Chapitre 13 :
I. Espaces préhilbertiens et euclidiens (Révisions)

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Espaces préhilbertiens réels ; espaces euclidiens

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont réels.

Définition

(Produit scalaire sur un espace vectoriel réel)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; une application :

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$$

est un <u>produit scalaire sur E</u> lorsque c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire :

- *forme bilinéaire* : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle = \lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle \qquad \textit{(linéarité à gauche)}$$
$$\langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle + \mu \langle x \mid z \rangle \qquad \textit{(linéarité à droite).}$$

- *symétrique* : pour tout $(x, y) \in E^2, \langle y \mid x \rangle = \langle x \mid y \rangle$.
- *définie positive* : pour tout $x \in E$,

$$\langle x \mid x \rangle \geqslant 0 \qquad \textit{(positive)}$$
$$\langle x \mid x \rangle = 0 \Rightarrow x = O_E \qquad \textit{(définie).}$$

Le couple $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est alors appelé un espace préhilbertien réel, et, si E est de dimension finie, un espace euclidien.

Remarques.

- Le produit scalaire est parfois noté $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$.
- Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, on se contentera de montrer la linéarité d'un seul côté et la symétrie.

Définition

(Norme associée)

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, pour tout $x \in E$ le réel positif $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est noté $\|x\|$; l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

s'appelle norme euclidienne induite par le produit scalaire.

Remarque. Par linéarité et définie positivité du produit scalaire, $\|x\| = 0 \iff x = O_E$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité : $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.
(c'est-à-dire $x = O_E$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$)

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$.

Si $x = O_E$ alors $|\langle x|y \rangle| = \|x\|.\|y\| = 0$ et la conclusion est vérifiée.

Supposons dans la suite que $x \neq O_E$; par définie positivité, $\|x\| > 0$.
On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \|tx + y\|^2 \geqslant 0$, or $\|tx + y\|^2 = \langle tx + y \mid tx + y \rangle = t^2\|x\|^2 + 2t \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$ est un trinôme en t de signe constant, donc $\Delta = 4 \langle x \mid y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$ c'est-à-dire $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.
Supposons que $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$; alors $\Delta = 4 \langle x \mid y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$, et donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|tx + y\|^2 = 0$, c'est à dire par définie-positivité $tx + y = O_E = 0$ et donc il existe $\lambda = -t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, c'est-à-dire x et y sont colinéaires.
Si x et y sont colinéaires, on vérifie aisément que $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$. ∎

Inégalité triangulaire, ou de Minkowski

Théorème

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec cas d'égalité :

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ *si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.*

(c'est-à-dire $x = O_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$).

Démonstration. On a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x \mid y \rangle| + \|y\|^2$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

et donc comme $\|x + y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ sont positifs :

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Si de plus $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors les inégalités ci dessus sont des égalités, d'où, d'une part, x et y sont colinéaires, d'après le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz et donc si $x \neq O_E$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $y = \lambda x$, et d'autre part $(x \mid y) = |(x \mid y)|$ d'où, si $x \neq O_E$, $\lambda \|x\|^2 = |\lambda| \cdot \|x\|^2$, ce qui montre $\lambda \geqslant 0$.

Propriétés de la norme euclidienne

Propriété

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel ; $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geqslant 0$ *(positivité)*
- $\|x\| = 0 \iff x = O_E$ *(séparation)*
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *(homogénéité)*
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*

On dit que $\| \cdot \|$ est une norme euclidienne sur E, associée au produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Démonstration. Par définition $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \geqslant 0$; d'où la positivité.

Par bilinéarité du produit scalaire : $\|O_E\|^2 = \langle O_E \mid O_E \rangle = \langle 0 \cdot O_E \mid O_E \rangle = 0 \cdot \langle O_E \mid O_E \rangle = 0$. Par définie positivité du produit scalaire, $\|x\|^2 = \langle x \mid x \rangle = 0 \implies x = O_E$; d'où la séparation.

Par bilinéarité du produit scalaire :
$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x \mid \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x \mid x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$; d'où l'homogénéité.

L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minkowski prouvée précédemment. ■

Identités remarquable

Propriété

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien réel, alors* $\forall (x, y) \in E^2$,

- *Norme euclidienne d'une somme, d'une différence :*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$$

- *Identité du parallélogramme :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(elle est caractéristique d'une norme euclidienne)

- *Identités de polarisation :*

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

(c'est à dire qu'on peut retrouver le produit scalaire grâce à sa norme euclidienne).

Démonstration. La première s'obtient en développant par bilinéarité $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y \mid x \pm y \rangle$ et les suivantes en découlent. ∎

La norme euclidienne permet de définir une distance entre éléments de E :

Proposition-Définition

(Distance associée)

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

possède les propriétés suivantes : pour tout $(x,y,z) \in E^3$:

- $d(x,y) \geqslant 0$ *(positivité)*
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation)*
- $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit que c'est une <u>distance sur E</u>, associée au produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, ou à la norme $\| \cdot \|$.

Exemples. À retenir.

- Structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$$

(où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$) est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ dont la norme associée est :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

En notant X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique, on a $\langle x \mid y \rangle = X^{\mathsf{T}} Y$.

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure Euclidienne canonique, les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski deviennent :

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *:*

- $$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$ *(Cauchy-Schwarz)*
- $$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$ *(Minkowski)*

• Structures euclidiennes sur un espace vectoriel réel de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors à toute base $\mathcal{B}$ de E correspond un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ munissant E d'une structure d'espace euclidien, défini comme ci-dessus, par $\langle x \mid y \rangle = X^{\mathsf{T}} Y$ où X et Y sont les matrices respectives des coordonnées de x, y dans la base $\mathcal{B}$.

• Un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

En effet, la bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale, la positivité de la positivité de l'intégrale, et la définie positivité du fait que si h est une application continue et positive sur $[a,b]$, et si $\int_a^b h(t)dt = 0$, alors h est nulle sur $[a,b]$; ainsi $\langle f \mid f \rangle = \int_a^b f^2(t)dt = 0 \implies f = O_E$.

En particulier, on obtient les inégalités :

Soient $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *:*

- $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \int_a^b |fg| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2} \times \sqrt{\int_a^b |g|^2}$ *(Cauchy-Schwarz)*
- $\sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2} + \sqrt{\int_a^b |g|^2}$ *(Minkowski)*

• De même, en se plaçant sur

$$\mathscr{L}^2(I) = \left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continues, de carré intégrable sur } I\right\}$$

avec le produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt$, on montre de même :

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues et de carré intégrable :*

- $\left|\int_I fg\right| \leqslant \int_I |fg| \leqslant \sqrt{\int_I f^2} \times \sqrt{\int_I g^2}$ *(Cauchy-Schwartz)*
- $\sqrt{\int_I (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_I f^2} + \sqrt{\int_I g^2}$ *(Minkowski).*

• Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$:

– L'application :

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \end{array}$$

où $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

La bilinéarité découle de la bilinéarité de $\times$ dans $\mathbb{R}$ et de la linéarité de la somme, la symétrie de la commutativité de $\times$ de $\mathbb{R}$, et la définie positivité du fait qu'une somme de carré est positive et qu'elle est nulle ssi chaque carré est nul.

– L'application :

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)dt \end{array}$$

où $a < b$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. L'argument est le même que dans $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

• Produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

L'application :

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : \ \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^{\mathsf{T}} B\right) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire usuel.

La bilinéarité découle de la linéarité de la trace et de la transposition et de la bilinéarité du produit matriciel.

La symétrie découle de la trace d'une transposée et de la transposée d'un produit puisque :

$$\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}} B) = \operatorname{tr}((A^{\mathsf{T}} B)^{T}) = \operatorname{tr}(B^{\mathsf{T}} A)$$

La définie positivité découle du fait que si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ alors $A^{\mathsf{T}} A$ a comme coefficients diagonaux :

$$(A^{\mathsf{T}} A)_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 \quad \text{et donc} \quad \operatorname{tr}\left(A^{\mathsf{T}} A\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}^2.$$

En particulier, dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire usuel s'écrit (en identifiant une matrice $(1,1)$ avec un scalaire) :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & \langle X \mid Y \rangle = X^{\mathsf{T}} Y \end{array}$$

Famille orthogonale/orthonormale

Dans tout ce qui suit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel, et $\| \cdot \|$ sa norme associée.

Le produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité :

Définition

- *On dit que* x *est un* *vecteur unitaire* *de* E *lorsque* $\|x\| = 1$
- *On dit que* x *et* y *sont deux vecteurs* *orthogonaux* *de* E *lorsque* $\langle x \mid y \rangle = 0$ *; on note* $x \perp y$.
- *On dit que la famille* $(x_i)_{i \in I}$ *de vecteurs de* E *est une* *famille orthogonale* *lorsque :*

$$\forall (i,j) \in I^2, \ i \neq j \implies \langle x_i \mid x_j \rangle = 0.$$

- *On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une <u>famille orthonormale</u> si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires, c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad \langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_j^i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E. Il faut montrer que toute sous-famille finie est libre. Notons sans perte de généralité $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie quelconque de vecteurs de la famille et soient des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = O_E$. On a alors, par linéarité à droite, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \langle x_k \mid O_E \rangle = \left\langle x_k \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_k \mid x_i \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2$$

donc, puisque par hypothèse $x_k \neq O_E$, $\lambda_k = 0$. ∎

Théorème de Pythagore

Théorème

Pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Démonstration. Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale, on obtient par bilinéarité du produit scalaire :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i \mid x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \langle x_i \mid x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

■

Orthogonal d'une partie

Proposition-Définition

- *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux lorsque :*

$$\forall (x, y) \in F \times G,\ \langle x \mid y \rangle = 0.$$

On note $F \perp G$.

Dans ce cas F et G sont en somme directe ; on note $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

- *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal de F, noté $F^{\perp}$ l'ensemble*

$$F^{\perp} = \left\{ y \in E \mid \forall x \in F,\ \langle x \mid y \rangle = 0 \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

- *Plus généralement, soit $A \subset E$. On note*

$$A^{\perp} = \left\{ y \in E \mid \forall a \in A, \langle a \mid y \rangle = 0 \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel, plus précisément $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.

- *Soit, de plus, $x \in E$. On écrit $x \perp A$ lorsque $x \in A^{\perp}$, c'est-à-dire $\forall a \in A, a \perp x$.*

Démonstration. Soient F et G deux sev de E ; si $x \in F \cap G$ alors en particulier $\langle x \mid x \rangle = 0$ et donc $x = O_E$. Ainsi F et G sont en somme directe.

Soit A une partie de E et soient $x_{\mathbf{1}}, x_{\mathbf{2}} \in A^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in A$:

$$\langle x \mid \lambda \cdot x_{\mathbf{1}} + x_{\mathbf{2}} \rangle = \lambda \cdot \langle x \mid x_{\mathbf{1}} \rangle + \langle x \mid x_{\mathbf{2}} \rangle = 0$$

et bien sur $\langle x \mid O_E \rangle = 0$; ainsi $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel. C'est vrai notamment lorsque $A = F$ est un sev. ■

Méthode. Pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel il suffit de déterminer l'orthogonal d'une famille génératrice :
$\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}^{\perp} = \text{Vect}\left(x_1, \ldots x_n\right)^{\perp}$.

Remarques.

• $E^{\perp} = \left\{O_E\right\}$ et $\left\{O_E\right\}^{\perp} = E$.

• Lorsque F et G sont orthogonaux, ils sont en somme directe $F \oplus G$, mais pas nécessairement supplémentaires dans E : $E \neq F \oplus G$; nous verrons que par contre que c'est le cas lorsque $G = F^{\perp}$ et F ou G est de dimension finie.

Propriété

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$,
- $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$,
- $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Démonstration. Soit $x \in F$, alors pour tout $y \in F^{\perp}$, $\langle x \mid y \rangle = 0$ et donc $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$; ainsi $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset F$.

Soient $F \subset G$ et $x \in G^{\perp}$; pour tout $y \in G$, $\langle x \mid y \rangle = 0$, en particulier pour tout $y \in F$, $\langle x \mid y \rangle = 0$, et donc $y \in F^{\perp}$; donc $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Soient F et G deux sev ; soit $x \in (F+G)^{\perp}$; en particulier pour tout $y \in F$, $\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid y + O_G \rangle = 0$ et donc $x \in F^{\perp}$; de même $x \in G^{\perp}$; d'où l'inclusion $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Réciproquement si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$ alors pour tout $(y_1, y_2) \in F \times G$, $\langle x \mid y_1 + y_2 \rangle = \langle x \mid y_1 \rangle + \langle x \mid y_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ et donc $x \in (F+G)^{\perp}$. Ainsi $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$. ■

Remarque. Pour A, B des parties quelconques de E, on a encore $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Base orthonormale

Définition

On appelle <u>base orthonormale</u> (ou orthonormée) d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ toute base de E qui soit une famille orthonormale.

Remarque. Si $\dim E = n$ alors toute famille orthonormale constituée de n vecteurs de E est une base orthonormale (d'après la propriété 5).

Exemples.

• Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.

• Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle M \mid N \rangle = \operatorname{tr}(M^{\mathsf{T}} N)$, la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base orthonormale. En effet :

$$E_{i,j}^{\mathsf{T}} E_{i',j'} = E_{j,i} E_{i',j'} = \begin{cases} O_n & \text{si } (i,j) \neq (i',j') \\ E_{j,j} & \text{si } (i,j) = (i',j') \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{tr}\left(E_{i,j}^{\mathsf{T}} E_{i',j'}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (i',j') \\ 1 & \text{si } (i,j) = (i',j') \end{cases}$$

C'est le cas aussi dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

• Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire usuel :

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k)$$

L'application est :

– Bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$,

– Bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ (distributivité de $\times$ sur $+$ et associativité de $\times$).

– Symétrique par commutativité de $\times$ sur $\mathbb{R}$.

– Positive car $\langle P \mid P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2 \geqslant 0$.

– Définie positive car
$\langle P \mid P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2 \geqslant 0 \implies P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0 \implies P = O_{\mathbb{R}[X]}$ puisque $\deg(P) \leqslant n$. C'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille constituée des polynômes de Lagrange $L_0, \ldots L_n$, associés à $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, où :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$$

vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$.

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthorormale en effet pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$:

$$\langle L_i \mid L_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = \delta_{i,j}.$$

Existence de base orthonormale

Théorème

Tout espace euclidien non réduit à $\{O_E\}$ admet (au moins) une base orthonormale.

Démonstration. De l'existence d'une base, on en déduit une base orthonormale en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir ci-dessous). ■

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est un algorithme qui transforme une famille de vecteurs en une famille orthonormale engendrant le même sous-espace. C'est un résultat important et très utile.

Théorème

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre finie d'un espace préhilbertien réel. Il existe une unique famille orthonormée $(v_1, \dots, v_p)$ telle que :

- $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$,
- $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle e_i \mid v_i \rangle > 0$.

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ s'obtient par la relation de récurrence :

$$v_1 = \frac{1}{\| e_1 \|} \cdot e_1 \qquad v_{k+1} = \frac{1}{\| u_{k+1} \|} \cdot u_{k+1}$$

$$\text{avec } u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1} \mid v_i \rangle \cdot v_i$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \in [\![1, p]\!]$.

(I) Pour $k = 1$, le seul vecteur qui convient est $v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$.

(H) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ et supposons l'assertion vérifiée au rang k ; soit $(v_1, \dots, v_k)$ la famille orthonormale correspondante. Puisque $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k, e_{k+1})$, le vecteur v_{k+1} peut s'écrire sous la forme :

$$v_{k+1} = \lambda \cdot \underbrace{(e_{k+1} - \alpha_1 \cdot v_1 - \cdots - \alpha_k \cdot v_k)}_{=u_{k+1}}$$

avec $\lambda \neq 0$.

La condition d'orthonormalité de la famille $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ équivaut par bilinéarité à ce que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ 0 = \langle v_i \mid v_{k+1} \rangle = \lambda \cdot (\langle v_i \mid e_{k+1} \rangle - \alpha_i \cdot \langle v_i \mid v_i \rangle)$$

ce qui équivaut puisque $\langle v_i \mid v_i \rangle = 1$ à :

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ \alpha_i = \langle v_i \mid e_{k+1} \rangle$$

De $\|v_{k+1}\| = 1$ découle par homogénéité que $|\lambda| = \frac{1}{\|u_{k+1}\|}$. Mais $\lambda > 0$ puisque :

$$\langle e_{k+1} \mid v_{k+1} \rangle > 0 \implies \Big\langle \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i}_{=e_{k+1}} \Big| v_{k+1} \Big\rangle = \frac{1}{\lambda} \cdot \|v_{k+1}\|^2 > 0$$

Donc $\lambda = \frac{1}{\|u_{k+1}\|}$.

Méthode. Dans la pratique, on applique plutôt le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt avant de "normaliser" les vecteurs obtenus :

À partir de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ on construit une famille orthogonale $(w_1, \ldots, w_p)$ par la relation de récurrence :

$$w_1 = e_1$$

$$w_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot w_i \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i = \frac{\langle e_{k+1} \mid w_i \rangle}{\| w_i \|^2}$$

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ orthonormale s'en déduit alors par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \; v_i = \frac{1}{\| w_i \|} \cdot w_i$$

Exemple. Orthonormalisation de la base $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

On calcule successivement :

$$Q_0 = 1, \quad \|Q_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2, \quad \langle Q_0 \mid X\rangle = \int_{-1}^{1} tdt = 0$$

$$Q_1 = X - \frac{\langle Q_0 \mid X\rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 = X, \quad \|Q_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\left\langle Q_0 \mid X^2\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad \left\langle Q_1 \mid X^2\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0,$$

$$Q_2 = X^2 - \frac{\left\langle Q_0 \mid X^2\right\rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 - \frac{\left\langle Q_1 \mid X^2\right\rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}, \; \|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45},$$

$$\left\langle Q_0 \mid X^3\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0, \; \left\langle Q_1 \mid X^3\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5},$$

$$\left\langle Q_2 \mid X^3\right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(t^5 - \frac{t^3}{3}\right) dt = 0$$

$$Q_3 = X^3 - \frac{\langle Q_0 \mid X^3 \rangle}{\| Q_0 \|^2} Q_0 - \frac{\langle Q_1 \mid X^3 \rangle}{\| Q_1 \|^2} Q_1 - \frac{\langle Q_2 \mid X^3 \rangle}{\| Q_2 \|^2} Q_2 = X^3 - \frac{3}{5} X,$$

$$\| Q_3 \|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3t}{5} \right)^2 dt = \frac{8}{175}$$

Donc $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = \left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{3}{5} X\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire et

$$(P_0, P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X,\ \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},\ \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} X^3 - \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} X \right)$$

est une base orthonormale.

Théorème de la base orthonormale incomplète

Théorème

Dans un espace euclidien toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration. Avec le théorème de la base incomplète, la famille orthonormale (étant libre) peut être complétée en une base orthonormale, en lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on la transforme en une base orthonormale, qui par unicité, contient la famille orthonormale initiale comme sous-famille. ■

Coordonnées dans une base orthonormale

Dans une base orthonormale les coordonnées d'un vecteur se calculent facilement à l'aide du produit scalaire.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$. Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \langle x \mid e_i \rangle \,.$$

En particulier,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i \ .$$

Démonstration. Sous ces hypothèses, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x \mid e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \middle| e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \langle e_i \mid e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \delta_{i,k} = x_k .$$

Remarque. Ainsi si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i \mid f(e_j) \rangle \ .$$

Forme canonique du produit scalaire

Dans un espace euclidien, tout produit scalaire s'écrit sous forme canonique $\langle x \mid y \rangle = \sum x_i \cdot y_i$ à l'aide des coordonnées (x_i), (y_i) des vecteurs x et y dans une base orthonormale.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ et soient $x, y \in E$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

En particulier, pour la norme associée $\| \cdot \|$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Démonstration. En écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e_i$, on obtient par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x \mid y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_i \cdot e_i \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i \cdot y_j \cdot \langle e_i \mid e_j \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i \cdot y_j \cdot \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i .$$

Le reste en découle puisque $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. ∎

Sous écriture matricielle, le résultat devient :

Corollaire

En notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ les matrices des coordonnées dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de deux vecteurs x, y d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$,

$$\langle x \mid y \rangle = X^{\mathsf{T}} Y = Y^{\mathsf{T}} X \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{X^{\mathsf{T}} X}$$

Projection orthogonale

Dans un espace préhilbertien, un sous-espace vectoriel F et son orthogonal sont en somme directe. Si de plus F est de dimension finie, ils sont en outre supplémentaires :

Proposition

(Supplémentaire orthogonal d'un sev de dim. finie)

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus F^{\perp}$; le sev $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F. On note :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}.$$

Démonstration. On a deja établi que F et $F^{\perp}$ étaient en somme directe ; aussi pour montrer qu'il sont supplémentaires dans E il suffit de montrer que $E = F + F^{\perp}$.

Puisque F est de dimension finie, c'est un espace euclidien et il admet donc une base orthonormale, disons $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ quelconque ; notons :

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \cdot e_k \quad \text{et} \quad x_2 = x - x_1$$

de sorte que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$. Il s'agit de prouver que $x_2 \in F^{\perp}$, et pour cela il suffit de montrer que $\langle x_2 \mid e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle x_2 \mid e_i \rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \cdot e_k \middle| e_i \right\rangle \\ &= \langle x \mid e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \cdot \langle e_k \mid e_i \rangle = \langle x \mid e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \cdot \delta_{k,i} = \langle x \mid e_i \rangle - \langle x \mid e_i \rangle = 0.\end{aligned}$$

Ainsi tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^{\perp}$. ■

Remarque. Attention le résultat est en général faux lorsque F n'est pas de dimension finie, comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} b_k X_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \right\}$; c'est clairement un sous-espace vectoriel (mais pas de dimension finie).

Soit $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \in F^{\perp}$; puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k = X^{k+1} - X^k \in F$:

$$\forall k \in [[0, n-1]],\ \langle Q \mid P_k \rangle = a_{k+1} - a_k = 0 \quad \text{et} \quad \langle Q \mid P_n \rangle = -a_n = 0$$

Donc $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$, c'est à dire $P = O_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi :

$$F^{\perp} = \left\{ O_{\mathbb{R}[X]} \right\}.$$

Puisque $F \neq \mathbb{R}[X]$, F et $F^{\perp}$ ne sont pas supplémentaires dans E.

Corollaire

(Dimension de $F^\perp$ dans un espace euclidien)

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, tout sous-espace vectoriel F est supplémentaire à son orthogonal ; on a alors :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

En particulier, dans un espace euclidien :

$$\left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

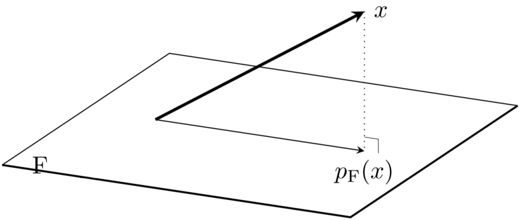
Démonstration. La relation sur les dimensions découle immédiatement de $E = F \oplus F^\perp$. En particulier $\dim \left(F^\perp\right)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$, et puisque $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et ont même dimension, l'inclusion est en fait une égalité. ∎

Remarque. Ce résultat sur les dimensions est un théorème du rang, en considérant la projection p de E sur F parallèlement à $F^\perp$ (ce qu'on appelle projection orthogonale sur F) ; en effet $\operatorname{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = F^\perp$.

Définition

(Projection orthogonale sur un sev de dimension finie)

Soient $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie. La projection orthogonale p_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.



Exemple. Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\langle M \mid N \rangle = \operatorname{tr}\left(M^{\mathsf{T}}N\right)$, et $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. Alors $F^{\perp} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques puisque pour tout $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$:

$$\left.\begin{array}{r} \langle S \mid A \rangle = \operatorname{tr}\left(S^{\mathsf{T}}A\right) = \operatorname{tr}\left(SA\right) = \operatorname{tr}(AS) \\ \langle A \mid S \rangle = \operatorname{tr}\left(A^{\mathsf{T}}S\right) = \operatorname{tr}(-AS) = -\operatorname{tr}(AS) \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle S \mid A \rangle = 0$$

La projection orthogonale sur $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ associe alors à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice symétrique $p_F(M) = \frac{M+M^{\mathsf{T}}}{2}$.

Expression des projections orthogonales

Proposition

Soient $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sev de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F.

- *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthogonale de F :*

$$\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle x \mid e_i \rangle}{\|e_i\|^2} \cdot e_i$$

- *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F :*

$$\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i$$

Démonstration. Pour une base orthonormale de F ; le vecteur $x_1 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i$ est clairement dans F Il suffit de montrer que $x - x_1 \in F^{\perp}$. La preuve est identique à la proposition 14.

Pour une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_p)$ la famille $\left(\frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1, \ldots, \frac{1}{\|e_p\|} \cdot e_p \right)$ est une base orthonormale et donc avec ce qui précède et par bilinéarité :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \left\langle x \;\middle|\; \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_i \right\rangle \cdot \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle x \mid e_i \rangle}{\|e_i\|^2} \cdot e_i .$$

■

Remarque. Avec cette formule, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui permet à partir d'une famille libre $(e_1, \ldots, e_p)$ d'obtenir une famille orthonormale $(v_1, \ldots, v_p)$ engendrant le même sous-espace, s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1 \\ v_{k+1} &= \frac{1}{\|u_{k+1}\|} \cdot u_{k+1} \\ u_{k+1} &= e_{k+1} - p_{\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)}(e_{k+1}) \end{aligned}}$$

Inégalité de Bessel

Corollaire

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors $\forall x \in E$:

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

En particulier $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

Démonstration. La base $(e_1, \ldots, e_p)$ étant orthonormale cela découle immédiatement de l'expression du projeté orthogonale : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i$ et du théorème de Pythagore, par homogénéité :

$$\|p_F\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|\langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} |\langle x \mid e_i \rangle|^2 \cdot \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2 .$$

∎

Exercice. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p_F sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où :

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

Résolution.

Il s'avère que la famille (e_1, e_2) est une base orthonormale de F. Il suffit donc d'appliquer les formules de projection orthogonale : soit $u = (x, y, z, t)$,

$$\begin{aligned} p_F(u) &= \langle u \mid e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle u \mid e_2 \rangle \cdot e_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x - y - z + t) \cdot e_1 + \frac{1}{2} \cdot (x + y + z + t) \cdot e_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2x + 2t, 2y + 2z, 2y + 2z, 2x + 2t) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_F((1,0,0,0)) &= \frac{1}{2}\cdot(1,0,0,1) \\ p_F((0,1,0,0)) &= \frac{1}{2}\cdot(0,1,1,0) \\ p_F((0,0,1,0)) &= \frac{1}{2}\cdot(0,1,1,0) \\ p_F((0,0,0,1)) &= \frac{1}{2}\cdot(1,0,0,1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Mat}(p_F) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode. Pour calculer la projeté orthogonal d'une vecteur $x \in E$ sur F :

- Soit on dispose d'une base orthogonale/orthonormale de F et on applique l'une des formules données plus haut.
- Si on ne dispose que d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F on peut appliquer Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser avant d'appliquer la même méthode que ci-dessus.
- Mais on peut aussi plutôt chercher $p_F(x)$ en remarquant que $p_F(x)$ est l'unique point de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^\perp$ et en le caractérisant par $\langle x \mid e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$; on arrive à un système de p équations linéaires qu'on résout pour trouver les coordonnées de $p_F(x)$ sur la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Soient $e_1 : t \longmapsto 1$ et $e_2 : t \longmapsto t \in E$. Déterminons le projeté orthogonal de $\phi : t \longmapsto t^2$ sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Puisque $p_F(\phi) \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(\phi) = ae_1 + be_2$ et tel que :

$$\begin{cases} 0 = \langle e_1 \mid \phi - ae_1 - be_2 \rangle = \displaystyle\int_0^1 (t^2 - a - bt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{3} - a - \frac{b}{2} \\ 0 = \langle e_2 \mid \phi - ae_1 - be_2 \rangle = \displaystyle\int_0^1 (t^3 - at - bt^2)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{3} \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $(a, b) = (-\frac{1}{6}, 1)$; donc le projeté orthogonal de ϕ sur F est

$$p_F(\phi) : t \longmapsto t - \frac{1}{6}.$$

Distance à un sev

Définition

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. La distance d'un vecteur $x \in E$ au sous-espace-vectoriel F est définie par :

$$d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

C'est un réel positif.

Remarque. La distance de x à F est bien définie puisque $\{\|x - f\| \mid f \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}_+$; d'où l'existence de sa borné inférieure, qui de plus est positive.

Le résultat, très important, est que lorsque F est de dimension finie, la distance d'un vecteur quelconque $x \in E$ à F est atteinte, au projeté orthogonal de x sur F.

Théorème

(Projection orthogonale et distance à un sev)

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit F un sev de dimension finie. Alors pour tout $x \in E$:

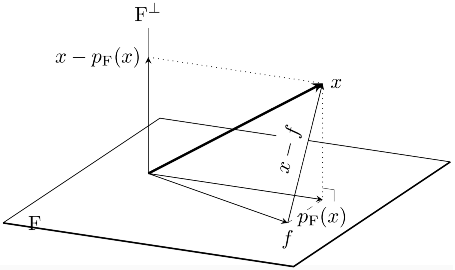
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{f \in F} \|x - f\|.$$

Autrement dit la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte : c'est la distance de x à son projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F. De plus le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique point minimisant la distance de x à un point de F.

Démonstration. Montrons que la distance de x à F est atteinte et qu'elle vaut $\|x - p_F(x)\|$; soit $f \in F$ quelconque :

$$\begin{aligned}
\|x - f\|^2 &= \|x - p_F(x) + p_F(x) - f\|^2 \\
&= \|x - p_F(x)\|^2 + 2\langle \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{p_F(x) - f}_{\in F} \rangle + \|p_F - f\|^2 \\
&= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2 \\
&\geqslant \|x - p_F(x)\|^2
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - f\|^2 = 0$ c'est à dire si et seulement si $f = p_F(x)$. ∎



Corollaire

$$\forall x \in E,\ d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

Démonstration. Découle du théorème de Pythagore. ∎

Exercice. On reprend comme dans l'exemple plus haut : $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

avec $e_1 : t \longmapsto 1$ et $e_2 : t \longmapsto t \in E$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\phi : t \longmapsto t^2$.

Déterminer la distance de ϕ à F.

Résolution.

On sait deja que $p_F(\phi) = t - \frac{1}{6}$.

D'après la relation précédente (Théorème de Pythagore) :

$$\begin{aligned}
d(\phi, F)^2 &= \|\phi\|^2 - \|p_F(\phi)\|^2 \\
&= \int_0^1 t^4 \,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}\,t \\
&= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{36}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{36 - 60 + 30 - 5}{5 \times 36} \\
&= \frac{1}{5 \times 36} \Longrightarrow d(\phi, F) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$