Chapitre 4 : Intégrales généralisées

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Le but de ce chapitre est d'étendre la théorie de l'intégration sur un segment à un intervalle quelconque $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$ avec éventuellement a ou b infini.

Toutes les fonctions envisagées dans ce chapitre seront supposées continues par morceaux sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes.

On rencontre des intégrales sur un intervalle quelconque :

- en MÉCANIQUE. La période d'un pendule circulaire de longueur ℓ dépend de l'amplitude θ_0 $\left(0 < \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ suivant la formule :

$$\mathrm{T} = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Le but de ce chapitre est d'étendre la théorie de l'intégration sur un segment à un intervalle quelconque $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$ avec éventuellement a ou b infini.

Toutes les fonctions envisagées dans ce chapitre seront supposées continues par morceaux sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes.

On rencontre des intégrales sur un intervalle quelconque :

- en ÉLECTROSTATIQUE - dans des modèles théoriques. Le champ produit par une tige uniformément chargée en un point distant de $a > 0$ est donné par la formule :

$$\mathrm{E} = \frac{a\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2 + y^2)^3}}.$$

Le but de ce chapitre est d'étendre la théorie de l'intégration sur un segment à un intervalle quelconque $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$ avec éventuellement a ou b infini.

Toutes les fonctions envisagées dans ce chapitre seront supposées continues par morceaux sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes.

On rencontre des intégrales sur un intervalle quelconque :

- en SCIENCES INDUSTRIELLES. On applique une charge constante à un amortisseur pneumatique. Le temps de compression isotherme s'écrit à un facteur près :

$$\mathrm{I} = \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{\frac{h}{h - h_0}}\, \mathrm{d}h \text{ avec } h_1 > h_0$$

Intégrale impropre sur $[a, b[$

Définition

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes définie sur $[a, b[$. L'intégrale (dite impropre ou généralisée) $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente lorsque la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } b$$

On pose alors $\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ Une intégrale non convergente est appelée divergente.

Intégrale impropre sur $]a, b]$

Par symétrie, pour la borne de gauche.

Définition

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$; l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.

On pose alors $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f$

Intégrale impropre sur $]a,b[$

Pour finir, lorsque les deux bornes sont exclues.

Proposition-Définition

- *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *et* f *une fonction continue par morceaux sur* $]a,b[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente lorsqu'il existe* $c \in]a,b[$ *tel que les intégrales impropres* $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *soient convergentes. On pose alors :*
  $$\int_a^b f = \lim_{x\to a^+}\int_x^c f + \lim_{x\to b^-}\int_c^x f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
- *S'il existe un* $c \in]a,b[$ *telles que les intégrales sont convergentes alors ce sera également vrai pour n'importe quel autre* c *choisi dans* $]a,b[$ *et la valeur de* $\displaystyle\int_a^b f$ *est inchangée.*

Autrement dit, on peut découper indifféremment l'intervalle $]a,b[$; seul compte le comportement de la fonction f au voisinage des bornes a et b.

Démonstration. Soit en effet $c, c' \in]a,b[$ alors, par la relation de Chasles sur les intégrales sur un segment :
$\displaystyle\int_x^c f = \int_x^{c'} f + \int_{c'}^c f$ donc la convergence de $\left(\displaystyle\int_x^c f\right)$ équivaut à celle de $\left(\displaystyle\int_x^{c'} f\right)$ et on a $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f$, de même $\displaystyle\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$, d'où le résultat, puisque $\displaystyle\int_{c'}^c f = -\int_c^{c'} f$. ■

Remarque. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Intégrale divergente ; nature d'une intégrale

Définition

- *Dans chacun des cas contraires, l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est dite divergente.*
- *Déterminer la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.*

Remarque. C'est le comportement de f au voisinage de a et/ou de b qui est important pour déterminer la nature de l'intégrale car pour $a < c \leqslant c' < b$, l'intégrale sur le segment $[c, c']$, $\int_c^{c'} f$ est un scalaire bien défini.

Exercice. Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \; ; \; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \; ; \; \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \; ; \; \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}.$$

Résolution.

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^a = \mathrm{Arctan}(a) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_a^1 = -\ln(a) \xrightarrow[0^+]{} +\infty \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ diverge}$$

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \big[2\sqrt{t}\big]_a^1 \xrightarrow[0^+]{} 2 \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$$

$$\int_0^a \sin(t)\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^a = 1 - \cos(a) \text{ diverge quand } a \to +\infty$$

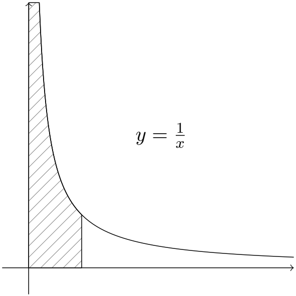
$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

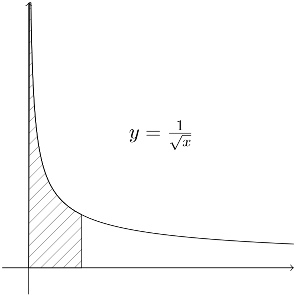
$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^a = 2 - 2\sqrt{1-a} \xrightarrow[1^-]{} 2 \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2$$

Exemple. L'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$ est :

– infinie pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

– finie pour $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.





Intégrale faussement impropre

Dans le cas d'une fonction prolongeable par continuité au niveau de la borne exclue, la convergence est facile à établir et relève de l'intégration sur un segment.

Théorème

Soit f continue sur $[a, b[$ avec b finie. On suppose que f peut être prolongée en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et coïncide avec $\int_{[a,b]} \tilde{f}$ (intégration sur un segment). On dit parfois que l'intégrale est faussement impropre en b.

Exemple. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Remarques.

- Bien sûr, on dispose du même résultat pour les intervalles $]a, b]$ avec $a > -\infty$.

• En conséquence, lorsque, par exemple, $f \in \mathscr{C}^0(]a,b],\mathbb{K})$, on peut considérer indifféremment l'intégrale de f sur]a, b] ou sur $]a,b[$, elles sont de même nature et de même valeur.

Corollaire

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f$$

Définition

(Extension de la définition)

Lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, on posera

$$\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(et on dira également que l'intégrale $\int^a f(t)\mathrm{d}t$ est convergente)

Intégrales de référence.

Exemples. Intégrales de référence.

- $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$ est convergente et $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t = -1$.

$$\int_a^1 \ln(t)\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_a^1 = -a\ln(a) + a - 1 \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

- Soit $\alpha > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$. (Intégrale de Riemann en 0).

En effet, soit $x \in]0,1]$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \Big[\ln(t)\Big]_x^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

Exemple type : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 = 2.$

Intégrales de référence

- En corollaire, soit $\alpha > 0$, et $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$:

$\displaystyle\int_a^{t_0} \frac{1}{(t-t_0)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$. (Intégrale de Riemann en une borne finie).

Il suffit d'effectuer le même calcul en procédant au changement de variable $t' = t - t_0$.

Exemple type : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^1 = 2.$

- Soit $\alpha > 0$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$. (Intégrale de Riemann en $+\infty$).

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \Big[\ln(t)\Big]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Exemple-type : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1.$

Intégrales de référence

- Soit $\alpha > 0$; $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

En effet :

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^x = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha x} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$$

Remarque. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge !

Relation de Chasles

On étend dans cette partie les propriétés des intégrales aux intégrales impropres. Dans toute cette partie a, b, c désignent des éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g des fonctions continues par morceaux.

La relation de Chasles s'étend immédiatement.

Propriété

Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$ *sont convergentes alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et :*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Démonstration. Lorsque $a \leqslant b \leqslant c$, il suffit d'appliquer la relation de Chasles sur un segment où f et g sont continues par morceaux, $[x, b]$ et $[b, y]$, puis de faire tendre $x \to a^{\pm}$ et $y \to c^{\mp}$ et de conclure par somme des limites. Dans les cas restants inverser les bornes en changeant l'intégrale en son opposé permet de se ramener à un cas analogue.

Linéarité

Propriété

Si $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b g$ *convergent alors pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b \lambda f + \mu g$ *converge et*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b f$ *converge et* $\int_a^b g$ *diverge, alors pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, $\int_a^b \lambda f + \mu g$ *diverge.*

Démonstration. Lorsque $a \leqslant b$, il suffit d'appliquer la linéarité sur un segment où f et g sont continues par morceaux, $[a, x]$ ou $[y, b]$ ou $[y, c]$ et $[c, x]$, puis de faire tendre $x \to b^-$ et $y \to a^+$ et de conclure par combinaison linéaire des limites. Dans le cas restant on procède de même après avoir inversé les bornes. ∎

Positivité

Propriété

Si f est à valeurs positives sur $]a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

Démonstration. Par positivité de l'intégrale sur un segment, sous ces hypothèses, pour tout segment $[x, y] \subset]a, b[$, $\int_x^y f \geqslant 0$. Par passage à la limite lorsque $x \to a$ et $y \to b$, on a alors $\int_a^b f \geqslant 0$. ∎

Croissance

Propriété

Si sur l'intervalle $]a, b[$, $f \leqslant g$ *et si* $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b g$ *convergent, alors* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Démonstration. Sous ces hypothèses $g - f \geqslant 0$ sur $]a, b[$; par linéarité $\int_a^b g - f$ converge et $\int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f \geqslant 0$ par positivité. ■

Dans le cas particulier d'une fonction continue (et non plus seulement continue par morceaux) :

Propriété

Soit f une application continue et positive sur un intervalle I, et telle que $\int_I f$ converge. Alors :

$$\int_I f = 0 \implies f = 0.$$

Démonstration. Elle est identique à celle dans le cas d'une intégrale sur un segment : on montre la contraposée. Si f n'est pas identiquement nulle, il existe $a \in I$ tel que $f(a) > 0$; mais par continuité f est alors minorée par $m > 0$ sur une voisinage $]a_0, a_1[$ de a dans I (avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $a_0 < a_1$). En appliquant la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale on obtient alors $\int_I f \geqslant \int_{a_0}^{a_1} f \geqslant m \times (a_1 - a_0) > 0$. ∎

Cas des fonctions à valeurs positives

Considérons le cas des fonctions à valeurs réelles positives. Dans cette partie toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Théorème

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux ; alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction croissante $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

Démonstration. L'application f étant positive, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est croissante ; d'après le théorème de la limite monotone $\lim_{x\to b^-} \displaystyle\int_a^x f$ existe, et elle est finie (c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f$ converge) ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. ∎

Théorème de comparaison pour les fonctions positives I

Théorème

Soient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $I = [a, b[$ *et* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions continues par morceaux telles que :* $f \leqslant g$.

Alors :

- *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_a^b f$ *est convergente, et de plus* $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- *Si* $\displaystyle\int_a^b f$ *est divergente alors* $\displaystyle\int_a^b g$ *est divergente.*

Démonstration. Pour la première implication : par croissance de l'intégrale (sur un segment), pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f \leqslant \int_a^x g$; si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, d'après le théorème 8, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x g$ est majorée, donc $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ aussi et $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Quant à la deuxième implication, c'est la contraposée de la première. ■

Exercice. Déterminer la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Résolution.

• La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$; il faut étudier la convergence de son intégrale au voisinage des deux bornes 0 et $+\infty$.

– En 0 : $\dfrac{\sin^2 t}{t^2} \underset{0}{\sim} 1$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0 et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

– En $+\infty$: $\dfrac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, ainsi par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

– En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{2-\cos t}{t}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus $\dfrac{2-\cos t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$; or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi.

Théorème de comparaison pour les fonctions positives II

Le théorème 9 se généralise aux relation de comparaisons $f = o(g)$, $f = O(g)$, $f \sim g$:

Théorème

Soient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux.

- *Si (au choix) :*

$$f \underset{b^-}{=} O(g) \quad ou \quad f \underset{b^-}{=} o(g)$$

  alors :

  - *si $\int_a^b g$ est convergente alors $\int_a^b f$ est convergente ;*
  - *si $\int_a^b f$ est divergente alors $\int_a^b g$ est divergente.*

- *Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\int_a^b g$ est convergente (i.e. les intégrales sont de même nature).*

Démonstration. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et $g \underset{b^-}{=} O(f)$; aussi le deuxième point découle du premier.
Pour montrer le premier point : si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ alors $f \underset{b^-}{=} O(g)$, aussi supposons sans perte de généralité que $f \underset{b^-}{=} O(g)$. Par définition il existe $a_0 \in [a, b[$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in [a_0, b[$, $f(x) \leqslant K \cdot g(x)$. Ainsi par linéarité de l'intégrale (propriété 4) et d'après le théorème 9, si $\int_{a_0}^b g$ converge, alors $\int_{a_0}^b f$ aussi. Avec la relation de Chasles (propriété 3), si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ aussi. L'implication restante est la contraposée de celle que l'on vient d'établir. ∎

Remarques.

• Les mêmes théorèmes s'appliquent sans difficulté pour les applications positives de $\mathscr{C}_{pm}(]a, b], \mathbb{R}^+)$.

• Pour les applications de $\mathscr{C}_{pm}(]a, b[, \mathbb{R}^+)$, on étudiera séparément les comportements en a et en b. On rappelle que pour étudier la convergence de l'intégrale, c'est le comportement local au voisinage des bornes qu'il faut étudier (une fois établie le caractère continu par morceaux de la fonction).

• Le résultat peut encore se renforcer en ne supposant la positivité des fonctions et leur comparaison que sur un voisinage de b (ou de la borne problématique) ; pour cela il suffit d'appliquer la relation de Chasles.

• Lorsque les fonctions sont à valeurs négatives, le résultat reste vrai après inversion des relations de comparaison ; le mieux est peut-être d'appliquer le résultat aux fonctions opposées $-f$ et $-g$ et la linéarité de l'intégrale.

Exemples.

- $$\begin{array}{rcl} f : [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^2+3t}{t^4-1} \end{array}$$

L'application f est continue et à valeurs positives et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, et puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

- $$\begin{array}{rcl} g : \left]0,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+t)}{(\sin t)^{3/2}} \end{array}$$

L'application g est continue et à valeurs positives et $g(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, puisque $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-(\ln t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

Résolution. La fonction $f_\alpha : t \longmapsto e^{-(\ln t)^\alpha}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

- Pour $\alpha = 1$, $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha$ diverge.
- Pour $0 < \alpha < 1$:

$$t \times f_\alpha(t) = \exp(\ln(t) - \ln^\alpha(t)) = \exp(\ln(t) \times (1 - \underbrace{\ln^{\alpha-1}(t)}_{\to 0})) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi $\dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(f_\alpha(t))$ donc, $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-(\ln t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge lorsque $0 < \alpha < 1$.

- Pour $\alpha > 1$; le même calcul montre que $t \times f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Mais ceci ne permet pas de conclure. Soit $\beta > 0$:

$$t^\beta \times f_\alpha(t) = \exp(\ln(t^\beta) - \ln^\alpha(t)) = \exp(\ln(t) \times (\beta - \underbrace{\ln^{\alpha-1}(t)}_{\to+\infty})) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, pour tout $\beta > 0$, $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$. En choisissant $\beta > 1$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t$ converge et donc pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-(\ln t)^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

Convergence absolue

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur I (à valeurs réelles ou complexes). On dit que f est <u>intégrable sur I</u> lorsque l'intégrale $\int_I |f|$ de la fonction positive $|f|$ est convergente. On dit aussi que l'intégrale $\int_I f$ est <u>absolument convergente</u>.

Ainsi «intégrable» ne signifie pas « que l'on peut intégrer» mais que l'on peut intégrer en valeur absolue (ou en module) ce qui est beaucoup plus exigeant, comme le montre le théorème suivant.

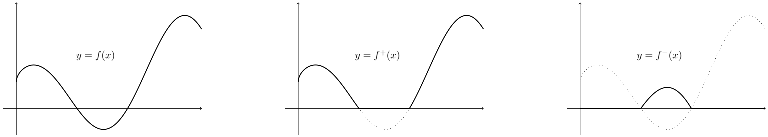
CVA $\Longrightarrow$ CV ; Inégalité triangulaire

Théorème

Si f est intégrable sur I (à valeurs réelles ou complexes) alors l'intégrale $\int_I f$ est convergente et

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Démonstration. On traite d'abord le cas où f est à valeurs réelles. En posant $f^+ = \max(f, 0) \geqslant 0$ et $f^- = \max(-f, 0) \geqslant 0$, on a $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.



On a $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$ donc $\int_{\mathrm{I}} f^+$et $\int_{\mathrm{I}} f^-$ convergent d'où, par linéarité, la convergence de $\int_{\mathrm{I}} f$.

Si f est à valeurs complexes, on décompose en partie réelle et imaginaire : $f = Re(f) + \mathrm{i} \cdot Im(f)$. Puisque $0 \leqslant |Re(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |Im(f)| \leqslant |f|$, les deux intégrales $\int_I Re(f)$ et $\int_I Im(f)$ sont absolument convergentes et donc d'après le cas précédent elles convergent. Par linéarité, $\int_I f$ converge.

Pour l'inégalité triangulaire (que f soit à valeurs réelles ou complexes), supposons que $I = [a, b[$. D'après le résultat connu sur les intégrales sur un segment (voir chapitre 3 ou cours de PCSI), pour tout $x \in [a, b[$, $\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f|$. Par passage à la limite quand $x \to b$, .$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$. Les autres cas pour l'intervalle I se traitent de manière analogue. ■

En appliquant les théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs positives, on obtient un théorème de comparaison pour l'intégrabilité :

Théorème

(Théorème de comparaison de fonctions intégrables)

Soient $I = [a, b[$, $f \in \mathscr{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ *et* $g \in \mathscr{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

- *Si* $|f| \leqslant |g|$ *ou* $f \underset{b^-}{=} O(g)$ *ou* $f \underset{b^-}{=} o(g)$ *alors* g *intégrable* $\Longrightarrow f$ *intégrable.*
- *Si* $f \underset{b^-}{\sim} g$ *alors* f *intégrable* $\Longleftrightarrow$ g *intégrable.*

Démonstration. Découle immédiatement des théorèmes de comparaison 9 et 10, en utilisant que $f = O(g) \iff |f| = O(|g|)$, $f = o(g) \iff |f| = o(|g|)$ et $f \sim g \implies |f| \sim |g|$. ∎

Exemple. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Exercice. Montrer qu'une fonction continue sur $]0, 1]$ et bornée est intégrable sur $]0, 1]$.

Résolution.

Dans ce cas il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$; or $t \longmapsto M$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc f aussi.

L'ensemble des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition

L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration. C'est clairement un ensemble non-vide, puisqu'il contient la fonction identiquement nulle. Si f est g sont intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{K}$ et d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda \cdot f + \mu \cdot g| \leqslant |\lambda| \cdot |f| + |\mu| \cdot |g|$$

On conclut avec la linéarité de l'intégrale et le théorème de comparaison. ∎

Intégrales de Riemann

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est :

- *intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*
- *intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Démonstration. Les grandes lignes sont établies dans les exemples page 4. ∎

Intégrales de Riemann

Exemples.

• La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable sur $]a, a+1]$ ainsi que sur $[a-1, a[$ ssi $\alpha < 1$. (Cf. exemple page 4).

Proposition

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ *est intégrable au voisinage de a ssi* $\alpha < 1$.

• La fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, de somme 1 (cf premier exemple page 4) et non intégrable sur $[1,+\infty[$. En effet :

$$\forall \alpha > 0,\ \lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln(t) = 0 \Longrightarrow \ln(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t\ln(t)} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\ln(t)\right)$$

Proposition

La fonction ln *est intégrable sur* $]0,1]$ *et non intégrable sur* $[1,+\infty[$.

• La fonction $t \longmapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $a > 0$ (cf. exemple page 4). En effet :

$$a > 0 \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-at} = 0 \Longrightarrow e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$a \leqslant 0 \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{te^{-at}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-at}\right)$$

Proposition

La fonction $t \longmapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.

• Intégrales de Bertrand (hors-programme : à savoir redémontrer à chaque usage !).

(Intégrales de Bertrand)

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. L'application $f : t \to \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$ ou $(\alpha=1$ et $\beta>1)$.

Démonstration. La fonction est continue et positive sur $[2,+\infty[$.

- Supposons que $\alpha>1$. Il existe γ tel que $1<\gamma<\alpha$ donc $\dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$.
- Supposons que $\alpha<1$. Il existe γ tel que $\alpha<\gamma<1$ donc $t^\gamma \times f(t) \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$.

  Il existe donc $\mathrm{A}\geqslant 2$ tel que pour tout $t\in[\mathrm{A},+\infty[$, $f(t)\geqslant \dfrac{1}{t^\gamma}$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge.
- Supposons que $\alpha=1$. Pour tout $x\geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} = \begin{cases} \Big[\ln(\ln(t))\Big]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta=1 \\ \left[-\frac{1}{\beta-1}\times\frac{1}{\ln^{\beta-1}(t)}\right]_2^x = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)}\right) & \text{si } \beta\neq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} \quad \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \beta=1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta-1<0 \\ \text{converge} & \text{si } \beta-1>0 \end{cases} \Longrightarrow \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta(t)} \quad \text{converge ssi } \beta>1$$

CONSEIL PRATIQUE D'ÉTUDE DE LA NATURE D'UNE INTÉGRALE.

1. *on vérifie que la fonction f est continue par morceaux en précisant l'intervalle.*
2. *pour les bornes finies non comprises dans l'ensemble de définition, on vérifie s'il y a un prolongement par continuité possible.*
3. *sinon, on cherche un équivalent à une borne pour simplifier puis on majore ou minore pour se référer une fonction continue, typiquement les fonctions de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. Parfois, on commence par majorer, par exemple $t \mapsto \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$ sur $[1, +\infty[$*

Exemple. Intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$ sur $[1, +\infty[$.

Puisque $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, $\left|\dfrac{\sin(t)}{\operatorname{sh} t}\right| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh}(t)} = \dfrac{2}{e^t - e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

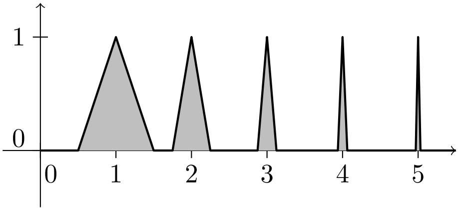
L'intégrabilité de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques (où le terme général tend vers 0).

Exemple. Une fonction intégrable qui n'a pas de limite en $+\infty$:

Soit f l'application définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2^n\left(x - n + 2^{-n}\right) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x \in \left[n - 2^{-n}, n\right] \\ -2^n\left(x - n - 2^{-n}\right) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x \in \left[n, n + 2^{-n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus clairement voici le graphe de f :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\int_0^{n+2^{-n}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-2^{-k}}^{k+2^{-k}} f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \times 2^{-k+1}$$

car somme des aires de triangles isocèles de hauteur 1 et base 2^{-k+1}

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$$
$$= 1 - 2^{-n}$$

d'où f est intégrable sur $[0, +\infty[$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = 1$, et f n'a clairement aucune limite en $+\infty$ puisque $\forall A > 0, \exists x \geqslant A$ avec $f(x) = 0$ et $\exists x' \geqslant A$ avec $f(x') = 1$.

Par contre lorsque f admet une limite en $+\infty$ son intégrabilité au voisinage de $+\infty$ entraîne une limite nulle en $+\infty$:

Théorème

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ existe ; si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge alors $\ell = 0$.

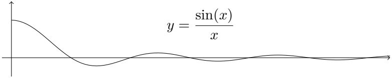
En corollaire, si $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ existe alors $\ell = 0$.

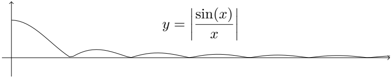
Démonstration. Procédons par l'absurde en supposant que $\ell \neq 0$; quitte à changer f en $-f$, par linéarité, on peut supposer que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\ell = +\infty$.
Par définition il existe $A > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \geqslant \alpha$, $f(x) \geqslant A$ (si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, prendre $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ et $A = \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$). Donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant \alpha$:
$\int_\alpha^x f \geqslant A \times (x - \alpha) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$; ainsi $\int_\alpha^{+\infty} f$ diverge et donc $\int_a^{+\infty} f$ aussi ; contradiction. ■

C'est une condition nécessaire, mais non suffisante d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (on parle d'intégrales semi-convergentes), leur étude n'est pas un objectif du programme, étudions tout de même, en guise d'exemple, l'intégrale classique $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais la fonction intégrande n'est pas intégrable (et pourtant on peut l'intégrer).





L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge ; en intégrant par parties :
Pour tout (x, y) tel que $0 < x < y$

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1-\cos(y)}{y} = 0$, ce qui montre la convergence du crochet lorsque $x \to 0^+$ et $y \to +\infty$.

Et $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$, et donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ceci montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(Remarque. On peut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$; par exemple avec une transformée de Laplace.)

Quant à l'intégrabilité :

$$\int_{\pi}^{n\pi} |f| = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \times (-1)^k \Big[-\cos(t)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \times (-1)^k \times 2 \times (-1)^k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$$

ce qui montre, puisque la série harmonique est divergente, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} |f| = +\infty$. Ainsi $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Remarque. On retiendra que pour étudier l'intégrabilité de la fonction $f \in \mathscr{C}_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$, il suffit d'étudier le comportement local de f au voisinage de a et au voisinage de b, les trois grandes méthodes étant :

- la recherche d'un prolongement par continuité (limite finie pour une borne finie)
- la recherche d'un équivalent avec une fonction intégrable
- à défaut la majoration (locale) en valeur absolue par une fonction intégrable.

Calcul d'intégrale généralisée

Bien sûr pour procéder au calcul d'une intégrale généralisée, on peut, après avoir établi la convergence ou en même temps, intégrer sur un segment $[x, y]$ avant de faire tendre x et/ou y vers les bornes de l'intégrale.

C'est notamment cette approche que l'on applique pour un calcul à l'aide d'une primitive.

Les formules de changement de variable et d'intégration par parties peuvent aussi s'appliquer directement sur l'intégrale généralisée, sans passer par une intégration sur un segment ; mais au prix de quelques précautions.

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur I, et φ une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$ de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante.
Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Remarques.

• Si on modifie juste l'hypothèse de stricte croissance par la stricte décroissance, on obtient :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

(les bornes sont inversées).

• On peut bien sûr appliquer ce théorème sur la fonction $|f|$ pour étudier l'intégrabilité de f.

Démonstration. (Esquisse) la preuve s'appuie sur la formule connue pour une intégration sur un segment :

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

mais l'hypothèse de bijectivité est maintenant requise sur φ pour pouvoir établir le résultat en passant aux limites (admis)... ■

Exercice. On peut par un changement de variable passer d'une intégrale « impropre » (= pas extensible sur un segment) à une intégrale « propre ».
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^{u^2}\,\mathrm{d}u$. (On ne demande pas de calculer cette intégrale).

Résolution. Posons $u = \sqrt{t}$; l'application $x \longmapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $]0,1]$ dans $]0,1]$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\mathrm{d}u \Longrightarrow \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$.

Résolution. Ici encore posons $u = \sqrt{t}$; l'application $x \longmapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $]0,1]$ dans $]0,1]$.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad t = u^2$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\Big[\mathrm{Arcsin}(t)\Big]_0^1 = \pi$$

Proposition

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. Alors :

• f est intégrable en a si et seulement si $t \longmapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+.

• f est intégrable en b si et seulement si $t \longmapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+

Démonstration. Soit $c \in]a, b[$. On procède au changement de variable $u = a + t$, ($\mathscr{C}^{\mathbf{1}}$ et strictement croissante), dans le premier cas, et $v = b - t$, ($\mathscr{C}^{\mathbf{1}}$ et strictement décroissante), dans le second cas :

$\int_a^c |f(u)|\mathrm{d}u$ a même nature que $\int_0^{c-a} |f(a+t)|\mathrm{d}t$ et $t \longmapsto f(a+t)$ est continue par morceaux s

$\int_c^b |f(v)|\mathrm{d}v$ a même nature que $\int_0^{b-c} |f(b-t)|\mathrm{d}t$ et $t \longmapsto f(b-t)$ est continue par morceaux

■

Remarque. En particulier, on comprend mieux le lien entre l'intégrabilité de $t \longmapsto \frac{1}{|t-a|^{\alpha}}$ en a (proposition 15) et de $t \longmapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$ en 0 (proposition 14, critères de Riemann) car on voit désormais que l'un se déduit de l'autre.

Intégration par partie

Voici un énoncé possible d'une intégration par partie dans le cas d'un intervalle $[a, b[$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$.
Si $\lim_{x\to b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

où $\Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$ représente $\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

Démonstration. On utilise simplement pour $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Remarques.

• Dans la pratique, on effectue une intégration par partie sur $[a, x]$ puis on fait tendre x vers b.

• Une petite subtilité. Dans le cas d'une intégration par partie où le crochet converge, une intégrale peut comporter une fonction intégrable et pas l'autre mais cependant elles sont toutes deux convergentes (en clair l'une est absolument convergente et pas l'autre).

On a vu (page 12) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

et que l'intégrale de gauche n'est pas absolument convergente, tandis que celle de droite est absolument convergente (car $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$).

Exemple. Important : la fonction Gamma (à connaître).

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x > 0$; en effet :

– si $x \geqslant 1$: elle se prolonge par continuité en 0 et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

– si $1 > x > 0$: $f_x(t) \underset{0}{\sim} \left(\frac{1}{t^a}\right)$ avec $a < 1$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

– si $0 \geqslant x$: $f_x(t) \underset{0}{\sim} \left(\frac{1}{t^a}\right)$ avec $a \geqslant 1$.

L'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est appelée fonction Gamma.

Elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

(elle étend aux réels la fonction factorielle).

En effet ; appliquons une intégration par partie à l'intégrale :

$$\begin{array}{ll} v(t) = e^{-t} & v'(t) = -e^{-t} \\ u(t) = \frac{1}{x} t^x & u'(t) = t^{x-1} \end{array}$$

Puisque pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x} t^x e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} t^x e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc par intégration par partie, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t \Longrightarrow \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \Longrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

En particulier $\Gamma(n+1) = n!$; par récurrence :

Initialisation.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = \lim_{t \to 0} e^{-t} - \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 1 = 0!$$

Hérédité. Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$; alors :

$$\Gamma(n+2) = (n+1) \times \Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)!$$