Chapitre 14 :
Intégrales dépendant d'un paramètre

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Dans tout ce chapitre, I, J désignent des intervalles d'intérieurs non vides (c'est à dire non vides et non réduits à un point et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous nous intéressons à des intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre, qui peut être :

– entier, $f_n : t \longmapsto f_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$

– ou réel, $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas nous nous intéressons aux problème de convergence :

– Convergence de la suite numérique $\left(\int_J f_n(t)\mathrm{d}t\right)_n$,

– Convergence de la série numérique $\sum_n \int_J f_n(t)$,

– La fonction $x \longmapsto \int_J f(x, t)\mathrm{d}t$ est-elle bien définie ?

Dans le cas d'un paramètre réel, nous nous intéressons en outre à la continuité, dérivabilité, régularité ($\mathscr{C}^k$), limites aux bornes, de la fonction réelle $x \longmapsto \int_J f(x, t)\mathrm{d}t$.

Les résultats de ce chapitre sont importants ; mais les preuves seront pour les plus fondamentaux admises, et pour toutes non-exigibles. Aussi il convient de lire avec attention les exemples et contre-exemples pour bien comprendre l'importance de leurs hypothèses.

Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition

• *Un suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle J, est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une application $f_n : J \longrightarrow \mathbb{K}$; autrement dit, c'est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^J$.*

• *On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $t \in J$, la suite numérique $(f_n(t))_n$ converge vers le scalaire $f(t)$. Autrement dit :*

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$$

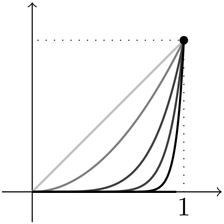
$$\iff \forall t \in J,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple. La suite de fonctions $(f_n)_n$ où

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n \end{array}$$

converge simplement vers :

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$



Nous avons étudié dans un précédent chapitre la convergence de suites et séries de fonctions, et les propriétés conservées par passage à la limite (visiblement, sur cet exemple, la continuité n'est pas en général conservée).

Qu'en est-il de la conservation de l'intégrabilité par passage à la limite ? Si une suite $(f_n)_n$ de fonction continues par morceaux et intégrables converge vers une fonction f continue par morceaux, sa limite f est-elle aussi intégrable ?

En général la réponse est non, comme le montre l'exemple suivant :

Exemples.

• Cas où l'intégrabilité n'est pas conservée à la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} f_n :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} \end{array}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n$ converge, comme intégrale de référence (Riemann en 0^+). Et la suite (f_n) converge simplement vers $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ d'expression $f(t) = \frac{1}{t}$; et $\int_0^1 f$ diverge.

• Cas où l'intégrabilité est conservée à la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} g_n :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{(\sqrt{t})^{1-\frac{1}{n}}} \end{array}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 g_n$ converge, comme intégrale de référence (Riemann en 0^+). Et la suite (g_n) converge simplement vers $g :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ d'expression $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; et $\int_0^1 g$ converge. De plus :

$$\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}}\mathrm{d}t = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)} \right]_a^1 = \frac{2n}{n+1}$$

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{t}\right]_a^1 = 2$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$$

Le même résultat survient sur l'exemple ci-dessus de la suite des $f_n(t) = t^n$ sur le segment $[0,1]$.

Théorème de convergence dominée

Le résultat essentiel quant à la conservation de l'intégrabilité pour la limite d'une suite de fonctions est le théorème de convergence dominée. C'est un résultat fondamental de la théorie de l'intégration de Lebesgue (qui généralise celle de Riemann), et nous serons contraint de l'admettre. Il donne aussi la convergence de la suite numérique $\left(\int_J f_n\right)_n$ par interversion des symbôles lim, $\int$.

Théorème

Soit J un intervalle non-vide et non réduit à un point. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$, convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$. S'il existe φ une fonction de $\mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{R})$, intégrable sur J, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur J, f est intégrable sur J et :

$$\int_J f = \int_J \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_J f_n$$

Démonstration. (Non exigible. Admis pour l'essentiel.)

Remarquons que l'intégrabilité des f_n découle immédiatement des hypothèses de continuité par morceaux et de domination : par comparaison avec la fonction φ intégrable sur J, pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur J.

Par passage à la limite ($n \to +\infty$) dans l'inégalité de domination, pour tout $t \in J$, $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$, et donc l'intégrabilité de f sur J en découle par le même argument.

Ce qu'il reste à montrer c'est l'interversion des symboles $\lim_{n\to+\infty}$ et $\int_J$, c'est-à-dire : $\int_J \lim f_n = \lim \int_J f_n$. Nous l'admettrons. ■

Remarques.

• Bien sûr φ sera positive et continue par morceaux (car intégrable).

• C'est l'hypothèse de domination qui est la plus importante ; les trois autres (convergence simple de (f_n) vers f, continuité par morceaux des f_n et de f) sont naturelles pour que l'énoncé ait un sens.

• Attention à bien vérifier que la limite f soit continue par morceaux ; en effet il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction f qui n'est pas continue par morceaux.

Exemples.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+nt)(1+t^2)}$. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{(1+nt)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$; pour tout $t > 0$, $(1+nt) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$; ainsi la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

qui est continue par morceaux.

– Hypothèse de domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $(1+nt) \geq 1$, on a : $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$; or la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par comparaison avec une intégrale de Riemann en $+\infty$ et par continuité en 0.).

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable, ainsi que sa limite f, et :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

- Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}$. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rccl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t^2}{n}} \times f(t) \end{array}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et $(f_n)_n$ converge simplement vers l'application continue f, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{t^2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

Hypothèse de domination : puisque $0 \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$0 \leqslant f_n \leqslant f$ avec $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{n}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque. Pour l'application du théorème de convergence dominée, l'hypothèse de domination :

$$\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$$

est cruciale. Vérifions-le sur un exemple.

Exemple. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^2 t^{n-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0,1[$ car elle se prolonge par continuité en 1 (faussement impropre). Par croissance comparée, pour tout $t \in [0,1[$, $f_n(t) = n^2 t^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$, appelons-la f ; bien sur $\int_0^1 f = 0$.

$$\int_0^1 n^2 t^{n-1} \mathrm{d}t = \left[nt^n\right]_0^1 = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$$

On vérifie toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée, hormis la domination. On constate que la conclusion du théorème est mise en défaut.

Exercice. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(t^n)\mathrm{d}t$.

Résolution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \longmapsto \cos(t^n)$ est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1[$, $t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par continuité de cos, $\cos(t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(1^n) = \cos(1)$.
Ainsi la suite des fonctions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \cos(t^n)$ converge simplement vers :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ \cos(1) & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

qui est continue par morceaux.

Hypothèse de domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$: $|f_n(t)| \leq 1$ qui est intégrable sur $[0,1]$.

On applique le théorème de converge dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \cos(t^n)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exemple : Intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t^2 \leqslant n \\ 0 & \text{si } t^2 > n \end{cases} \end{array}$$

C'est une application continue sur $\mathbb{R}$.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Soit $n_0 = \lfloor t^2 \rfloor + 1$, pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2}$$

et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : t \to e^{-n^2}$.

Puisque pour tout $t \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$, on a donc pour tout $t \in \left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right[$,

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leqslant e^{-t^2} = f(t)$$

tandis que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right[$, $f_n(t) = 0 \leqslant f(t)$.

Par ailleurs $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $e^{-t^2} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc réalisées ; on a :

– une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues (par morceaux),

– convergeant simplement vers une fonction f continue (par morceaux),

– pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| \leqslant f(t)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Calculons $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Avec le changement de variables $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ on a $\mathrm{I}_n = \sqrt{n}\ \mathrm{J}_n$ où $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x$. On calcule $\mathrm{J}_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 1$ par l'IPP : $\left| \begin{array}{ll} u = (1-x^2)^n & u' = -2nx(1-x^2)^{n-1} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right.$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n &= \left[x\left(1-x^2\right)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2nx^2\left(1-x^2\right)^{n-1} x\ \mathrm{d}x = 2n\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^2\right)^{n-1} \\
&= 2n \times \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}\mathrm{d}x\right) \\
&= 2n\left(\ \mathrm{J}_{n-1} - \mathrm{J}_n\right)
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{J}_n = \dfrac{2n}{2n+1}\ \mathrm{J}_{n-1}$, et $\mathrm{I}_n = 2\sqrt{n}\dfrac{2.4\cdots 2n}{3.5\cdots(2n+1)} = 2\sqrt{n}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

On en déduit avec la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &\underset{\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\frac{2^{2n}n^{2n}2\pi n e^{-2n}}{(2n+1)(2n+1)^{2n}e^{-2n-1}\sqrt{2(2n+1)\pi}} \\
&= 2\sqrt{n} \times \frac{2^{2n}n^{2n}}{2^{2n}n^{2n}(1+\frac{1}{2n})^{2n}} \times \frac{2n\pi e}{(2n+1)\sqrt{2(2n+1)\pi}} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{e\sqrt{\pi}}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi} \qquad \text{puisque } \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \sqrt{\pi}$. On a ainsi montré :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} \qquad \textit{(Intégrale de Gauss).}}$$

Remarque. Cas d'un intervalle J de longueur finie (par exemple un segment).

On a en particulier le résultat suivant :

Soit $(f_n : J \longrightarrow \mathbb{K})$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I borné convergeant simplement vers une fonction f elle-même continue par morceaux.

Si les f_n sont uniformément bornées (i.e. $\exists \mathrm{M} \geqslant 0, \forall n, |f_n| \leqslant \mathrm{M}$) (hypothèse de domination) alors :

$$\int_a^b f = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n$$

(En effet toute fonction constante est intégrable sur J).

Dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, l'intervalle d'intégration est fixe. Lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n, on peut parfois contourner cette restriction, comme le montre l'exemple en exercice qui suit.

Exercice. On pose pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} \mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{1}_{[0,n]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n]$ et l'on considère :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} \times \mathbb{1}_{[0,n]}(t) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 2$. (On pourra utiliser $\forall x > -1 \implies \ln(1 + x) \leqslant x$).

Résolution.

(1) La fonction f_n est identiquement nulle sur $]n, +\infty[$ et continue sur $[0, n]$; ainsi f_n et bien continue par morceaux.

De plus $\int_n^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} 0 \, \mathrm{d}t = 0$ converge, donc $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^n |f_n|$ converge et $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} \mathrm{d}t = I_n$.

(2) On applique le théorème de convergence dominée.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux.

– Soit $t > 0$:

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$$

d'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque, en notant $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$, pour tout $n \geq n_0$:

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} e^{-t/2} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et donc la suite (f_n) converge simplement vers :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-t/2} \end{array}$$

qui est continue par morceaux.

– Hypothèse de domination :
Pout tout $t \in [0,n]$, en appliquant $\ln(1+x) \leqslant x$, alors par croissance de exp :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \times \left(-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant e^{-t}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\left\{\begin{array}{l} t \in [0,n] \Longrightarrow 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} \leq e^{-t}e^{t/2} = e^{-t/2} \\ t \in]n,+\infty[\Longrightarrow f_n(t) = 0 \Longrightarrow 0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t/2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \ |f_n(t)| \leqslant e^{-t/2}$$

Or $t \longmapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On vérifie donc les hypothèses du théorème de convergence dominée, et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-t/2} = 2$$

Séries de fonctions

Définition

- *Une* <u>*série de fonctions*</u> $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *sur un intervalle* J*, est définie par la donnée pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *d'une application* $f_n : J \longrightarrow \mathbb{K}$*, appelé son terme général ; autrement dit c'est une série à valeurs dans* $\mathbb{K}^J$*.*
- *La suite de ses sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, est la suite des fonctions :*

$$\begin{array}{rccl} S_n : & J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n(t) \end{array}$$

- *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ *si la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f*, c'est-à-dire si :*

$$\forall t \in J,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

(en tout $t \in J$*, la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ *converge vers le scalaire* $f(t)$*.)*

Exemple. Sur l'intervalle $]-1,1[$, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} t^n$ converge vers la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1-t} \end{array}$$

puisque pour tout $t \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum_{k\in\mathbb{N}} t^n$ converge vers le réel $\dfrac{1}{1-t}$.

Théorème d'intégration terme à terme

Théorème

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *une série de fonctions de* $\mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$*, convergeant simplement vers* $f \in \mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$*, telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ *est intégrable sur* J*.*

Si la série numérique à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_J |f_n|$ *est convergente, alors* f *est intégrable sur* J*.*

Dans ce cas, on a :

$$\int_J f = \int_J \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n$$

Démonstration. Admis. ∎

Exemple. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll}]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{1}{t^{n^2+1}} \end{array} \right.$$

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n : t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{t^{n^2+1}}$.

Fixons $t > 1$. Comme :

$$\frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \frac{t^{n^2+1}}{t^{(n+1)^2+1}} = \frac{t^{n^2+1}}{t^{n^2+2n+2}} = \frac{1}{t^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on déduit (critère de d'Alembert) que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(t)$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
Notons f sa somme $\forall x > 1, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n^2+1}}$. On montre aisément la convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ donc f est continue sur $]1, +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est positive, intégrable sur $]1, +\infty[$ de somme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n^2+1}} = \left[-\frac{1}{n^2 \times t^{n^2}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Enfin, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_1^{+\infty} |f_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente $\left(\text{vers } \frac{\pi^2}{6}\right)$.

On en déduit du théorème d'intégration terme à terme que f est intégrable sur $]1,+\infty[$ et que :

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque. Attention, l'hypothèse que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n|$ converge est essentielle et la seule convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n$, même absolue, ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^{2n+1}$.

Chaque fonction f_n est intégrable sur $]-1,1[$ (car faussement impropre en ± 1) et :

$$\int_{-1}^{1} f_n = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Pour tout $t \in]-1,1[$ la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^{2n+1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t \times \left(t^2\right)^n$ est géométrique de raison $t^2 < 1$ et donc convergente de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n+1} = \frac{t}{1-t^2}$$

Ainsi la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement vers l'application continue :

$$\begin{array}{rccc} f : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{t}{1-t^2} \end{array}$$

Or la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{-1}^{1} f_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 0$ converge (absolument), avec somme nulle, tandis que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n : t \longmapsto \dfrac{t}{1-t^2}$ n'est pas intégrable sur $]-1,1[$ puisque une primitive $t \longmapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)$ n'a pas de limite finie en 1.

Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique donc pas. En effet :

$$\int_{-1}^{1} |f_n| = 2 \times \int_0^1 f_n = 2 \times \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-1}^{1} |f_n| \text{ diverge.}$$

Exercice. Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^2}{e^t - 1} \end{array}$$

1. Montrer que : $\forall t > 0, \ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}$.
2. Montrer que : $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Résolution.

(1) Soit $t > 0$ fixé ; la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} t^2 e^{-nt} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} t^2 \left(e^{-t}\right)^n$ est une série géométrique de raison e^{-t}, convergente puisque pour $t > 0$, $0 < e^{-t} < e^0 = 1$.

Sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} = t^2 e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{t^2}{e^t - 1} = f(t)$$

(2) On applique le théorème d'intégration terme à terme :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \longmapsto t^2 e^{-nt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $t^2 e^{-nt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

– Calculons $\int_0^{+\infty} \left|t^2 e^{-nt}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} \mathrm{d}t$: en procédant à deux intégrations par parties :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} \mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2 e^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t \quad \left| \begin{array}{ll} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v(t) = -\frac{e^{-nt}}{n} & v'(t) = e^{-nt} \end{array} \right.$$

puisque le crochet converge

$$= \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{n}\left[-\frac{te^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\mathrm{d}t \quad \left| \begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{e^{-nt}}{n} & v'(t) = e^{-nt} \end{array} \right.$$

puisque le crochet converge

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} \mathrm{d}t = \frac{2}{n^2} \left[-\frac{e^{-nt}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{n^3}$$

Ainsi, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} \left| t^2 e^{-nt} \right| \mathrm{d}t = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{n^3}$ converge par comparaison avec une série de Riemann, et donc d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Méthode. Lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas, ou difficilement, on peut parfois conclure en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonction.

C'est ce qu'illustre l'exercice suivant :

Exercice.

1. Montrer que :
$$\forall t > 0,\ \frac{\cos(t)}{e^t + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} \cos(t)$$

Dans la suite on posera pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = (-1)^{n-1} e^{-nt} \cos(t)$.

2. Justifier de la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ (on pourra se ramener à une intégrale à valeurs complexes).
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} |f_n|$? Le théorème d'intégration terme à terme s'applique-t-il à la série $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$?
4. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_N)_{N \geq 1}$ où $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n$ est la somme partielle d'ordre N de la série, montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t + 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Résolution.

(1) Soit $t > 0$ fixé ; la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} e^{-nt} \cos(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\cos(t) \left(-e^{-t}\right)^n$$

est géométrique de raison de module $|-e^{-t}| = e^{-t} < 1$.

Elle est donc convergente, de somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} \cos(t) = \cos(t) e^{-t} \times \frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{\cos(t)}{e^t + 1}$$

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée et bornitude de cos. Ainsi f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc l'intégrale converge.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n &= (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-nt} \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= (-1)^{n-1} Re\left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-nt} \mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-nt} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{it}e^{-nt}}{(i-n)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-i} = \frac{n+i}{n^2+1}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f_n = (-1)^{n-1} Re\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right) = (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$$

(3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n| \geqslant \left| \int_0^{+\infty} f_n \right| = \frac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ diverge. Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas.

(4) Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée.

– Pour tout $n \geq 1$ La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc comme somme finie, $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

– D'après (1) la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{e^t + 1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Hypothèse de domination : soit $t > 0$

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} -\cos(t)\left(-e^{-t}\right)^n = \cos(t)e^{-t}\frac{1-\left(-e^{-t}\right)^N}{1+e^{-t}}$$

$$= \cos(t)\frac{e^{-t} - \left(-e^{-t}\right)^{N+1}}{1+e^{-t}}$$

$$\Longrightarrow |S_N(t)| \leq \left|e^{-t} - \left(-e^{-t}\right)^{N+1}\right| \leqslant e^{-t} + e^{-(N+1)t} \leqslant 2e^{-t}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Or $t \longmapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t+1}\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$$

Intégrales dépendant d'un paramètre réel

Motivation : On rencontre des intégrales à paramètres dans des notions importantes d'Analyse fonctionnelle (fréquemment développées en formation ingénieur), dont on rencontre déjà des applications en Physique et en Sciences Industrielles :

- **La transformée de Laplace**

$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \text{ où } f \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}^+$$

  qui sert dans la résolution d'équations différentielles (les transformées de Laplace sont souvent des fractions rationnelles).

- **La transformée de Fourier**

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \text{ où } f \text{ est une fonction intégrable sur } \mathbb{R}$$

  fondamentale en théorie du signal (passage du domaine temporel au domaine fréquentiel)

Ces transformations associent à une application une autre application ; elles sont linéaires (par linéarité de l'intégrale) et possèdent des transformées inverses ; elles réalisent donc des bijections entre certains sous-ensembles de fonctions. Elles ont beaucoup d'applications en (Maths, Physiques et) Sciences de l'ingénieur et il faut commencer à se familiariser avec leurs propriétés les plus élémentaires.

- **Formalisation.**

On se donne une fonction $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$, à deux variables réelles et valeurs réelle, définie sur le produit cartésien de deux intervalles $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ et on cherche à définir l'application intégrale à paramètre x :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Cela nécessite dans le cadre de notre programme qu'à $x \in I$ fixé, la fonction d'une variable $t \mapsto f(x, t)$ soit continue par morceaux sur J.

Si J est un segment, alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie sur I mais si J est un intervalle quelconque, il faut établir la convergence de l'intégrale impropre pour chaque $x \in I$.

Exercice. Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $[0,+\infty[$ en déterminant une fonction $t \longmapsto \varphi(t)$ intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\right| \leqslant \varphi(t).$$

Résolution.

Soit $x \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

qui est intégrale sur $]0,+\infty[$, par comparaison avec des intégrales de Riemann, puisque $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

On a établi l'existence grâce à une domination par une fonction intégrable ne dépendant pas du paramètre x.

Pour de telles fonctions bien définies, on peut ensuite étudier leur régularité grâce aux résultats que l'on va établir.

(Leur démonstration est non exigible).

Extension du théorème de convergence dominée

On peut étendre le théorème de convergence dominée à une limite dépendant d'un paramètre continue : Au lieu d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers une fonction f, on considère :

– une application $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$, a une borne de l'intervalle I, et une application $\ell : J \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall t \in J,\ \ f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$$

sous les conditions naturelles et sous l'hypothèse de domination :

$$\exists \varphi \in L^1(J,\mathbb{R}),\ \ \forall (x,t) \in I \times J,\ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

on pourra encore intervertir les symboles $\int$ et lim :

$$\lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to a} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \ell(t)\mathrm{d}t$$

Ce théorème découle facilement du théorème de convergence dominée et de la caractérisation séquentielle des limites ; il n'en est qu'un corollaire pour un paramètre continue. Il s'avère utile pour déterminer les limites aux bornes d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Théorème

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. Soient a une borne de I et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell : J \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications telles que :

$$\forall t \in J,\ \lim_{x \to a} f(x,t) = \ell(t)$$

Alors si :

– pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ et continue par morceaux sur J,

– la fonction $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur J,

– Hypothèse de domination :

$$\exists \varphi \in L^1(J,\mathbb{R}),\ \forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors ℓ est intégrable sur J, pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et :

$$\int_J \ell(t)\mathrm{d}t = \int_J \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tout $x \in I$, la continuité par morceaux de $t \longmapsto f(x,t)$ et l'hypothèse de domination, entraîne, par comparaison, l'intégrabilité sur J de $t \longmapsto f(x,t)$.

Soit $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque à valeur dans I convergeant vers a. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in J$, $f_n(t) = f(x_n,t)$. Alors par hypothèse la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers ℓ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \longrightarrow f(x_n,t)$ est continue par morceaux sur J,

– $\ell : t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur J,

– hypothèse de domination :

$$\exists \varphi \in L^1(J,\mathbb{R}),\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J,\ \ |f_n(t)| = |f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Ainsi ℓ est intégrable sur J et pour toute suite $(x_n)_n$ tendant vers a :

$$\int_j \ell = \int_J \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_J \left(\lim_{n\to+\infty} f(x_n,t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_J f(x_n,t)\mathrm{d}t$$

D'après la caractérisation séquentielle des limites :

$$\int_j \ell = \int_J \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (continue par morceaux et) intégrable sur $\mathbb{R}$; définissons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-x^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-x^2}$ est continue par morceaux, et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(t)e^{-x^2}\right| \leqslant |f(t)|$$

Or $t \longmapsto |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

Soit $a = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)e^{-x^2} = 0$; le théorème de convergence dominée à paramètre continue nous permet d'en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(t)e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice. Pour l'application

$$g: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\mathrm{d}t \end{array}$$

définie à l'exercice précédent, quels sont les limites aux bornes ?

Résolution.

Soit $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}$; on vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continue (grâce à l'hypothèse de domination établie à l'exercice 5).

– lorsque $x \to +\infty$, $f(x,t) \longrightarrow 0$. D'après le théorème :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

– lorsque $x \to 0^+$, $f(x,t) \longrightarrow \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, et d'après le même théorème :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

(autrement dit la fonction g est continue en 0). Il reste à calculer cette intégrale ; par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, bijection $\mathscr{C}^1$ $\nearrow$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

(puisqu'on reconnait l'intégrale de Gauss par parité, cf. 1.1 pour le calcul).

Théorème de continuité sous le symbole $\int$

Ce théorème assure de la définition et de la continuité d'une intégrale à paramètre sous certaines hypothèses, dont la plus importante est une hypothèse de domination.

Théorème

Soient I et J deux intervalle de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point et :

$$f : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

On suppose que :

- *pour tout $x \in I$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J (pour pouvoir intégrer),*
- *pour tout $t \in J$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I (hypothèse naturelle)*
- *il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur J telle que :*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors, la fonction :

$$g : x \longmapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur I.

Démonstration. (Non exigible.) Pour $x \in I$ quelconque fixé, l'existence de $g(x)$ découle de la continuité par morceaux de $t \longmapsto f(x,t)$ sur J et surtout de l'hypothèse de domination : $\forall t \in J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$; en effet, d'après le théorème de comparaison, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur J. Ainsi g est bien définie en x, et par suite en tout point $x \in I$.

Pour établir la continuité, on va appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre réel. Soit $a \in I$ quelconque ; pour $t \in J$ fixé, $x \longmapsto f(x,t)$ étant continue, $\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = f(a,t)$.

Pour tout $t \in J$, posons $\ell(t) = f(a,t)$ et $I^- = I \cap]-\infty, a]$, $I^+ = I \cap [a, +\infty[$. On applique le théorème sur I^- ainsi que sur I^+.

– pour tout $x \in I^-$ (resp. I^+), $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

– en particulier $t \longmapsto \ell(t) = f(a,t)$ est continue par morceaux sur J,

– il existe $\varphi \in L^1(J, \mathbb{R})$ tel que $\forall (x,t) \in I^\pm \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Ainsi :

$$\lim_{x\to a^-} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J f(a,t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

ou autrement dit $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = g(a) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$; la fonction g est donc continue à gauche et à droite en a (d'un seul côté lorsque a est une borne de I), elle est donc continue en a. Puisque c'est vrai pour tout $a \in I$, g est continue sur I. ■

Remarques.

• L'hypothèse de domination est l'hypothèse la plus importante ; les autres sont faciles à retenir car « naturelles ».

• Bien sûr la fonction φ est continue par morceaux (car intégrable) et positive.

Exemple. Montrons que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On applique le théorème de continuité sous le symbole $\int$.

– Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue.

– Hypothèse de domination : Pour tous $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$; φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalent en $+\infty$ à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ (Riemann).

Ainsi la fonction est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$; montrer que sa transformée de Fourier $x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Résolution.

On applique le théorème de continuité sous le symbole $\int$.

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ est continue par morceaux (comme produit de fonctions continues par morceaux, puisque f est intégrable).

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue.

– Hypothèse de domination :

pour tous $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)e^{-ixt}| \leqslant |f(t)|$; or par hypothèse $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi d'après le théorème de continuité sous le symbole $\int$, la fonction $x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Attention, l'hypothèse de domination est cruciale comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1]$: $f(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Les deux première hypothèses du théorème de continuité sont vérifiées :

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

– Pour tout $t \in]0,1]$, $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soient $x \neq 0$; l'intégrale converge (faussement impropre en 0) et :

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{Arctan}\,(t/x)\Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1/x)$$

Pour $x = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$

Ainsi la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{est définie, et } g(x) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

mais n'est pas continue puisque :

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to 0^+} g(x).$$

Le théorème peut se renforcer en affaiblissant l'hypothèse de domination. En effet la continuité étant une propriété locale, la domination n'est requise que sur chaque segment inclus dans I ; on obtient le corollaire suivant.

Corollaire

(Adaptation du théorème de continuité)

Soient I et J deux intervalle de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point et :

$$f: \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

On suppose que :

- *pour tout $x \in I$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J (pour pouvoir intégrer),*
- *pour tout $t \in J$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I (hypothèse naturelle)*

– *pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{ab} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur J telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{ab}(t) \quad \textit{(domination locale).}$$

Alors, la fonction :

$$x \longmapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur I.

Remarque. La seule différence dans l'énoncé réside dans l'hypothèse de domination qui est encadrée.

Démonstration. D'après le théorème de continuité sous le symbole $\int$, la fonction est bien définie et continue sur tout segment inclus dans I, et donc sur tout I. ■

Théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ sous le symbole $\int$

Théorème

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, et soit f une fonction définie sur $I \times J$. On suppose que :

- *Pour tout $x \in I$ fixé, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur J (pour pouvoir intégrer).*
- *Pour tout $t \in J$ fixé, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (hypothèse naturelle).*

  (La dérivée en x de cette fonction est la première dérivée partielle de f en (x,t), notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. On définit ainsi une fonction à deux variables $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.)
- *Pour tout $x \in I$ fixé, $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (pour pouvoir intégrer).*
- *Il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur J telle que :*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination)}$$

Alors, la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. (Non exigible.) La première hypothèse nous assure que la fonction g est bien définie sur I. Montrons d'abord qu'elle est dérivable.

Fixons $x_0 \in I$ et considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,t) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

Appliquons-lui le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

– Pour tout $x \in I$ la fonction $t \longmapsto f_1(x,t)$ est continue par morceaux : lorsque $x \neq x_0$ car $t \longmapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$ (d'après la première hypothèse), et lorsque $x = x_0$ car $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \in \mathscr{C}_{pm}(J,\mathbb{K})$ d'après la troisième hypothèse.

– Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f_1(x,t)$ est continue en tout $x \in I$, d'après la deuxième hypothèse lorsque $x \neq x_0$, et par définition de la dérivation lorsque $x = x_0$.

– Hypothèse de domination. Soit $\varphi \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ donnée par la quatrième hypothèse.
En particulier pour tout $t \in J$, $|f_1(x_0, t)| \leq \varphi(t)$.

Pour étendre la domination sur $I \times J$, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ appliquons l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[x_0, x]$ (lorsque $x > x_0$) ou $[x, x_0]$ (sinon). On obtient :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ \forall t \in J,\ |f_1(x,t)| = \left|\frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\right| \leqslant \varphi(t)$$

Ainsi on obtient l'hypothèse de domination pour f_1 :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ |f_1(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Le théorème de continuité sous le symbole $\int$, nous permet donc de conclure que $x \longmapsto \int_0^1 f_1(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur I. En particulier sa continuité ainsi que la continuité de $x \longmapsto f_1(x,t)$ donnent :

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^1 f_1(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x \to x_0} f_1(x,t)\mathrm{d}t = \int_J f_1(x_0,t)\mathrm{d}t$$

et donc par linéarité de l'intégrale :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \int_J \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\mathrm{d}t = \lim_{x \to x_0} \int_J f_1(x,t) = \int_J f_1(x_0,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t$$

Ainsi g est dérivable en x_0 ; puisque x_0 a été choisi quelconque dans I, la fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Pour terminer il reste à prouver que $g' : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue. Pour cela on applique encore le théorème de continuité sous le symbole $\int$, mais à la fonction $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$:

– Pour tout $x \in I$ fixé, $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (d'après l'hypothèse 3).

– Pour tout $t \in J$ fixé, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et continue sur I (d'après l'hypothèse 2).

– L'hypothèse de domination est donnée par l'hypothèse 4.

Ainsi $g' : x \longmapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est continue. ∎

Exemple. Montrons que $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3}\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le théorème de dérivation sous le symbole $\int$:

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,t) = \frac{e^{ixt}}{1+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $|f(x,t)| = \dfrac{1}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I en tant que composée et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{ite^{ixt}}{1+t^3}.$$

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{ite^{ixt}}{1+t^3}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

– Hypothèse de domination :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^3}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et $\dfrac{t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ (Intégrale de Riemann).

Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Puisque dérivabilté et continuité sont des notions locales, encore une fois l'hypothèse de domination (globale) peut être affaiblie en une hypothèse de domination locale :

– *Pour tout segment* $[a, b] \subset I$, *il existe une fonction* $\varphi_{ab} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable sur* J *telle que :*

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \varphi_{ab}(t) \quad \textit{(domination locale)}$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que sa transformée de Laplace :

$$\mathscr{L}(f) : x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

Résolution.

Appliquons le théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ sous le symbole $\int$.

Soit $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, |f(t)| \leqslant M$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\left|f(t)e^{-xt}\right| \leqslant Me^{-xt}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, $x \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est dérivable, de dérivée $x \longmapsto -tf(t)e^{-xt}$ continue ; elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $t \longmapsto -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Hypothèse de domination : soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+$,

$$|-tf(t)e^{-xt}| \leqslant Mte^{-at}$$

or puisque $a > 0$, par croissance comparée $t^2 Mte^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $Mte^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On a vérifié toutes les hypothèses du théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ sous le symbole $\int$, ainsi $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\frac{d}{dx}\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(f(t)e^{-xt}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

Insistons sur l'importance de l'hypothèse de domination, qui consiste à majorer en valeur absolue l'intégrande indépendamment du paramètre x (au moins localement) par une fonction intégrable en t.

Extension à la régularité $\mathscr{C}^n$

Le théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ sous le symbole $\int$ se généralise aux classes $\mathscr{C}^n$.

Théorème

Soit $n \geqslant 1$; soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point et f une fonction définie sur $I \times J$. On suppose que :

- *Pour tout $t \in J$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (hypothèse naturelle).*
- *Pour tout $x \in I$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixés, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur J (pour pouvoir intégrer).*
- *Pour tout $x \in I$ fixé, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (pour pouvoir intégrer).*

- *Il existe une fonction* $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable sur* J *telles que :*

$$\forall\,(x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination)}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I *et pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\forall x \in I,\ \ g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. (Non exigible.) Démonstration par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$ c'est le théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ sous le symbole $\int$.
- Soit $n \geq 2$; supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et prouvons le au rang n.

Considérons la fonction $\varphi \in L^1(J, \mathbb{R})$ donnée par l'hypothèse de domination :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Par l'hypothèse 1, pour tout $t \in J$ fixé, $x \longmapsto \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur un segment $[a,b] \subset I$ quelconque :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in J, \quad \left| \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t) - \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(a,t) \right| \leqslant (x-a)\varphi(t) \leqslant (b-a)\varphi(t)$$

et d'après l'inégalité triangulaire (partie minoration) :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in J, \quad \left| \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t) \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(a,t) \right| + (b-a)\varphi(t) = \psi(t)$$

Or d'après les hypothèses 2 et 4, ψ est intégrable sur J. Par hypothèse de récurrence g est donc de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur tout segment $[a,b] \subset I$ et donc sur I, et de plus :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \forall x \in I, \ g^{(k)} = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \mathrm{d}t$$

En particulier :

$$\forall x \in I,\ g^{(n-1)} = \int_J \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t)\mathrm{d}t$$

Appliquons maintenant le théorème de dérivation à cette intégrale :

- Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t)$ est intégrable sur J (hypothèse 2).
- Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (hypothèse 1).
- Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^{n} f}{\partial x^{n}}(x,t)$ est continue par morceaux J (hypothèse 3).
- On a l'hypothèse de domination : il existe $\varphi \in L^1(J,\mathbb{R})$, tel que :

$$\forall\, (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial^{n} f}{\partial x^{n}}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse 4)

On en déduit que $g^{(n-1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $g^{(n)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^{n} f}{\partial x^{n}}(x,t)\mathrm{d}t$. Ainsi g et de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^{k} f}{\partial x^{k}}(x,t)\mathrm{d}t$$

■

Remarque. Encore une fois l'hypothèse de domination (globale) peut être affaiblie en une hypothèse de domination locale :

– *Pour tout segment* $[a, b] \subset I$, *il existe une fonction* $\varphi_{ab} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable sur* J *telle que :*

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\right| \leqslant \varphi_{ab}(t) \quad \textit{(domination locale)}$$

Remarque. L'hypothèse importante est l'hypothèse de domination, au moins localement indépendante de x, (les autres hypothèses ne servent qu'à définir les intégrales).

Remarque. Souvent l'hypothèse d'intégrabilité pour tout $x \in I$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ de $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ s'obtient elle-même par une hypothèse de domination. Les hypothèses à vérifier sont alors :

- Pour tout $t \in J$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (hypothèse naturelle).
- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in I$ fixés, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (pour pouvoir intégrer).
- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe une fonction $\varphi_k : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur J telles que :

$$\forall\,(x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t) \quad \text{(hypothèses de domination)}$$

et bien sûr les hypothèses de domination peuvent aussi être locales :

– Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et tout $[a, b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{ab,k} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur J telles que :

$$\forall\,(x,t) \in [a,b]\times J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{ab,k}(t) \quad \text{(dominations locales)}$$

Exemple. La fonction Gamma.

On rappelle (cf. Chapitre : intégrales généralisées) que pour tout $x > 0$ on définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

qui « étend » factorielle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$; plus correctement :

$$\forall x > 0, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!.$$

Montrons que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ de dérivées successives pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Puis donnons l'allure de la courbe de la fonction Γ.

On définit :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, t) & \longmapsto & t^{x-1} e^{-t} \end{array}$$

– Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln^k(t) f(x,t)$$

(en effet, $(a^x)' = \ln(a)a^x$).

– Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux (pour pouvoir intégrer).

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est monotone : croissante lorsque $t \geq 1$ et décroissante lorsque $t \leqslant 1$.

Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*,\ |f(x,t)| \leqslant \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) e^{-t}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t}$$

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(t) = \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (hypothèses de domination) :

– Intégrabilité en 0 : puisque $0 < a < b$ il existe c tel que $0 < c < a < b$. Ainsi :

$$t^{1-c} \times \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} = \left(t^{a-c} + t^{b-c}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, puisque $a - c > 0$ et $b - c > 0$. Ainsi :

$$\left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} = \varphi_k(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-c}}\right)$$

et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est intégrable sur $[0, 1]$ par comparaison avec une intégrale de Riemann, puisque $1 - c < 1$.

– Intégrabilité en $+\infty$; pour $t \geqslant 1$:

$$t^2 \times \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} = \left(t^{a+1} + t^{b+1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} \leqslant \left(t^{a+k+1} + t^{b+k+1}\right) e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, puisque $t \geqslant 1 \implies 0 \leqslant \ln(t) \leqslant t \implies |\ln^k(t)| \leqslant t^k$. Ainsi :

$$\left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) |\ln^k(t)| e^{-t} = \varphi_k(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \ \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi_k(t) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$$

Les hypothèses de domination sont satisfaites à tout ordre (localement). Par une application répétée du théorème de dérivation $\mathscr{C}^n$ sous le symbole $\int$ (version locale), la fonction Γ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

- Étude et tracé de la fonction Gamma.

Remarquons d'abord que $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} > 0$ puisque $t \longmapsto \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t}$ est continue, positive et non nulle ; donc Γ' est strictement croissante.

De plus : $\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. La fonction Γ est donc strictement décroissante, puis strictement croissante et admet un minimum en $c \in]1,2[$.

D'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x)$ existe et puisque $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit par continuité de Γ que :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Exercice. (D'après Mines-Ponts).

Soit $f : t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$; montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

À l'aide d'une intégration par partie, calculer sa dérivée $\widehat{f}'$. En déduire la valeur de $\widehat{f}$.

Résolution.

On applique le théorème de dérivation $\mathscr{C}^n$ sous le symbole $\int$. Soit $F : (x,t) \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \times e^{-ixt}$ et $k \in \mathbb{N}$ fixé.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto F(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (-it)^k e^{-\frac{t^2}{2} - ixt}$$

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux.

– Hypothèses de domination.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2, \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^k e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_k(t)$$

et $t^2\varphi_k(t) = t^{k+2}e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée ; donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(t) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et ainsi $t \longmapsto \varphi_k(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Ainsi $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}-ixt}\mathrm{d}t$$

Calculons la dérivée première de $\widehat{f}$: $\widehat{f}'(x) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt}\mathrm{d}t$ par une intégration par partie sur $[-A, A]$.

$$i\int_{-A}^{+A} \underbrace{-te^{-\frac{t^2}{2}}}_{u'} \underbrace{e^{-ixt}}_{v} \mathrm{d}t = i\Big[e^{-\frac{t^2}{2}-ixt}\Big]_{-A}^{+A} - x\int_{-A}^{+A} e^{-\frac{t^2}{2}-ixt}\mathrm{d}t$$

$$= i \times \underbrace{e^{-\frac{A^2}{2}}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\left(e^{-ixA} - e^{ixA}\right)}_{\text{borné}} \underbrace{-x\int_{-A}^{+A} e^{-\frac{t^2}{2}-ixt}\mathrm{d}t}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(x)}$$

$$\Longrightarrow \widehat{f}'(x) = -x\widehat{f}(x) \Longrightarrow \widehat{f}(x) = K\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

avec :

$$K = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \underset{u=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi} \quad \text{(intégrale de Gauss)}$$

Ainsi :

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\cdot f(x).$$