right) \cdot X^{n-2} + Q(X)$$

avec $Q(X) \in \mathbb{K}_{n-3}[x]$.

$$\det(X.I_n - M)^{[n,n]} = X^{n-1} - \operatorname{tr}\left(M^{[n,n]}\right) \cdot X^{n-2} + Q(X)$$

avec $Q(X) \in \mathbb{K}_{n-3}[x]$. Or $\operatorname{tr}\left(M^{[n,n]}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(X - a_{n,n}) \det\left((X.I_n - M)^{[n,n]}\right) &= (X - a_{n,n}) \left(X^{n-1} - \left(\operatorname{tr}\left(M^{[n,n]}\right)\right) \cdot X^{n-2} + Q(X)\right) \\ &= X^n - \left(a_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i}\right) \cdot X^{n-1} + \underbrace{(X - a_{n,n})\, Q(X) - a_{n,n}\operatorname{tr}\left(M^{[n,n]}\right) \cdot X^{n-2}}_{\deg \leqslant n-2} \\ &= X^n - \operatorname{tr}(M) \cdot X^{n-1} + \underbrace{P(X)}_{\in \mathbb{K}n-2[X]}\end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion au rang n.

Il reste à montrer que le coefficient de degré 0 est $(-1)^n \det(M)$; c'est immédiat puisque pour $X = 0$, $\det(X.I_n - M) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$ par n-linéarité du déterminant. ■

Définition

Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est le polynôme :

$$\chi_M(X) = \det(X \cdot I_n - M)$$

Exemples.

– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-a & b \\ c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - \underbrace{(a+d)}_{=\mathrm{tr}(M)} X + \underbrace{ad-bc}_{=\det(M)}$$

– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \begin{vmatrix} X-a & -b & -c \\ -d & X-e & -f \\ -g & -h & X-i \end{vmatrix} \\
&= (X-a)(X-e)(X-i) - bfg - dhc - (X-a)fh - (X-e)gc - (X-i)db \\
&= X^3 - \underbrace{(a+e+i)}_{=\operatorname{tr} M} X^2 + X(ae+ai+ei-fh-gc-db) \\
&\quad + \underbrace{(afh+egc+idb-aei-bfg-dhc)}_{=(-1)^3\det(M)}
\end{aligned}$$

Remarque. Certains auteurs définissent $\widetilde{\chi}_M(X) = \det(M - X\cdot I_n)$, on a $\widetilde{\chi}_M = (-1)^n\chi_M$, et le polynôme caractériqtique n'est plus unitaire.

Puisque le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique :

Propriété

$$\chi_{M^T} = \chi_M$$

Démonstration. $\det(x.I_n - M) = \det((x.I_n - M)^T) = \det(x.I_n^T - M^T) = \det(x.I_n - M^T)$. ∎

En utilisant les propriétés du déterminant d'une matrice triangulaire par bloc :

Propriété

(Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par bloc :

$$M = \begin{pmatrix} (A_1) & & & * \\ & (A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (A_p) \end{pmatrix}$$

Alors le polynôme caractéristique de M est produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux :

$$\chi_M = \prod_{k=1}^{p} \chi_{A_i}.$$

Démonstration. S'obtient facilement par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux, en appliquant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (théorème 8, chapitre 6.C). ∎

Corollaire

(Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire)

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i}).$$

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude :

Proposition

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique : Si $N = P^{-1}MP$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_N(X) = \chi_M(X)$.

Démonstration. Découle du fait que deux matrices semblables ont même déterminant :

$$\begin{aligned}\det(x \cdot I_n - P^{-1}MP) &= \det(P^{-1}xI_nP - P^{-1}MP) = \det(P^{-1}(xI_n - M)P) \\ &= \det(P)^{-1} \times \det(xI_n - M) \times \det P = \det(xI_n - M)\end{aligned}$$

∎

On peut alors définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Définition

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on définit le polynôme caractéristique χ_u de u, comme le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant u, de plus

$$\chi_u = X^n - (\operatorname{tr} u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u$$

Remarque. En particulier, si $n = \dim \mathrm{E} = 2, \chi_u = X^2 - (\operatorname{tr} u)X + \det u$.

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace stable par u. L'endomorphisme u_F induit sur F a un polynôme caractéristique qui divise celui de u :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad i.e. \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ \chi_u = \chi_{u_F} \times Q$$

Démonstration. En considérant un supplémentaire de F dans E et une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, la matrice M de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc :

$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$ avec A matrice de u_F dans la base de F comme établi dans le théorème 3. Avec la proposition 13, $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$, autrement dit $\chi_A = \chi_{u_F}$ divise $\chi_M = \chi_u$. ■

Théorème

- *Les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.*
- *Les valeurs propres de M sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.*

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué :
$\chi_u(\lambda) = 0 \iff \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u) = 0 \iff u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible $\iff u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E$ est non injective $\iff$ il existe x non nul tel que $u(x) - \lambda \cdot x = 0$.
La preuve est analogue pour une matrice M. ∎

Remarques.

– Puisqu'un polynôme de degré $\leqslant n$ a au plus n racines, on retrouve le fait déjà remarqué que le nombre de valeurs propres ne peut pas excéder la dimension de l'espace ambiant.

– En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u et M ont au moins une valeur propre (car d'après le théorème de d'Alemnbert-Gauss, dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme est scindé) ; de même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $\dim(E) = n$ est impair (avec le TVI, puisque $\deg(P)$ impair $\Longrightarrow$ $\lim_{+\infty} P(x)$ et $\lim_{-\infty} P(x)$ sont de signes opposés.

– Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut-être vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on distinguera donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$.

Corollaire

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement les éléments sur sa diagonale.

Exercice.

Déterminer les valeurs propres est sous-espaces propres associés de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution.

On commence par déterminer les valeurs propres :

$$\begin{aligned}\det(X.I_n - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ 0 & X-3 & -4 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix} &= (X-2) \times \begin{vmatrix} X-3 & -4 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)((X-3)(X-1)-8) \\ &= (X-2)(X^2-4X-5) \\ &= (X-2)(X-5)(X+1)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{5, 2, -1\right\}.$$

– Sous-espace propre associé à $\lambda = 5$: on résout le système :

$$(5.I_n - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & -y & -z & = & 0 \\ & 2y & -4z & = & 0 \\ & -2y & +4z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 2z \end{array} \right.$$

$$E_5(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

– Sous-espace propre associé à $\lambda = 2$: on résout le système :

$$(2.I_n - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrcl} -y & -z & = & 0 \\ -y & -4z & = & 0 \\ -2y & +z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

– Sous-espace propre associé à $\lambda = -1$: on résout le système :

$$(-I_n - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -3x & -y & -z & = & 0 \\ & -4y & -4z & = & 0 \\ & -2y & -2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array} \right.$$

$$E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ordre de multplicité d'une valeur propre

Définition

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de u, notée $m(\lambda)$, la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Remarque. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de M ssi $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre ; et dans ce cas elles ont même multiplicité.

Exemple. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ n'a en général pas de valeur propre réelle ; mais deux valeurs propres complexes $e^{\pm i\theta}$ d'ordre de multiplicité 1.

Exercice. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre complexe de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $E_\lambda(M)$ et $E_{\overline{\lambda}}(M)$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de même dimension.

Résolution.

Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, notons $\overline{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ la matrice de même type dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

Ainsi puisque $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\overline{M} = M$.

Alors $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de M associé à λ ssi $\overline{X}$ est un vecteur propre de $\overline{M} = M$ associé à $\overline{\lambda}$. En effet le conjugué d'une somme ou d'un produit est la somme ou le produit des conjugués.

L'application $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui à X associe $\overline{X}$ est clairement un isomorphisme. et elle envoie $E_\lambda(M)$ sur $E_{\overline{\lambda}}(M)$.

En particulier $\dim E_\lambda(M) = \dim E_{\overline{\lambda}}(M)$.

Théorème

Si λ est valeur propre de u (resp. de M) alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

(resp. $1 \leqslant \dim E_\lambda(M) \leqslant m(\lambda)$*).*

Démonstration. Un sous-espace propre contenant un vecteur non nul par définition, il est de dimension au moins 1.

Pour un endomorphisme u : $F = E_\lambda(u)$ est un sous-espace stable par u. De plus l'endomorphisme u_F induit est une l'homothétie $x \longmapsto \lambda \cdot x$. Dans une base de F sa matrice est alors scalaire, et son polynôme caractéristique $\chi_{u_F} = (X-\lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$. Daprès la proposition 16, χ_{u_F} divise χ_u et donc la multiplicité $m(\lambda)$ de λ dans χ_u est au moins celle dans χ_{u_F}, c'est-à-dire $\dim(E_l(u))$.

Matriciellement : si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à $E = E_\lambda(u) \oplus S$, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X \cdot \mathrm{id}_E - u) = \begin{pmatrix} (X-\lambda)I_{\dim(E_\lambda(u))} & * \\ 0 & A(X) \end{pmatrix},$$

d'où $\chi_u(\lambda) = (X-\lambda)^{\dim(\mathrm{E}_\lambda(u))} \det(A(X))$.

Pour une matrice M : le résultat s'en déduit en interprétant M comme la matrice d'un endomorphisme dans une base. ∎

Théorème de Hamilton-Cayley

C'est un résultat célèbre et remarquable :

Théorème

Le polynôme caractéristique χ_u (resp. χ_M) d'une endomorphisme u (resp. d'une matrice M) est un polynôme annulateur de u (resp. de M) :

$$\chi_u(u) = O_{\mathscr{L}(E)} \qquad \chi_M(M) = O_n$$

Sa preuve est non exigible. Nous le montrerons à l'aide des matrices compagnons : tout polynôme unitaire est un polynôme caractéristique d'une matrice.

Lemme

(Matrice compagnon)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; $\forall (a_0, a_1, \dots a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, *soit*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \quad \textit{alors} \quad \chi_M = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Démonstration. Notons $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. On forme $X.I_p - M$ et on lui applique les transformations $L_1 \leftarrow L_1 + X^{k-1}.L_k$ pour k variant de 2 à p :

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{p-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{p-1} \end{pmatrix} = A$$

On calcule son déterminant en décomposant le long de la première ligne :

$$\det(X.I_p - M) = \det(A) = (-1)^{p+1} P(X) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{p-1}}$$

$$= P(X)$$

∎

Démonstration. Théorème de Hamilton-Cayley.

On suppose E de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ (on le prouve pour un endomorphisme, le cas d'une matrice s'en déduit immédiatement). Soit $x \in E$ un vecteur non nul quelconque et soit $1 \leqslant p \leqslant n$ le plus grand entier tel que la famille de vecteurs

$$(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$$

soit libre. Nécessairement la famille

$$(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$$

est liée, et donc il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$a_0 \cdot x + a_1 \cdot u(x) + \cdots + a_{p-1} \cdot u^{p-1}(x) + u^p(x) = O_E$$

Posons $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$; c'est un sev de E de dimension p qui est stable par u (puisque $u^p(x) \in F$). Ainsi u induit un endomorphisme u_F de F, dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_F = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est la matrice compagnon :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

et donc avec le lemme précédent, $\chi_{u_F} = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$.

Mais d'après la proposition 16, χ_{u_F} divise χ_u : $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$\chi_u(X) = Q(X) \times \chi_{u_F}(X)$$

En considérant le polynôme d'endomorphisme :

$$\begin{aligned}
\chi_u(u)(x) &= (Q(u) \circ \chi_{u_F}(u))(x) \\
&= Q(u)(\chi_{u_F}(u)(x)) \\
&= Q(u)(u^p(x) + a_{p-\mathbf{1}} u^{p-\mathbf{1}}(x) + \cdots + a_{\mathbf{0}} x) \\
&= Q(u)(O_E) \\
\chi_u(u)(x) &= O_E
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_u(u)(x) = O_E$; puisque c'est vrai pour tout vecteur $x \neq O_E$ ainsi qu'évidemment pour $x = O_E$, c'est vrai pour tout pour tout vecteur $x \in E$; donc $\chi_u(u) = O_{\mathscr{L}(E)}$. ■

Ce résultat donne pour un endomorphisme d'un ev de dimension n (ou une matrice d'ordre n), un polynôme annulateur de degré n ; nous avons déjà vu que l'existence d'un polynôme annulateur s'avère très utile pour l'endomorphisme (pour la matrice).

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = X^2 + 1$$

Vérifions le théorème :

$$A^2 + I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Exercice.

Soient les deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer leur polynôme caractéristique, et en déduire N^n et J^n.

Résolution.

On forme $X\cdot I_n - N$ et $X\cdot I_n - J$:

$$X\cdot I_n - N = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & X \end{pmatrix} \quad X\cdot I_n - J = \begin{pmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{pmatrix}$$

Pour la première, puisqu'elle est triangulaire supérieure, on obtient $\chi_N = X^n$. D'après le théorème de Hamilton-Cayley, $N^n = O_n$.

Pour la seconde en développant le long de la dernière colonne on obtient :

$$\det(X\cdot I_n - J) = (-1)^{n+2}\begin{vmatrix} -1 & X & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n}X\begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \times (-1)^{n-1} + X \times X^{n-1} = X^n - 1$$

Avec le théorème de Hamilton-Cayley, on en déduit que $J^n = I_n$.

Exemple. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. Alors u est un endomorphisme nilpotent.

En effet, puisque dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme est scindé, le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = X^n$. D'après le théorème de Hamilton-Cayley $u^n = O_{\mathscr{L}(E)}$: u est nilpotent.

Le résultat devient faux si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, comme le montre l'exemple :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_u(X) = X(X^2+1)$$

Endomorphismes et matrices diagonalisables

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition

- *Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans lequel la matrice de u, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*
- *Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale.*

Remarque. – Une matrice est diagonalisable ssi c'est la matrice associée à un endomorphisme diagonalisable. La matrice P est alors la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base $\mathcal{B}$. Ainsi ces deux notions sont identiques via la représentation d'un endomorphime par une matrice carrée dans une base de l'espace ambiant.

Le point fondamental de ce chapitre est le suivant :

Propriété

- *Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u ; dans ce cas la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*
- *Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de M ; dans ce cas la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathcal{B}$; $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.*

De plus $P^{-1}MP = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i est la valeur propre associée au i-ème vecteur de la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$$

Ainsi la base est constituée de vecteurs propres et les λ_i sont les valeurs propres associées.

Le deuxième point découle de ce qui précède en interprétant M comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base canonique.

Remarque. La matrice P aura alors pour colonnes les vecteurs propres.

Déterminer, pour un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable, une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale, se dit "diagonaliser l'endomorphisme".

Déterminer pour une matrice M diagonalisable, une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale, se dit "diagonaliser la matrice".

En interprétant la matrice M comme celle d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dans une base $\mathcal{C}$ de E, ces deux notions sont identiques : la matrice P est alors la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$: $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.

Remarque. Toute matrice/endomorphisme, n'est pas diagonalisable ; par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

n'est pas diagonalisable puisque $\chi_M(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (-y, x) \end{array}$$

n'est donc pas diagonalisable non plus.

Caractérisation de la diagonalisabilité

Proposition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$; les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- *L'endomorphisme est diagonalisable ;*
- *E est somme directe des sous-espaces propres de u, i.e.*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

- *La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E, i.e.*

$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right).$$

Et de même pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. On sait que les sous-espaces propres sont en somme directe (théorème 7) et donc ils sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$; ce qui donne l'équivalence entre les deux derniers points.

Avec la propriété 22, u est diagonalisable ssi il existe une base de E constituée de vecteurs propres.

Si les sous-espace propres sont supplémentaires dans E, une base adaptée à la somme directe est une base de E constituée de vecteurs propres et donc u est diagonalisable.

Si u est diagonalisable, il existe une base de E constituée de vecteurs propres, ce qui montre que $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$; or la somme est directe (théorème 7) et donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. ■

Exemple. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ a une seule valeur propre λ alors u est diagonalisable ssi $E = E_\lambda(u)$ ssi $u = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

De même si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a une seule valeur propre, alors M est diagonalisable ssi l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé est $\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$, ssi $M = \lambda \cdot I_n$.

Exercice. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Résolution.

C'est une matrice triangulaire supérieure, donc son spectre se lit sur la diagonale $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$. Si M était diagonalisable on aurait pour $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$:

$$M = P^{-1} I_3 P = I_3$$

Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice. Soit :

$$\begin{array}{rcl} D_n : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P. L'endomorphisme D_n est-il diagonalisable ?

Résolution.

Dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}_n[X]$, l'endomorphisme D_n a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire supérieure avec des 0 sur sa diagonale, ce qui se montre rigoureusement par :

$$(1)' = O_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^* \implies (X^k)' = k.X^{k-1} \in \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^{k-1})$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(D_n) = \{0\}$. Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(D_n) \neq 0 \cdot I_{n+1} = O_{n+1}$ car $D_n \neq O_{\mathbb{K}_n[X]}$ donc D_n n'est pas diagonalisable.

Exercice. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais diagonalisable.

Résolution.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul tel qu'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ avec $u^p = O_{\mathscr{L}(E)}$.

Mais si λ est valeur propre de u alors λ^p est valeur propre de $u^p = O_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de u. Alors avec la caractérisation, u serait diagonalisable ssi $E = \mathrm{Ker}\, u$, ce qui est faux puisque $u \neq O_{\mathscr{L}}(E)$.

Caractérisation des homothéties, projecteurs et symétries

Remarque. Un projecteur est non trivial si ce n'est ni id_E ni $O_{\mathscr{L}(E)}$; une symétrie est non triviale si ce n'est pas $\pm\mathrm{id}_E$.

En dimension finie on obtient avec cette proposition une caractérisation des homothéties, projecteurs et symétries :

Proposition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$;

• *u est une homothérie si et seulement si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$.*

• *u est un projecteur non trivial si et seulement si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{1; 0\}$; dans ce cas u est le projecteur sur $E_1(u)$ parallèlement à $E_0(u)$.*

• *u est une symétrie non triviale si et seulement si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{1, -1\}$; dans ce cas u est la symétrie par $E_1(u)$ parallèlement à $E_{-1}(u)$.*

Démonstration. Une homothétie est $u = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$; ainsi dans n'importe quelle base $\mathrm{Mat}(u) = \lambda \cdot I_n$:u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$. Réciproquement si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \lambda$ alors d'après la proposition 23, $E_\lambda(u) = E$ et donc $u = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

Un endomorphisme u est un projecteur non trivial si et seulement si $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$ avec $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ de dimension non nulle et $\forall x \in \mathrm{Im}\, u$, $u(x) = x$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, u$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1, et $\mathrm{Ker}\, u$ celui associé à la valeur propre 0. Donc u est un projecteur non trivial si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 0\}$ avec $E_{\mathbf{1}}(u) \oplus E_{\mathbf{0}}(u) = E$, donc d'après la proposition 23 ssi u est diagonalisable avec valeurs propres 0 et 1.

Un endomorphisme u est une symétrie non triviale si et seulement si $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_E)$ avec $\mathrm{Ker}\,(u \pm \mathrm{id}_E)$ de dimensions non nulles ; donc avec la proposition 23 si et seulement si u est diagonalisable avec valeurs propres 1 et -1. ■

Condition suffisante de diagonalisabilité

La proposition 23 permet d'obtenir une condition suffisante simple pour qu'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable.

Corollaire

Soit E de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes, ou de manière équivalente, dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Alors u est diagonalisable.

Il en est de même pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. L'équivalence entre n valeurs propres distinctes et χ_u scindé à racine simples découle du fait qu'un polynôme de degré n a n racines distinctes ssi il est scindé à racines simples et que les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme caractéristique (théorème 17), qui est de degré n.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. D'après le théorème 7 , on a la somme directe :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$$

et d'après son corollaire 8,

$$\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim(E).$$

Or d'après le théorème 19, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_{\lambda_i}(u) \geqslant 1$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) \geqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \dim(E)$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim(E)$. Or par somme directe,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim(E)$$

Ainsi $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u) = E$, et d'après la proposition 23, u est diagonalisable.

Le cas d'une matrice carrée M en découle en considérant un endomorphisme u de matrice représentative M dans une base quelconque. ■

Exemple. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable puisqu'elle a 3 valeurs propres distinctes.

Une condition nécessaire et suffisante s'exprime à l'aide du polynôme caractéristique, des multiplicités des valeurs propres et des dimensions des sous-espaces propres. C'est le théorème principal de ce chapitre.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Théorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$; u est diagonalisable si et seulement si :

- *χ_u est scindé, et*
- *pour toute valeur propre de u, la dimension de son sous-espace propre est égale à sa multiplicité en tant que racine de χ_u :*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$$

On a le même résultat pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. On montre deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u soit diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$; notons $E_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i.\mathrm{id}_E)$: alors dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, la matrice de u est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux les matrices scalaires $\lambda_i \cdot I_{d_i}$ en notant $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ pour $i = 1, \dots, p$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X \cdot I_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} (X-\lambda_1) I_{d_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (X-\lambda_p) I_{d_p} \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\chi_u = \det(X \cdot \mathrm{id}_E - u) = \det(X \cdot I_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}$$

et donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $d_i = \dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons χ_u scindé, et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses racines et $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_p)$ leur ordre de multiplicité. Puisque χ_u a pour degré n :

$$\sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i) = n = \dim(E).$$

Les λ_i sont les valeurs propres de u, et leur sous-espaces propres sont en somme directe $\oplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, donc :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}).$$

Puisque par hypothèse $\forall i \in [[1, p]]$, $m(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$, on a donc :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \dim(E).$$

Ainsi $\oplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = E$. En considérant une base de E adaptée à la somme directe, il existe donc une base de E formée de vecteurs propres, avec la proposition 22 l'endomorphisme u est donc diagonalisable.

Pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'argument demeure valide en l'interprétant comme la matrice représentative d'une endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dans une base quelconque de E. ∎

Condition nécessaire

Corollaire

Une condition nécessaire pour qu'un endomorphisme (resp. une matrice) soit diagonalisable, est que son polynôme caractéristique soit scindé.

Exemples.

• Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Á quelle condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ a-t-on A diagonalisable ? Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ et donc A a deux valeurs 1 de multiplicité 2 et -1 de multiplicité 1. Le polynôme est scindé, et donc A sera diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) = 2$ et $\dim E_{-1}(A) = 1$.

Puisque $m(-1) = 1$, avec $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$ (théorème 19), nécessairement $\dim E_{-1}(A) = 1$. Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) = 2$.

Puisqu'on ne recherche que la diagonalisabilité, il n'est pas nécessaire de déterminer $E_1(A)$, mais seulement sa dimension. Avec le théorème du rang :

$$\dim E_1(A) = \dim \ker(A - I_3) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(A - I_3)$$

et donc :

$$A \text{ est diagonalisable ssi } \mathrm{rg}(A - I_3) = 1$$

Or :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 \iff a = 0$$

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

- On considère maintenant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

On sait d'après l'exemple précédent que A est diagonalisable. Déterminons une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = diag(1, 1, -1)$.

Pour cela, la matrice P étant la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers une base adaptée à $E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$, il nous faut déterminer une base de chaque sous-espace propre. Clairement $E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Déterminons $E_{-1}(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff (-I_3 - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & -b \\ 0 & -2 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & & -bz & = 0 \\ & -2y & -cz & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{b}{2} z \\ y = -\frac{c}{2} z \end{array} \right. \implies E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} b \\ c \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $P^{-1}AP = diag(1, 1, -1)$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Méthode. Pour diagonaliser un endomorphisme u/une matrice A, on peut souvent procéder ainsi :

• Calculer son polynôme caractéristique ; déterminer ses racines pour obtenir le spectre.

• Pour chaque valeur propre λ déterminer son sous-espace propre E_λ ; on peut résoudre un système de la forme $(\lambda.I_n - A)X = O$ (avec $A = \mathrm{Mat}(u)$).

• En déduire une base de chaque sous-espace propre, puis une base $\mathcal{B}$ de l'espace ambiant.

• Pour une matrice en déduire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.

Exercice. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Diagonaliser A, c'est-à-dire déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Résolution.

$$\det(X.I_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -2 \\ -1 & X & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -2 \\ X-1 & X & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X & -2 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} - (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)(X^2 - 3X + 2) - (X-1)(X - 3 + 2)$$

$$= (X-1)(X^2 - 4X + 3) = (X-1)^2(X-3)$$

Ainsi A a pour valeur propre 1 de multiplicité 2 et 3 de multiplicité 1. Donc $\dim E_3(A) = 1$ et donc A est diagonalisable ssi $\dim E_1(A) = 2$.

Déterminons $E_3(A)$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & =0 \\ -x & +3y & -2z & =0 \\ -x & +y & & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = y \end{array}\right. \implies E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Déterminons $E_1(A)$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & -2z & =0 \\ -x & +y & -2z & =0 \\ -x & +y & -2z & =0 \end{array}\right. \iff x = y - 2z \implies E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Les deux vecteurs générateurs formant de toute évidence une famille libre, ils forment une base de $E_1(A)$; on en déduit d'abord que la matrice est diagonalisable, puis la base :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

de vecteurs propres, et la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$:

$$P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisabilité et polynôme annulateur

Nous allons voir que la diagonalisabilité peut se caractériser à l'aide de polynôme annulateur. Rappelons que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) si $P(u) = O_{\mathscr{L}}(E)$ (resp. $P(A) = O_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$).

Il existe toujours un polynôme annulateur non nul ; en effet, en notant $n = \dim(E)$, $\dim \mathscr{L}(E) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$, et donc la famille $u^0, u^1, \ldots, u^{n^2}$ (resp. $A^0, A^1, \ldots, A^{n^2}$) est liée. D'ailleurs, le théorème d'Hamilton-Cayley nous en donne un de degré n : le polynôme caractéristique.

On se rappelle aussi que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) alors toute valeur propre de u (resp. de A) est aussi racine de P. Ainsi si le spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ est non vide, un polynôme annulateur est nécessairement multiple de $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_i)$. Le polynôme caractéristique est d'ailleurs un polynôme annulateur dont les racines sont précisément les valeurs propres. Une condition nécessaire pour que u (resp A) soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé. Et donc une condition nécessaire est l'existence d'un polynôme annulateur qui soit scindé.

CNS à l'aide d'un polynôme annulateur

Cette dernière assertion n'est pas loin de donner une condition nécessaire et suffisante. En fait :

Théorème

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

Démonstration. (Esquisse) Non exigible. C'est une conséquence de la proposition 23 et du lemme de décomposition des noyaux :

Lemme de décomposition des noyaux.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, tels que $P = P_1 P_2 \cdots P_k$; si les polynômes $P_1, \ldots, P_k$ sont deux à deux premiers entre eux (c'est-à-dire que si $i \neq j$, P_i et P_j ne sont pas multiples d'un même polynôme Q de degré $\geqslant 1$) alors :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$$

qui lui même se prouve sans difficulté par récurrence sur k en appliquant le théorème de Bézout.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ polynôme annulateur de u scindé à racines simples : $P = \prod_{k=1}^{q}(X - \lambda_k)$. D'après la proposition 6 parmi les racines de P figurent notamment toutes les valeurs propres de u. D'après le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{q} \ker(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$$

Or dès que λ_k n'est pas valeur propre de u, $\ker(u - \lambda_k \mathrm{id}_E) = \{O_E\}$. Ainsi E est somme directe des sous-espaces propres de u, et d'après la proposition 23, u est diagonalisable.

Réciproquement, si u est diagonalisable, toujours d'après la proposition 23, en notant $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$:

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$$

Ainsi, d'après le lemme de décomposition des noyaux, en notant $P = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_p) \in \mathbb{K}[X]$:

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(u - \lambda_k \mathrm{id}_E) = E$$

ou autrement dit P est une polynôme annulateur de u. Or P est par construction scindé à racine simples. ■

La preuve établit même le résultat plus précis :

Théorème

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) dont le spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ est diagonalisable si et seulement si le polynôme :

$$P = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_p)$$

est un polynôme annulateur de u (resp. de A).

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la matrice bloc :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} O_n & I_n \\ \hline I_n & O_n \end{array}\right)$$

est diagonalisable. En effet :

$$M^2 = \left(\begin{array}{c|c} O_n^2 + I_n^2 & O_n I_n + I_n O_n \\ \hline I_n O_n + O_n I_n & I_n^2 + O_n^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & O_n \\ \hline O_n & I_n \end{array}\right) = I_{2n}$$

Ainsi $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M ; puisqu'il est scindé à racines simple, M est diagonalisable.

Exercice. Les matrices blocs suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline O_n & O_n \end{array}\right) \quad ; \quad B = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline O_n & I_n \end{array}\right)$$

Résolution.

• Pour A :

On a $A^2 = A$; donc $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples ; A est donc diagonalisable.

• Pour B :

B est triangulaire supérieure ; $\lambda = 1$ est sa seule valeur propre et $X - 1$ n'est pas un polynôme annulateur de B puisque $B \neq I_{2n}$. B n'est pas diagonalisable.

Exemple. Critère de diagonalisabilité des matrices (ou endomorphismes) de rang 1.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

Alors toutes les colonnes C_i de M sont multiples d'une matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ disons :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists v_i \in \mathbb{K},\ C_i = v_i \cdot U.$$

En notant $V^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$:

$$M = U \times V^T$$

et donc en notant $U^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$M_{i,j} = u_i \times v_j$$

Ainsi (en identifiant $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$) :

$$V^T \times U = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \operatorname{tr}(M)$$

donc :

$$M^2 = U \times V^T \times U \times V^T = U \times (V^T U) \times V^T = \mathrm{tr}(M) \cdot U \times V^T = \mathrm{tr}(M) \cdot M$$

Ainsi $X^2 - \mathrm{tr}(M)X$ est un polynôme annulateur de M.

Si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, il est scindé à racine simples, et donc M est diagonalisable.

Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, X^2 est un polynôme annulateur de M, donc 0 est sa seule valeur propre, or X n'est pas un polynôme annulateur, donc M n'est pas diagonalisable.

On vient de montrer :

> Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $u \in \mathscr{L}(E)$) de rang 1.
>
> Alors M (resp. u) est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

On se rappelle que si F est un sous-espace stable par $u \in \mathscr{L}(E)$, alors u induit un endomorphisme u_F sur F. Le théorème 28 permet d'établir facilement le résultat suivant :

Théorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u et u_F l'endomorphisme induit sur F. Si u est diagonalisable alors u_F l'est aussi.

Démonstration. Si u est diagonalisable, d'après le théorème 28 il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = O_{\mathscr{L}(E)}$, mais alors $P(u_F) = O_{\mathscr{L}(F)}$ et d'après le théorème 28 u_F est aussi diagonalisable. ∎

Exemple. Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent : $u \circ v = v \circ u$. Montrons qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.

Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u, $E_1, \dots E_p$.

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Puisque u et v commutent, d'après la proposition 9 tous les sous-espaces propres E_i de u sont stables par v ; donc v induit sur chaque E_i un endomorphisme v_i.

Puisque v est diagonalisable, d'après le théorème précédent chaque v_i est diagonalisable. Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ il existe une base de E_i constituée de vecteurs propres de v_i ; et ce sont aussi des vecteurs propres de v ainsi que de u.

La concaténée de toutes ces bases de vecteurs propres des v_i sur chaque E_i, nous donne une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v.

Endomorphisme/matrice trigonalisable

Définition

- *Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans lequel la matrice de u, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*
- *Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}MP$ soit une matrice triangulaire supérieure.*

Remarques.

– Une matrice est trigonalisable ssi c'est la matrice associée à un endomorphisme trigonalisable. La matrice P est alors la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base $\mathcal{B}$. Ainsi ces deux notions sont identiques via la représentation d'un endomorphime par une matrice carrée dans une base de l'espace ambiant.

– Les coefficients sur la diagonale de la matrice triangulaire sont les valeurs propres. En effet si $A = (a_{i,j})$ est triangulaire, $\det(X.I_n - A) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$.

– Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure, si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire inférieure. En effet si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_n)$ prendre $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_{n-i}, \dots, e_1)$.

La caractérisation des endomorphismes/matrices trigonalisables s'exprime plus simplement à l'aide du polynôme caractéristique ; puisqu'une matrice diagonalisable est aussi trigonalisable, une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité sera aussi une condition nécessaire de diagonalisabilité. Il s'avère que la condition nécessaire de diagonalisabilité (corollaire 27) est nécessaire et suffisante pour la trigonalisabilité.

Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

Théorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) ; u (resp. A) est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u (resp. χ_A) est scindé.

Démonstration. (Non exigible.)

On l'établit pour une matrice ; le résultat s'en déduit pour un endomorphisme.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; si A est trigonalisable alors A est semblable à B triangulaire supérieure ; Or (proposition 15)

$$\chi_A = \chi_B = \prod_{i=\mathbf{1}}^{n}(X - B_{i,i})$$

et donc χ_A est scindé.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) Si $n = 1$ le résultat est clair.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n et soit $A \in \mathscr{M}_{n+\mathbf{1}}(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé ; en particulier A admet une valeur propre λ et un vecteur propre v. Complétons v en une base $\mathcal{B}$ de E. Si $P \in \mathrm{GL}_{n+\mathbf{1}}(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, alors :

$$P^{-\mathbf{1}}AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline O & A' \end{array}\right) \quad \text{avec } O = O_{n,\mathbf{1}},\ L \in \mathscr{M}_{\mathbf{1},n}(\mathbb{K}),\ A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

et d'après les propriétés 15 et 13, $\chi_A = (X - \lambda) \times \chi_{A'}$. Puisque χ_A est scindé, $\chi_{A'}$ aussi, et donc par hypothèse de récurrence A' est trigonalisable. Ainsi il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que : $Q^{-\mathbf{1}}A'Q = T$ soit triangulaire supérieure. Mais alors la matrice bloc :

$$P_{\mathbf{1}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array}\right) \quad \text{est inversible d'inverse} \quad P_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q^{-\mathbf{1}} \end{array}\right)$$

et :

$$
\begin{aligned}
P_1^{-1}P^{-1}APP_1 &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q^{-1} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline O & A' \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline O & Q^{-1}A' \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ \\ \hline O & Q^{-1}A'Q \end{array}\right) \\
\Longrightarrow (PP_1)^{-1}A(PP_1) &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ \\ \hline O & T \end{array}\right) \quad \text{est triangulaire supérieure.}
\end{aligned}
$$

La matrice A est donc trigonalisable : l'assertion reste vraie au rang $n+1$. ■

Remarque. Lors d'une trigonalisation, la matrice obtenue a pour coefficients sur sa diagonale les valeurs propres. Comme on le voit dans la preuve, on peut choisir leur ordre sur la diagonale comme bon nous semble.

L'intérêt de cette notion, c'est sa généralité, puisque d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé :

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont trigonalisables.

Pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pourra toujours la trigonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}MP$ soit triangulaire. Dans ce cas on notera $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de la matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions complexes de son polynôme caractéristique.

On a alors :

Corollaire

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. *Alors :*

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{p} m(\lambda_k) \times \lambda_k \qquad ; \qquad \det(M) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m(\lambda_k)}.$$

Même si les matrices triangulaires sont bien moins pratique à manipuler que les matrices diagonales, elles le sont quand même davantage que les matrices carrées quelconques. Ainsi la trigonalisation aura pour principale application le calcul des puissances d'une matrice.

Exercice. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ? Montrer qu'elles sont semblables et calculer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Résolution.

• Pour B : $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$ donc si B était diagonalisable ce serait la matrice I_3 ce qui n'est pas le cas ; B n'est pas diagonalisable.

• Pour A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} = X(X(X-3)+3)-1 = X^3-3X^2+3X-1 = (X-1)^3$$

ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Par le même argument A n'est pas diagonalisable.

• Montrons que les matrices sont semblables. Elles ont même trace et même polynôme caractéristique ; mais ça ne suffit pas pour déduire leur similitude.

En observant B, on cherche d'abord e_1 tel que $(A - I_3)e_1 = O$, puis e_2 tel que $(A - I_3)e_2 = e_1$ et enfin e_3 tel que $(A - I_3)e_3 = e_2$.

$$(A - I_3)\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 0 \\ & -y & + \ z & = 0 \\ x & -3y & +2z & = 0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(On remarque s'il était besoin que $\dim E_1(A) = 1$ et donc A n'est pas diagonalisable.)

Prenons donc $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

$$(A - I_3)\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 1 \\ & -y & + \ z & = 1 \\ x & -3y & +2z & = 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 1 \\ & -y & + \ z & = 1 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y - 1 \\ z = 1 + y \end{array}\right.$$

On peut choisir $e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

$$(A - I_3) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = -1 \\ & -y & + \ z & = 0 \\ x & -3y & +2z & = 1 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = -1 \\ & -y & + \ z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = z \end{array} \right.$$

On peut prendre $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien P inversible et $P^{-1}AP = B$. Les matrices sont semblables.

• Calcul de A^n.

$A^n = PB^nP^{-1} = P(I_3 + J)^nP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $J^3 = O_3$

$(I_3 + J)^n = I_3 + nJ + \binom{n}{2}J^2$ (binôme de Newton), il vient après calcul de $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n-1)(n-2) & -n(n-2) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) & (1-n)(1+n) & \frac{1}{2}n(n+1) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & -n(n+2) & \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{pmatrix}.$$

Exemple. Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable et admet 0 pour seule valeur propre. En effet soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Alors :

$$\{O_E\} \subset \mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}\, u^p = E$$

De plus toutes les inclusions sont strictes : Soit x tel que $u^{p-1}(x) \neq O_E$; puisque $u^{p-1} \neq O_{\mathscr{L}}(E)$ un tel x existe. Alors :

$$x \in \mathrm{Ker}\, u^p \setminus \mathrm{Ker}\, u^{p-1} \text{ et } u(x) \in \mathrm{Ker}\, u^{p-1} \setminus \mathrm{Ker}\, u^{p-2}, \ldots, u^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}\, u \setminus \{O_E\}$$

Prenons une base de $\mathrm{Ker}\, u$, qu'on complète en une base de $\mathrm{Ker}\, u^2$, etc..., jusqu'à compléter en une base de $\mathrm{Ker}\, u^p = E$. Puisque $u(\mathrm{Ker}\, u^k) \subset \mathrm{Ker}\, u^{k-1}$, dans cette base la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs, avec des blocs diagonaux tous nuls. En particulier elle est triangulaire supérieure avec que des 0 sur sa diagonale.

Méthode. Pour calculer les puissances successives d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, on peut :

• Diagonaliser A, c'est-à-dire déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

• Calculer l'inverse P^{-1} de P.

• En déduire si :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

Exercice. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(On pourra appliquer les résultats de l'exercice 11.)

Résolution.

On a établi à l'exercice 11 que A est diagonalisable avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \implies P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 1 - 3^n & 2.3^n - 2 \\ 3^n - 1 & 3 - 3^n & 2.3^n - 2 \\ 3^n - 1 & 1 - 3^n & 2.3^n \end{pmatrix}$$

Pour une matrice non diagonalisable mais seulement trigonalisable, on peut souvent en déduire ses puissances.

Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente linéaire d'ordre p si elle vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1} \qquad (*)$$

avec $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ des scalaires fixés.

Par une récurrence immédiate, une suite vérifiant cette relation de récurrence est uniquement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $u_0, \ldots, u_{p-1}$.

Plus précisément :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $v = (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$; notons $E(v)$ l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence $(*)$ pour ces scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$. Alors $E(v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E(v) & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme ; en particulier $E(v)$ est de dimension p.

Démonstration. Le fait que $E(v)$ soit un sev découle de la linéarité de la relation de récurrence ; clairement si (u_n) et (v_n) la satisfont, alors il en est de même de $\lambda \cdot (u_n) + (v_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$; et $O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \in E(v)$. L'application est clairement linéaire et bijective car la donnée de $(u_{\mathbf{0}}, \dots, u_{p-\mathbf{1}}) \in \mathbb{K}^p$ définit une et une seule suite dans $E(v)$. ∎

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

ce qui définit une suite $(U_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}^p$; on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0$$

et la détermination de u_n en fonction de n se ramène alors à l'expression de A^n en fonction de n ; ce qui peut être résolu lorsque la matrice A est diagonalisable comme nous venons de le voir.

La matrice A est la transposée d'une matrice compagnon (cf. lemme 21), et avec la propriété 12 et le lemme 21, son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

Si χ_A est scindé à racines simples $r_1, \ldots, r_p$ alors A est diagonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$U_n = P \times \begin{pmatrix} r_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_p^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \times U_0$$

En notant $E_{i,i} = diag(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ la matrice diagonale dont le seul coefficient non nul est 1 et situé ligne i colonne i, alors :

$$U_n = P \times \sum_{k=1}^{p} r_k^n E_{k,k} \times P^{-1} \times U_0 = \sum_{k=1}^{p} r_k^n \cdot P \times E_{k,k} \times P^{-1} \times U_0$$

On en déduit que u_n, premier coefficient de U_n, est combinaison linéaire des suites géométriques (r_1^n), ..., (r_p^n). La famille de ces suites géométriques est donc génératrice de $E(v)$, et puisqu'elle comporte p vecteurs dans un sev de dimension p, c'est une base.

Ainsi il existe une unique famille de scalaires $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_p r_p^n$$

que l'on détermine en général à l'aide des premiers termes $u_0, \dots, u_{p-1}$ de la suite (u_n).

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -6u_n - 11u_{n+1} - 6u_{n+2}$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Résolution.

Avec les mêmes notation que ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(X) = 6 + 11X + 6X^2 + X^3$$

Le polynôme caractéristique a pour racine évidente $\lambda = -1$

$$\chi_A(X) = (X+1)(X^2 + 5X + 6)$$

qui a pour racines : $-1,\ -2,\ -3$.

Il y a trois valeurs propres distinctes, donc il existe $x, y, z \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u_n = x(-1)^n + y(-2)^n + z(-3)^n$$

Nécessairement :

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ -x & -2y & -3z & =0 \\ x & +4y & +9z & =2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ & -y & -2z & =1 \\ & 3y & +8z & =1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ & -y & -2z & =1 \\ & & 2z & =4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-5 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4(-1)^n - 5(-2)^n + 2(-3)^n$$

Exemple. Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^2)^*$. Avec les mêmes notations :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow \chi_A(X) = X^2 - aX - b$$

L'équation caractéristique est :

$$\chi_A(X) = 0$$

Si elle admet deux solutions distinctes r_1, r_2, réelles $(\Delta > 0)$ ou complexes conjuguées $(\Delta < 0)$ alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Si elle admet une solution double r (lorsque $\Delta = 0$) alors $a^2 = -4b$ et $r = a/2$ donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r \end{pmatrix}$$

La matrice A admet pour seule valeur propre r et puisqu'elle n'est pas scalaire, elle n'est pas diagonalisable.

Par contre elle est trigonalisable et donc semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} r & q \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

avec $q \neq 0$ dans une base (e_1, e_2). En se plaçant dans la base $(q.e_1, e_2)$ elle sera alors semblable à :

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

ainsi il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}P^{-1} \Longrightarrow A^n = P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

Il est facile de voir (et on peut facilement l'établir à l'aide de la formule du binôme) que :

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}$$

Ainsi le même argument que plus haut montre que (u_n) est combinaison linéaire de la suite géométrique (r^n) et de la suite (nr^{n-1}) et donc de (r^n) et (nr^n).