Chapitre 10 : Espaces probabilisés

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
http://www.jean-philippe-preaux.fr

Ensemble dénombrable

Définition

Un ensemble est dit dénombrable lorsqu'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$. Un ensemble dénombrable peut-être décrit sous la forme :

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Un ensemble fini ou dénombrable est dit au plus dénombrable.

On admettra les résultats suivants.

Théorème

- *Si E et F sont dénombrables alors $E \times F$ est dénombrable.*
- *Toute partie d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable.*
- *Toute réunion (fini ou) dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Théorème

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables ;* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

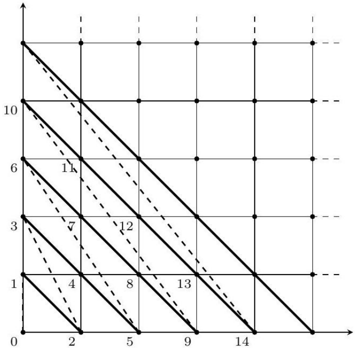
Démonstration. (Esquisse).

• Une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ est facile à construire ; par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2n-1 & \text{si } n > 0 \\ -2n & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Schématiquement : la bijection réciproque associe à $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ respectivement $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$, *etc.*

• Voici un schéma illustrant la preuve de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (et qu'un produit cartésien d'ensemble dénombrables est dénombrables).



Plus explicitement — mais de manière à peu près inutilisable — on a défini l'application bijective :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p, q) & \longmapsto & \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p \end{array}$$

• $\mathbb{Q}$ est dénombrable : $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$; $\mathbb{Q}_+$ et $\mathbb{Q}_-$ sont en bijection via $x \longmapsto -x$, et $\mathbb{Q}_+$ est dénombrable car en bijection avec une partie infinie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ via $\frac{p}{q} \longmapsto (p, q)$ où $p \wedge q = 1$.

• $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : il contient une partie infinie non dénombrable : tous les nombres réels dont le développement décimal est 0 suivi exclusivement après la virgule de 0 et de 1 ; cette partie est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ qui n'est pas dénombrable selon l'argument classique de "la diagonale de Cantor" :

Supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^N$. Pour chaque entier n, notons

$$\varphi(n) = (\varepsilon_{\mathbf{0}}(n), \varepsilon_{\mathbf{1}}(n), \ldots, \varepsilon_k(n), \ldots).$$

Rangeons ces valeurs dans un tableau, en faisant apparaitre la diagonale :

n	$\varphi(n)$						
0	$\varepsilon_0(0)$	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\cdots$	$\varepsilon_k(0)$	$\cdots$
1	$\varepsilon_0(1)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$	$\cdots$	$\varepsilon_k(1)$	$\cdots$
2	$\varepsilon_0(2)$	$\varepsilon_1(2)$	$\varepsilon_2(2)$	$\varepsilon_3(2)$	$\cdots$	$\varepsilon_k(2)$	$\cdots$
3	$\varepsilon_0(3)$	$\varepsilon_1(3)$	$\varepsilon_2(3)$	$\varepsilon_3(3)$	$\cdots$	$\varepsilon_k(3)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
k	$\varepsilon_0(k)$	$\varepsilon_1(k)$	$\varepsilon_2(k)$	$\varepsilon_3(k)$	$\cdots$	$\varepsilon_k(k)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

On considère enfin la suite $a = (a_{\mathbf{0}}, a_{\mathbf{1}}, a_{\mathbf{2}}, \ldots, a_k, \ldots)$ de terme général $a_k = 1 - \varepsilon_k(k)$. Alors a ne saurait être l'image d'aucun entier par φ : en effet, a et $\varphi(n)$ diffèrent sur leur n-ième terme. Cela contredit la surjectivité de φ. ■

Espaces probabilisés, événements

Nous allons étendre la définition d'espaces probabilisés, vue en première année sur des univers finis, à des univers quelconques. Pour cela deux modifications sont à apporter :

- Dans la définition d'une probabilité, la propriété d'additivité finie doit être remplacée par la propriété d'additivité dénombrable (ou σ-additivité) : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- L'ensemble des événements ne sera plus systématiquement $\mathscr{P}(\Omega)$ mais un sous-ensemble (appelé *tribu*) dont les éléments sont stables par certaines opérations ensemblistes. C'est à dire qu'un événement ne sera plus une partie <u>quelconque</u> de l'univers, mais un élément de la tribu.

Illustrons informellement ces nouveautés ; pour cela considérons deux expériences aléatoires menant à un univers infini, la première motivant la nécessité de l'additivité dénombrable, la deuxième la notion de tribu.

Dans la suite on suppose disposer d'une pièce de monnaie, éventuellement non équilibrée et notons $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtention d'un pile et $q = 1 - p$.

Premier exemple : obtention du premier pile

On lance la pièce jusqu'à l'obtention du premier pile, et l'on s'intéresse au nombre de lancers effectués. On modélise alors l'expérience aléatoire en prenant pour univers $\Omega = \mathbb{N}^*$ (le premier pile pouvant survenir à tout rang non nul), et pour événements toute partie de Ω. L'univers est dénombrable. Il est facile d'établir que la probabilité d'un événement élémentaire $\{k\}$, c'est à dire que le premier pile survienne au rang $k \in \mathbb{N}^*$, est :

$$\mathbb{P}(\{k\}) = pq^{k-1}$$

On peut s'intéresser à la probabilité que le premier pile survienne à un rang pair, c'est à dire de l'événement $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Pour cela l'additivité finie ne permet pas le calcul, tandis que l'additivité dénombrable permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{2k\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

Par exemple pour une pièce équilibrée, $p = \frac{1}{2}$, cette probabilité est de $\frac{1}{3}$.

Second exemple : jeu de pile ou face infini

Supposons que deux joueurs jouent à pile ou face : l'un ayant parié initialement sur pile, l'autre sur face, à chaque lancer le gagnant gagne un euro, tandis que le perdant en perd un. Partant d'une mise initiale, le jeu se poursuit tant qu'aucun des deux joueurs n'est ruiné.

Une fois la mise fixée, une partie est décrite par la suite des faces/piles obtenue. En notant 0/1 l'obtention d'un face/pile, une partie est décrite par une suite finie de 0 et de 1, dont la longueur ne peut être majorée.

Une partie qui ne s'achèverait jamais est même possible (alternance infinie de pile et face).

Aussi on prend comme univers l'ensemble des suites infinies de 0 et 1 : $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (les termes à partir d'un certain rang pouvant ne plus être pertinents pour décrire la partie). C'est un univers infini indénombrable.

Espérer obtenir une probabilité en la définissant sur chaque événement élémentaire puis sur chaque partie au plus dénombrable par additivité (finie ou) dénombrable est illusoire :

d'abord il est facilement établi que chaque événement élémentaire a une probabilité nulle et par conséquent tout événement au plus dénombrable aussi.

Ensuite cela ne permettrait pas de définir une probabilité sur les événement indénombrables : par exemple obtenir pile/face au n-ième lancer, soit les événements :

$$P_n = \{(x_k) \in \Omega \mid x_n = 1\} \qquad F_n = \{(x_k) \in \Omega \mid x_n = 0\}$$

Il a d'ailleurs été prouvé (et c'est un résultat difficile à établir) qu'il n'est pas possible de définir une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ pour décrire cette expérience aléatoire.

D'où la nécessité de restreindre l'ensemble des événements à une tribu : elle devra contenir tous les événements P_n et F_n, mais aussi :

– les événements impossible ($\varnothing$) et certain (Ω),

– les événements contraires $\overline{A}$ de chaque événement A,

– réunions $\bigcup_{i\in I} A_i$ et intersections $\bigcap_{i\in I} A_i$ finies ou dénombrables pour chaque telle famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements.

C'est ce qu'on appelle une tribu.

Tribu ; évènements

Définition

(Tribu ; événements)

Soit Ω un ensemble, appelé univers.
On appelle tribu sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{A}$
- $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

On parle de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

Un élément de A de $\mathscr{A}$ est appelé événement.

Remarques.

• Une tribu est aussi appelée σ-algèbre ; d'où l'utilisation de la lettre $\mathscr{A}$ pour la désigner ; on peut rencontrer aussi la lettre $\mathscr{T}$.

• $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω appelée tribu complète (la plus grande au sens de l'inclusion) ; tout comme $\left\{\varnothing, \Omega\right\}$ appelée tribu grossière (la plus petite), ou $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ la tribu associée à l'événement A, ou $\left\{\varnothing, A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, A \cup \overline{B}, \overline{A} \cup B, \overline{A} \cup \overline{B}, \Omega\right\}$, *etc.* Définir une tribu sert à définir les parties de Ω qui pourront être considérés comme des événements, c'est-à-dire –nous le verrons– sur lesquels on peut définir une probabilité. Sans cette définition, la définition d'une probabilité sur un ensemble infini serait trop restrictive.

• Sur un univers fini la notion n'a aucune utilité. Sur un univers dénombrable, on prend aussi la plupart du temps comme tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. C'est sur un univers infini indénombrable que la notion de tribu prend toute sa pertinence.

Stabilité d'une tribu par opérations ensemblistes

Propriété

Soit $\mathscr{A}$ une tribu ; alors :

- $\varnothing \in \mathscr{A}$.
- *Pour tout* $A, B \in \mathscr{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{A}$.
- *Pour tout* $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{A}$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A} \qquad ; \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{A} \ .$$

- *Pour toute suite suite d'événements* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A} \qquad ; \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

Démonstration.

– Pour $\varnothing$ c'est $\overline{\Omega}$.

– Pour la réunion dénombrable, c'est dans la définition ; pour l'intersection dénombrable c'est l'événement contraire de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

– Pour la réunion (resp. intersection) finie, il suffit de compléter la suite finie d'événements en une suite dénombrable en ajoutant des $\varnothing$ (resp. Ω) et d'appliquer le point précédent.

– Pour la différence $A \setminus B$, c'est $A \cap \overline{B}$. ■

Exemple. Sur $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on peut construire une tribu qui modélise une expérience de lancer à pile ou face à l'infini : la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les événements "Obtenir Face/Pile au n-ième lancer". Si on ne s'intéresse qu'au n premiers lancers on peut considérer une tribu finie constituée de 2^n événements, la plus petite tribu contenant "Obtenir Face/Pile au k-ième lancer" pour tout $k \leqslant n$.

Intersection de tribus

Proposition

Une intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu.

Démonstration. Soit F une famille quelconque de tribu et $\mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{T} \in \mathrm{F}} \mathscr{T}$.
Pour tout $\mathscr{T} \in \mathrm{F}$, $\Omega \in \mathscr{T}$, et donc $\Omega \in \mathscr{A}$.
Soit $A \in \mathscr{A}$; alors $\forall \mathscr{T} \in \mathrm{F}$, $\overline{A} \in \mathscr{T}$ et donc $\overline{A} \in \mathscr{A}$.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$, alors pour tout $\mathscr{T} \in \mathrm{F}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. ∎

Remarques.

• Une réunion de tribus n'est pas en général une tribu, comme le montre l'exemple des deux tribus associées à deux événements A et B, $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ et $\left\{\varnothing, B, \overline{B}, \Omega\right\}$ dès que $A \neq B$, et $A \neq \overline{B}$.

• On montre qu'une tribu est soit finie soit infinie indénombrable.

Vocabulaire probabiliste

On rappelle la correspondance entre le vocabulaire probabiliste et ensembliste pour la description d'événements.

Définition

Soient I un ensemble fini ou dénombrable, A et B des événements et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements, d'un même univers Ω.

- *L'événement «impossible» est $\varnothing$; l'événement «certain» est Ω.*
- *L'événement «A et B» est $A \cap B$.*
- *L'événement «A ou B» est $A \cup B$.*
- *L'événement «non A» ou «événement contraire de A» est $\overline{A}$.*
- *L'événement «$\forall i \in I,\ A_i$» est $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.*
- *L'événement «$\exists i \in I,\ A_i$» est $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*

- *On dit que l'événement A «implique» (ou «entraîne») l'événement B lorsque $A \subset B$.*
- *Les événements A et B sont dits «incompatibles» lorsque $A \cap B = \varnothing$.*

Exercice. Soit la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Décrire sous forme ensembliste les événements suivants :

– les événements A_n sont tous réalisés à partir d'un certain rang.

– une infinité d'événements A_n sont réalisés.

Résolution.

En description logique :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ A_n$$

soit en terme ensembliste :

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n$$

En description logique :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ A_n$$

soit en terme ensembliste :

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n$$

Système complet d'événements

Définition

Soit $I = [[1, n]]$ ou $I = \mathbb{N}$. Une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$

Remarques.

- Les probabilistes notent parfois $\Omega = \coprod_{i \in I} \mathrm{A}_i$.
- On parle aussi de partition de l'univers.

Probabilité

Définition

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- *Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements deux à deux incompatibles,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

(en particulier il y a convergence d'une telle série).

On parle de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Remarques.

• Pour rappel un espace probabilisé fini est la donnée de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tel que :

– Ω est un ensemble fini,

– $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$,

– $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une application telle que :

  – $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

  – Pour tous événements A, B incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

• Dans un espace probabilisé aussi, pour tout A, B deux évenements incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

En effet il suffit de considérer la suite d'événements deux à deux incompatibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \varnothing$ pour $n > 1$.

Additivité finie

Par le même argument :

Propriété

Pour une suite finie d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

En particulier les propriétés des espaces probabilisés finis restent pour la plupart valables pour les espaces probabilisés quelconques (tous ceux ne nécessitant pas la finitude de l'univers.)

Remarques.

• Dans le cas particulier où $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ avec Ω fini ou dénombrable, une probabilité $\mathbb{P}$ revient à se donner une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1 telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

• En revanche, dans les cas où Ω est infini indénombrable, par exemple $\Omega = [0,1]$, on peut définir une probabilité sur une tribu telle que pour tout intervalle $[a,b]$, on ait $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$. La construction est plus compliquée et on peut montrer sur cet exemple qu'il n'est pas possible de construire une telle probabilité sur $\mathscr{P}([0,1])$, d'où le concept de tribu qui offre plus de latitude à la définition d'une probabilité sur un univers infini.

Propriétés

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Propriété

Pour rappel :

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *(Probabilité de l'événement contraire)*
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(Probabilité d'une réunion)*
- *si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(Croissance)*
- *si* $B \subset A$ *alors* $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ *(Sous-additivité)*
- *si* $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *est un système complet d'évènements :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

De plus :

- *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un système complet d'évènements :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

en particulier la série converge.

Démonstration. Les 7 premiers points (rappels) se montrent de la même façon que pour une espace probabilisé fini, $\mathbb{P}$ vérifiant toutes les propriétés vérifiées dans le cas où Ω est fini.

Le dernier point découle de la définition d'une probabilité puisque lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, les événements de la suite $(B \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles puisque $i \neq j \implies (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \varnothing = \varnothing$. ∎

Propriétés de continuité monotone

Propriété

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- *(Continuité croissante.) Si la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante pour l'inclusion alors*

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

- *(Continuité décroissante.) Si la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante pour l'inclusion alors*

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Démonstration. On les montre successivement.

- On pose $B_0 = A_0$ et pour $n \geqslant 1, B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. Ainsi :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \coprod_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ (union disjointe).}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\mathbb{P}\left(A_0\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\mathbb{P}\left(A_n\right) - \mathbb{P}\left(A_{n-1}\right)\right)\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_N\right)\end{aligned}$$

- On passe au complémentaire dans la relation précédente : si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors la suite de leur complémentaires dans Ω, $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion ; d'après le point précédent :

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$$

Mais :

$$\left.\begin{array}{r}\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \text{ et} \\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\end{array}\right\} \text{ et donc : } \mathbb{P}\left(A_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

■

Exemples. (À connaître). Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

En effet la première s'obtient par continuité croissante, en considérant la suite croissante $\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\in N}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

et la deuxième par continuité décroissante, en considérant la suite décroissante $\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\in N}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Exercice. Dans un jeu de pile ou face où la probabilité d'obtenir pile est notée $p \in]0,1[$, montrer que la probabilité d'obtenir infiniment pile est nulle.

Résolution.

Notons A_n l'événement "obtenir pile lors des n premiers lancers".

$$\mathbb{P}(A_n) = p^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$; ainsi par continuité décroissante :

$$0 = \lim_{n \to +\infty} p^n = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Or l'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ consiste à obtenir infiniment pile. Sa probabilité est nulle.

Sous-additivité dénombrable

Propriété

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \ \left(\textit{éventuellement} \leqslant +\infty\right).$$

Remarque. Cette propriété s'appelle aussi «inégalité de Boole».

Démonstration. On pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$; la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et donc par continuité croissante :

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ donc, si la série converge, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$; par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité recherchée. ∎

Événements négligeable/presque sur

Définition

- *Un événement* $A \in \mathscr{A}$ *est dit négligeable lorsque* $\mathbb{P}(A) = 0$.
- *Un événement* $A \in \mathscr{A}$ *est dit presque sûr lorsque* $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque. Notons que l'événement impossible n'est pas le seul événement négligeable ; l'événement certain n'est pas le seul événement presque sûr.

Exercice. Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé.

1) Montrer que si B est négligeable, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$.

2) Montrer que si B est presque sûr alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.

Résolution.

On applique dans les deux cas $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

1) $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$; mais $\mathbb{P}(B)=0$ et par croissance, puisque $A\cap B\subset B$, $\mathbb{P}(A\cap B)\leqslant\mathbb{P}(B)=0$. Donc $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)$.

2) On a $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$; mais $\mathbb{P}(B)=1$ et $B\subset A\cup B \implies \mathbb{P}(A\cup B)=1$. Ainsi $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+1-1=\mathbb{P}(A)$.

Proposition

Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.

Démonstration. Découle immédiatement de la sous-additivité finie ou dénombrable. ■

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit $B \in \mathscr{A}$ telle que $\mathbb{P}(B) > 0$ et soit $A \in \mathscr{A}$. La probabilité de A sachant B est définie par :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarques.

• En particulier, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \times \mathbb{P}(B)$.

• Soit B un événement non négligeable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; En se plaçant sur l'univers B, muni de la tribu $\mathscr{A} \cap B = \left\{A \cap B \mid A \in \mathscr{A}\right\}$, alors $(B, \mathscr{A} \cap B, \mathbb{P}_B)$ est un espace probabilisé induit par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur l'univers B.

Proposition

L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_B : \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$, dénommé probabilité conditionnelle à l'événement B.

Démonstration. Puisque $A \cap B \subset B$, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et donc $\mathbb{P}_B(A) \in [0,1]$: l'application est bien définie.

Il y a deux points à vérifier :

– $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap A_n\right)}{\mathbb{P}(B)} \underset{(*)}{=} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_n)$$

car $(B \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles. ■

En particulier, $\mathbb{P}_B$ vérifie toutes les propriétés établies pour une probabilité.

Formule des probabilités totales

Théorème

• **Cas fini.** *Soient* $I = [\![1, n]\!]$ *et soit* $(A_i)_{i \in I}$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors pour tout événement* B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i)$$

• **Cas infini.** *Soit* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors pour tout événement* B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\, \mathbb{P}(A_n)$$

En particulier, la série converge.

Démonstration. Immédiate ; on sait (cf. propriété 6) que sous ces hypothèses :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B)$$

et puisque pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$:

$$\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A_i) \times \mathbb{P}(A_i)$$

d'où découle la formule. ■

La formule se généralise aux systèmes quasi-complets d'événements, d'usage fréquent sur des univers infinis :

Définition

(Système quasi-complet d'événements)

Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles et vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$$

est appelé <u>système quasi-complet d'événements</u>.

Remarques.

• Tout système complet d'événements est aussi quasi-complet ; la réciproque est fausse.

• Par σ-additivité, la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ équivaut à : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est presque-sûr.

• Toute famille finie d'événements deux à deux incompatibles dont la somme des probabilités vaut 1, peut être complétée en un système quasi-complet d'événements en lui ajoutant des événements impossibles $\varnothing$. C'est un cas assez peu fréquent d'application.

Proposition

(Formule des probabilités totales)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements.

Pour tout événement B la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

si de plus tous les A_n sont de probabilité non nulle :

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n) \times \mathbb{P}(A_n)$$

Démonstration. Soit $C = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors C est un événement négligeable et en ajoutant C à la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient un système complet d'événement. Puisque $C \cap B \subset C$, $\mathbb{P}(C \cap B) = 0$, et la formule découle alors de la propriété 6 et de la formule des probabilités totales (théorème 11).

Exercice.

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et d'une infinité dénombrable d'urnes numérotées par les entiers de $\mathbb{N}^*$ telles que l'urne k contienne 1 boule blanche et $2^k - 1$ boule noires.

On lance la pièce jusqu'à l'obtention du premier pile ; s'il survient au rang $k \in \mathbb{N}^*$ on tire dans l'urne k une boule.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

Résolution.

On appelle A_k l'événement : « Le premier pile survient au k-ème lancer » ; on a $\mathbb{P}(A_k) = q^{k-1}p$. On note B l'événement « La boule tirée est blanche », $q = 1 - p$.

On applique la formule des probabilités totales avec pour système quasi-complet d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

En effet ses événements sont deux à deux incompatibles et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p = p \times \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B/A_k) \times \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} pq^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^k$$

$$= \frac{p}{2} \times \frac{1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{p}{2-q} = \frac{p}{1+p}$$

Formule des probabilités composées

Théorème

On suppose que $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ *est une famille finie d'événements telle que*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)\\ = {} & \mathbb{P}\left(A_1\right) \times \mathbb{P}_{A_1}\left(A_2\right) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right)\end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

(I) pour $n = 2$ de la définition d'une probabilité conditionnelle découle que si $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2/A_1)$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 2$ fixé. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.
Or :

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n \quad \subset \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$$

et donc :

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

en particulier $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\
= \ & \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1}) \\
\underset{(HR)}{=} \ & \underbrace{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)} \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1})
\end{aligned}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$, ce qui conclut la récurrence. ∎

Exercice. (Mines 2016) Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche. On effectue une succession de tirages :

- Si on tire une boule rouge, on la remet ainsi que deux boules blanches ;
- Si on tire une boule blanche, on la remet ainsi que deux boules rouges.

Calculer la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.

Résolution.

En notant R_k l'événement «la k-ième boule tirée est rouge »et en appliquant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \cdots \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2^n n!}\end{aligned}$$

Formules de Bayes

Théorème

- *Si* $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$, *alors*
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
- *Si* $(A_i)_{i \in I}$ *est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors pour tout événement* B, *et pour tout* $j \in I$:
$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right) \mathbb{P}\left(A_j\right)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right) \mathbb{P}\left(A_i\right)}$$

Démonstration. La première découle rapidement de :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) = P_A(B) \times \mathbb{P}(A)$$

La seconde découle de la première et de la formule des probabilités totales. ∎

Exercice. Face à une maladie propagée dans la population, la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit malade est de 10^{-3}. On dispose d'un test pour lequel :

- La probabilité d'avoir un test positif lorsqu'on est malade est 0,99.
- La probabilité d'avoir un test positif lorsqu'on est sain est 0,02.

1) Un individu vient d'être testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit sain ? (C'est le taux de faux positifs)

2) Un individu vient d'être testé négatif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ? (C'est le taux de faux négatifs)

3) Conclure quant à la fiabilité du test.

Les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

Résolution.

Pour un individu notons les événements :

$$M \ : \ \text{« Être malade »} \qquad\qquad T \ : \ \text{« Être testé positif »}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-3} \qquad \mathbb{P}_M(T) = 0,99 \qquad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,02$$

1) On recherche $\mathbb{P}_T(\overline{M})$:

$$\mathbb{P}_T(\overline{M}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathbb{P}(\overline{M})}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,02 \times 0,999}{\mathbb{P}(T)}$$

et :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_M(T) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathbb{P}(\overline{M}) = 0,99 \times 10^{-3} + 0,02 \times (0,999)$$

d'où $\mathbb{P}_T(\overline{M}) \approx 0,95$.

2) On recherche $\mathbb{P}_{\overline{T}}(M)$:

$$\mathbb{P}_{\overline{T}}(M) = \frac{\mathbb{P}_M(\overline{T}) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{0,01 \times 0,001}{\mathbb{P}(\overline{T})}$$

d'où $\mathbb{P}_{\overline{T}}(M) \approx 0,0005$.

3) Le test n'est utile que pour diagnostiquer un individu sain.

Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque. L'indépendance peut être supposé dès que les événements A et B décrivent les résultats d'expérience indépendantes : résultats successifs de deux lancers d'une pièce, d'un dé, de deux tirages consécutifs avec remise dans une urne.

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration. Si $\mathbb{P}(B) > 0$ alors $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et donc A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$. ■

Propriété

Lorsque A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}((A \cup \overline{A}) \cap B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) - \mathbb{P}(\underbrace{A \cap B \cap \overline{A} \cap B}_{=\varnothing})\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \underbrace{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}_{\textbf{par indépendance}} = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$$

donc $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants ; par symétrie c'est aussi le cas de A et $\overline{B}$ ainsi que de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. ∎

Indépendance d'une famille d'événements

Dans la cas d'événements décrivant les résultats de plus de deux expériences indépendantes la notion d'indépendance pour plus de deux événements devient :

Définition

Soit I une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. La famille est dite indépendante lorsque pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right)$$

On dit aussi que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque. On dit que les A_i sont deux à deux indépendants lorsque pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, les A_i et A_j sont indépendants. Cette notion est beaucoup faible que la notion de «mutuelle indépendance ».

Exemple. Trois événements deux à deux indépendants qui ne sont pas mutuellement indépendants : On prend pour univers Ω l'ensemble des familles ayant deux enfants, et pour événements :
A : l'aîné est un garçon B : le cadet est une fille C : la fratrie est mixte.
En considérant l'univers $\Omega = \{(G,F),(F,G),(G,G),(F,F)\}$ muni de la probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{(G,F)\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{(G,F)\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

Les événements A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Remarque. L'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ et pas seulement de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent mais avec la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_C$:

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

car $A \cap B \subset C$.

Les événements A et B sont indépendants pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mais pas pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}_C)$.