

Chapitre 13 :

II. Endomorphismes de l'espace euclidien

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux

<https://www.jean-philippe-preaux.fr>

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Matrices orthogonales

Application : orientation d'un espace vectoriel réel

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Endomorphismes symétriques

Réduction des endomorphismes symétriques

Endomorphismes/matrices symétriques positifs, définis positifs

Classification des isométries du plan euclidien

Isométrie vectorielle

Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) lorsque :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

c'est à dire que u est un endomorphisme qui préserve la norme euclidienne.

Exemples.

- $\pm \text{id}_E$ sont des isométries vectorielles.

Exemples.

- C'est aussi le cas dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, de $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$ puisque

$$\|f(x, y)\|^2 = \langle (-y, x) \mid (-y, x) \rangle = y^2 + x^2 = \|(x, y)\|^2.$$

- Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle : une symétrie orthogonale s est une symétrie de F parallèlement à $F^\perp$.

$$\|s(x)\|^2 = \|s(x_1 + x_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$$

(par Pythagore, puisque x_1 et $-x_2$ sont orthogonaux).

Remarques.

- Une isométrie (tout court !) f de l'espace euclidien est une application qui préserve les distances : $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme qui préserve les distances puisque :

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y\|$$

C'est donc une isométrie. Ce calcul montre aussi que pour un endomorphisme, être une isométrie équivaut à préserver la norme, c'est à dire à être une isométrie vectorielle. Ainsi les isométries vectorielles sont précisément les endomorphismes d'un espace euclidien qui préservent les distances.

- On montre que toute isométrie de l'espace euclidien est la composée d'une isométrie vectorielle et d'une translation. Ainsi l'étude des isométries vectorielles permet de comprendre les isométries de l'espace euclidien. Les isométries vectorielles jouent un rôle central en géométrie euclidienne.

Caractérisation à l'aide du produit scalaire

Proposition

Un endomorphisme u d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si u préserve le produit scalaire, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Démonstration. Si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, on a en particulier :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|^2 = \langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2 \xrightarrow{\|\cdot\| \geq 0} \|u(x)\| = \|x\|.$$

Réciproquement, soit u une isométrie vectorielle et $(x, y) \in E^2$; d'après l'identité de polarisation $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$,

$$\begin{aligned} \langle u(x) | u(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

Donc u préserve le produit scalaire.

Propriété

Soit u une isométrie vectorielle ; alors u est inversible et $-u$ et u^{-1} sont aussi des isométries vectorielles.

Démonstration. Montrons que u est inversible : si $x \in \text{Ker } u$ alors $\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle O_E | O_E \rangle = 0$; mais donc $\langle x | x \rangle = 0$ et par définie positivité $x = O_E$; ainsi $u \in \text{GL}(E)$.

Clairement $-u$ est un endomorphisme de E et pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle -u(x) | -u(y) \rangle = \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle = \langle -x | -y \rangle$. Donc $-u$ est une isométrie vectorielle.

Enfin, soit $(x, y) \in E^2$; posons $\alpha = u^{-1}(x)$ et $\beta = u^{-1}(y)$ alors puisque $\langle u(\alpha) | u(\beta) \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$, on obtient : $\langle u^{-1}(x) | u^{-1}(y) \rangle = \langle x | y \rangle$; donc u^{-1} est une isométrie vectorielle. ■

Groupe orthogonal

Proposition-Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E noté $O(E)$, est appelé groupe orthogonal de E . C'est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$, c'est à dire :

- $O(E) \subset GL(E)$,
- $\forall u \in O(E), u^{-1} \in O(E)$,
- $\forall u, v \in O(E), u \circ v \in O(E)$.

Démonstration. Les deux premiers points découlent de la propriété précédente. Le dernier de la définition : $\forall x \in E, \|u \circ v(x)\| = \|v(x)\| = \|x\|$. ■

Caractérisation des isométries vectorielles

La caractérisation suivante des isométries vectorielles en tant qu'endomorphismes envoyant une base orthonormale sur une base orthonormale est très utile :

Théorème

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \in O(E)$
- (ii) *Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dont l'image par u est une base orthonormale.*
- (iii) *Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , l'image par u de $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.*

Démonstration.

(iii) $\implies$ (ii) est évident.

(i) $\implies$ (iii). Soit $u \in O(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .
On a alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

ce qui montre que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est aussi une base orthonormale de E .

(ii) $\implies$ (i). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit aussi une base orthonormale de E .

On a alors pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$ de E , $u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot u(e_k)$.

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ sont orthonormales, d'après la proposition 12 :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

donc $\|u(x)\| = \|x\|$: ainsi $u \in O(E)$. ■

Puisqu'une isométrie vectorielle préserve l'orthogonalité, on a naturellement :

Propriété

$(F \text{ stable par } u \in O(E) \implies F^\perp \text{ stable par } u)$

Si un sous-espace F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in O(E)$, son orthogonal $F^\perp$ est également stable par u .

Démonstration. Soit $F \subset E$ stable par $u \in O(E)$; soit $x \in F^\perp$, montrons que $u(x) \in F^\perp$.

Puisque u est un automorphisme, que $u(F) \subset F$ et que F est de dimension finie, $u(F) = F$.
Donc u^{-1} est aussi une isométrie vectorielle qui laisse stable F . Alors pour tout $y \in F$:

$$\langle u(x) \mid y \rangle = \langle \underbrace{u^{-1}(u(x))}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{u^{-1}(y)}_{\in F} \rangle = \langle x \mid u^{-1}(y) \rangle = 0.$$

et donc $u(x) \in F^\perp$. ■

Propriété

(Spectre d'une isométrie vectorielle)

Soit u une isométrie vectorielle ; ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1 .

Démonstration. Si λ est une valeur propre, alors il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tels que $u(x) = \lambda \cdot x$ et donc $\|u(x)\| = \|x\| = \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ et donc $|\lambda| = 1$. ■

Remarque. Une isométrie vectorielle peut avoir un spectre (réel) vide. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme u de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une isométrie vectorielle, puisqu'elle envoie la base canonique (e_1, e_2) , qui est orthonormale, sur la base orthonormale $(e_2, -e_1)$. Son polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = X^2 + 1$ qui n'a aucune racine réelle.

Matrices orthogonales - Groupe Orthogonal

Définition

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si :

$$M^T M = I_n$$

c'est-à-dire si sa transposée est son inverse $M^T = M^{-1}$.

Proposition-Définition

L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $O_n(\mathbb{R})$ ou plus simplement $O(n)$:

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$$

Démonstration. Toute matrice de $O(n)$ est inversible. Il s'agit de montrer que pour toutes matrices $M, N \in O(n)$, on a aussi $MN \in O(n)$ et $M^{-1} \in O(n)$.

$$(MN)^T MN = (N)^T \underbrace{M^T M}_{=I_n} N = N^T N = I_n \implies MN \in O(n)$$

$$(M^{-1})^T M^{-1} = (M^T)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^{-1} M^{-1} = MM^{-1} = I_n$$



Groupe spécial orthogonal

Proposition

Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration. En effet, $1 = \det(I_n) = \det(M^T M) = \det(M^T) \det(M) = \det(M)^2$. ■

Proposition-Définition

On note :

$$SO_n(\mathbb{R}) = SO(n) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1 \right\}$$

appelé le groupe spécial orthogonal ; c'est un sous-groupe du groupe orthogonal (appelé aussi sous-groupe des rotations).

Démonstration. Produit et inverse de matrices de $O(n)$ de déterminants 1 sont aussi de déterminant 1. ■

Remarque. Les matrices de $SO(n)$ sont appelées les matrices de rotation.

Remarque. Notons C_i la i -ème colonne d'une matrice carrée M . La matrice $M^T M$ a pour coefficient ligne i colonne j le produit scalaire scalaire usuel $C_i^T C_j$ de ses colonnes C_i et C_j .

Ainsi une matrice orthogonale est une matrice dont les matrices colonnes forment une famille orthonormale (et donc une base orthonormale) pour le produit scalaire usuel.

Caractérisation matricielle des isométries vectorielles

Puisqu'un automorphisme orthogonal (isométrie vectorielle) est caractérisé par le fait d'envoyer une base orthonormale sur une base orthonormale, sans surprise vu la remarque précédente, les isométries vectorielles sont caractérisées par le fait d'avoir une matrice orthogonale pour matrice dans une base orthonormale.

Théorème

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \in O(E)$
- (ii) *il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.*
- (iii) *pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.*

Démonstration. Comme déjà remarqué (remarque page 9), si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice dans $\mathcal{B}$, $M = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est la i -ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ et donc $a_{i,j} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$.

(iii) $\implies$ (ii) est évident.

(i) $\implies$ (iii). Soit $u \in O(E)$; u est inversible et d'après la remarque précédente $M^T = (\langle e_j | u(e_i) \rangle)_{i,j}$ et $M^{-1} = (\langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle)_{i,j}$; or en composant par u :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle \underset{uo}{=} \langle u(e_i) | e_j \rangle \implies M^{-1} = M^T$$

Donc la matrice de u est orthogonale dans toute base orthonormée.

(ii) $\implies$ (i). Soit $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ orthogonale dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E : $M^{-1} = M^T$. Donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $\langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle = \langle u(e_i) | e_j \rangle$.

Soient $x = \sum_i x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_j y_j \cdot e_j$ quelconques dans E . Par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \langle x | u^{-1}(y) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j \cdot u^{-1}(e_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i | u^{-1}(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot u(e_i) \middle| \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right\rangle = \langle u(x) | y \rangle \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(x, z) \in E^2$, $\langle u(x) | u(z) \rangle \underset{y=u(z)}{=} \langle x | u^{-1}(u(z)) \rangle = \langle x | z \rangle$. Donc u préserve le produit scalaire, c'est une isométrie vectorielle. ■

Corollaire

- Toute isométrie vectorielle $u \in O(E)$ a pour déterminant $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
- Toute matrice orthogonale $M \in O(n)$ a pour spectre $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition-Définition

(Groupe spécial orthogonal $SO(E)$)

On appelle groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E , noté $SO(E)$, l'ensemble :

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$$

C'est un sous-groupe de $O(E)$.

Démonstration. Si $u, v \in SO(E)$ alors $u \circ v \in O(E)$, $u^{-1} \in O(E)$ et :

$$\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v) = 1 \quad ; \quad \det(u^{-1}) = \det(u)^{-1} = 1.$$

Application : orientation d'un espace vectoriel réel

Rappelons que si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , pour toute famille $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{B}'$, noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs x_i de la famille dans la base $\mathcal{B}$. On aura alors que $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Orienter E , c'est choisir l'un des deux ensembles $\{\mathcal{B}' \in E^n \mid \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0\}$ ou $\{\mathcal{B}' \in E^n \mid \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0\}$ appelés respectivement ensemble des bases directes, et ensemble des bases indirectes.

Remarque. Ainsi le choix d'une base scinde les bases en deux catégories, les bases directes et les bases indirectes. Après un tel choix, l'espace vectoriel est dit orienté.

Image d'une b.o.n. par une isométrie vectorielle

Dans le cas de bases orthonormales :

Théorème

L'image d'une base orthonormale directe par une isométrie vectorielle de déterminant 1 est une b.o.n. directe et par une isométrie vectorielle de déterminant -1 est une b.o.n. indirecte.

(Il s'agit même d'une caractérisation des isométries vectorielles et de leur déterminant.)

Démonstration. L'image d'une base orthonormale par une isométrie vectorielle est une base orthonormale (théorème 3). De plus pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base, ici orthonormale directe, et $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ alors :

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

et donc $\mathcal{B}'$ est orthonormale et directe si $\det(u) > 0$, indirecte si $\det(u) < 0$, c'est-à-dire selon que $\det(u) = 1$ ou $\det(u) = -1$ (corollaire 8). ■

Théorème

(Changement de bases orthonormales directes)

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E , et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E .

Alors

- $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale directe de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme qui envoie les vecteurs de $\mathcal{B}$ sur les vecteurs de $\mathcal{B}'$. D'après le théorème 3, $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale si et seulement si $u \in O(E)$, et d'après le théorème 7 si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$. Or par définition $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. De plus $\mathcal{B}'$ sera orthonormale directe, ssi $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) > 0$, c'est à dire ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$. ■

Endomorphismes autoadjoints

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est un endomorphisme autoadjoint, ou symétrique, de E lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est noté $\mathcal{S}(E)$.

Exemples.

- id_E et $-\text{id}_E$ sont autoadjoints dans l'espace euclidien E . Il en est de même des homothéties $\lambda \cdot \text{id}_E$.
- Les symétries orthogonales sont autoadjointes. En effet puisque ce sont des isométries vectorielles :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid s(y) \rangle = \langle s(x) \mid s^2(y) \rangle = \langle s(x) \mid y \rangle$$

puisque $s \circ s = \text{id}_E$.

- Chapitre 13 : II. Endomorphismes de l'espace euclidien

Exercice. Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$; montrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si u et v commutent.

Résolution.

Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$ et soient $(x, y) \in E^2$:

$$\langle x \mid u \circ v(y) \rangle = \langle u(x) \mid v(y) \rangle = \langle v \circ u(x) \mid y \rangle \quad (1)$$

Ainsi si u et v commutent, alors $u \circ v \in \mathcal{S}(E)$.

Réciproquement, $u \circ v \in \mathcal{S}(E)$ ssi $\forall (x, y) \in E^2$:

$$\langle u \circ v(x) \mid y \rangle = \langle v \circ u(x) \mid y \rangle \iff \langle u \circ v(x) - v \circ u(x) \mid y \rangle = 0$$

En particulier pour $y = u \circ v(x) - v \circ u(x)$:

$$\implies \|u \circ v(x) - v \circ u(x)\|^2 = 0 \implies u \circ v(x) = v \circ u(x)$$

puisque c'est vrai pour tout $x \in E$, u et v commutent.

Caractérisation des projections/symétries orthogonales

Théorème

Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

De même, une symétrie s est orthogonale (c'est à dire de F parallèlement à $F^\perp$) si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Démonstration. On a déjà traité en exemple la preuve du sens direct $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Supposons que p soit un projecteur autoadjoint. Alors pour tout $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \ker(p)$:

$$\langle x | y \rangle = \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle = \langle x | 0_E \rangle = 0$$

donc $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux : p est une projection orthogonale.

Si s est une symétrie autoadjointe, alors son projecteur associé $p = \frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$ est autoadjoint comme combinaison linéaire d'endomorphismes autoadjoints. Ainsi, d'après ce qui précède $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$ et donc s est une symétrie orthogonale (de $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$). ■

Réflexions

Parmi les symétries orthogonales on distingue les réflexions.

Définition

Une réflexion d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, c'est à dire un sev de dimension $\dim(E) - 1$.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Les endomorphismes autoadjoints sont ceux dont la matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Théorème

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$: les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est un endomorphisme autoadjoint.*
- (ii) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.*
- (iii) Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.*

Démonstration. On rappelle que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})$, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est la i -ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ et donc $a_{i,j} = \langle e_i \mid u(e_j) \rangle$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 u \text{ est autoadjoint} &\iff \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle \\
 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle e_i \mid u(e_j) \rangle = \langle u(e_i) \mid e_j \rangle \quad \text{par bilinéarité car } \mathcal{B} \text{ base} \\
 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \langle e_i \mid u(e_j) \rangle = \langle e_j \mid u(e_i) \rangle \quad \text{par symétrie} \\
 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = a_{j,i} \\
 &\iff A \text{ est symétrique.}
 \end{aligned}$$

■

Remarques.

- En considérant pour $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , l'isomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}} u \end{cases}$$

on en déduit que la dimension de $\mathcal{S}(E)$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

- Soit M une matrice symétrique, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme canonique de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R}) : X \mapsto MX$ est autoadjoint pour la structure euclidienne usuelle de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$. En effet soient $(X, Y) \in \text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X \mid MY \rangle = \text{tr}(X^T MY) = \text{tr}(X^T M^T Y) = \text{tr}((MX)^T Y) = \langle MX \mid Y \rangle.$$

Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E .

- Si F est un sous-espace stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u et l'endomorphisme induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ est aussi autoadjoint ;
 $u_F \in \mathcal{S}(F)$.
- Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$ alors pour tout $f \in F$, $\langle u(x) | f \rangle = \langle x | u(f) \rangle = 0$ donc $u(x) \in F^\perp$ et bien sur $u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$; $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ et donc $\langle u(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle = \mu \langle x | y \rangle$ par bilinéarité. Donc si $\lambda \neq \mu$ alors $\langle x | y \rangle = 0$; et puisque c'est vrai pour tout $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$, alors $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. ■

Théorème spectral

Le résultat suivant est très important :

Théorème

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E . Alors u est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Démonstration. (Non exigible).

Par récurrence forte sur $\dim E = n$.

(I) Si $n = 1$ c'est clair.

(H) Supposons l'assertion vraie dans tout sous-espace de dimension $< n$. Soit E de dimension n et u un endomorphisme autoadjoint de E .

Soit M une représentation matricielle de u dans une b.o.n. de E et soit λ une valeur propre éventuellement complexe de M associé à un vecteur propre $X = (x_i)_{i=1 \dots n} \in \text{Mat}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On a $\overline{X}^T M X$ est une matrice $(1, 1)$ (un scalaire) :

$$\overline{X}^T M X = \overline{X}^T \lambda \cdot X = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

elle est donc égale à sa transposée :

$$\overline{X}^T M X = \left(\overline{X}^T M X \right)^T = X^T M^T \overline{X} = X^T M \overline{X}$$

puisque M est symétrique. Or M étant réelle λ est une valeur propre associée à X ssi $\overline{\lambda}$ est une valeur propre associée à $\overline{X}$:

$$M X = \lambda X \iff \overline{M X} = \overline{\lambda X} \iff \overline{M} \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X} \iff M \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$$

puisque somme et produit de conjugués sont les conjugués des somme et produit. Ainsi :

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \overline{X}^T M X = X^T M \overline{X} = \overline{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

et donc puisque $X \neq 0$, $\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \neq 0$, et donc $\lambda = \overline{\lambda}$. Ainsi la valeur propre λ est réelle. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u , et d'après la proposition 14 son orthogonal $E_\lambda(u)^\perp$ est aussi stable par u et l'endomorphisme induit $u_{E_\lambda(u)^\perp}$ est aussi autoadjoint.

On considère alors une base orthonormée de $E_\lambda(u)$ que l'on complète en une base de E grâce à une base orthonormée de vecteurs propres dans $E_\lambda(u)^\perp$ donnés par l'hypothèse de récurrence (puisque $\dim u_{E_\lambda(u)^\perp} < n$). On construit ainsi une base orthonormée constituée de vecteurs propres de u ; u est diagonalisable dans une base orthonormée. ■

Reformulation matricielle

Reformulons matriciellement ces résultats : puisque la matrice d'un endomorphisme autoadjoint est dans une base orthonormale, symétrique, ils se reformulent pour les matrices symétriques réelles. Dans la suite on se donne $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne classique :

$$\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M | M' \rangle = \text{tr}(M^T M')$$

et on désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sev des matrices symétriques réelles.

Proposition

(Sous-espaces propres orthogonaux)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; les sous-espaces propres de la matrice A sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration. Puisque A est symétrique, l'endomorphisme $u : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est autoadjoint comme déjà remarqué ; Or ses éléments propres sont ceux de la matrice A . Le résultat découle donc de la proposition 14. ■

Théorème spectral : formulation matricielle

Théorème

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec pour matrice de passage une matrice orthogonale, c'est-à-dire que :

Pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, telles que

$$P^{-1}MP = P^T MP = D.$$

Démonstration. On considère encore l'endomorphisme $u : X \mapsto MX$ de $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$; il est autoadjoint puisque M est symétrique réelle, et ses éléments propres sont ceux de la matrice M . D'après le théorème spectral, M est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres ; la matrice de passage correspondante est celle dans la base canonique, qui est orthonormale pour le produit scalaire usuel, d'une famille orthonormale, c'est donc d'après le théorème 10 une matrice orthogonale. ■

Remarque. Ce résultat est en défaut pour les matrices symétriques complexes.
Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \text{ a pour polynôme caractéristique } \chi_M(X) = X^2$$

et n'est donc pas diagonalisable (autrement elle serait semblable à la matrice nulle).

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition

Un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ d'une espace euclidien E est dit :

- positif si $\forall x \in E, \langle x \mid u(x) \rangle \geq 0$.
- défini positif si $\forall x \in E \setminus \{O_E\}, \langle x \mid u(x) \rangle > 0$.

L'ensemble des endomorphismes :

- positifs est noté $\mathcal{S}^+(E)$,
- définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Matrices symétriques positives, définies positives

Matriciellement, la définition se reformule pour les matrices symétriques :

Définition

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite :

- positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$.
- définie positive si $\forall X \in E\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_n\}, X^T M X > 0$.

L'ensemble des matrices :

- positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
- définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarques.

- Un endomorphisme autoadjoint défini positif définit un produit scalaire sur E :

$$(x, y) \mapsto \langle x \mid u(y) \rangle$$

puisque l'application est :

- bilinéaire, par bilinéarité de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et linéarité de u ,
- symétrique, par symétrie de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et car u est autoadjoint :

$$\langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(y) \mid x \rangle = \langle y \mid u(x) \rangle$$

- définie positive par défini positivité de u .
- Une matrice symétrique définie positive définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$(X, Y) \mapsto X^T M Y$$

puisque l'application est :

- bilinéaire, par bilinéarité de $(X, Y) \mapsto X^T Y$ et linéarité de $Y \mapsto M Y$,
- symétrique, par symétrie de $(X, Y) \mapsto X^T Y$ et car M est symétrique :

$$X^T M Y = (M Y)^T X = Y^T M^T X = Y^T M X$$

- définie positive par défini positivité de M .

Caractérisation spectrale

Avec le théorème spectral, les endomorphismes/matrices positifs/défini positifs sont caractérisés par leurs valeurs propres :

Théorème

- *Un endomorphisme autoadjoint est :*
 - *positif ssi ses valeurs propres sont positives,*
 - *défini positif ssi ses valeurs propres sont strictement positives.*
- *Une matrice symétrique est :*
 - *positive ssi ses valeurs propres sont positives,*
 - *définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives.*

Démonstration. Pour un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{S}(E)$: d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. Soit $x \in E$, $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n$, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (éventuellement avec répétition) :

$$\begin{aligned} \langle x \mid u(x) \rangle &= \langle x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n \mid u(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n) \rangle \\ &= \langle x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n \mid \lambda_1 \cdot x_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n e_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \langle x \mid u(x) \rangle \geq 0 &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0 \\ \forall x \in E \setminus \{O_E\}, \langle x \mid u(x) \rangle > 0 &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0 \end{aligned}$$

Pour une matrice symétrique M , l'argument est identique en considérant l'endomorphisme $X \mapsto MX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et le produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^T Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ■

Classification des isométries du plan euclidien

On se place dans l'espace euclidien orienté E de dimension 2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe, u une isométrie vectorielle de E , et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice M est orthogonale d'après le théorème 7. Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1 \text{ et } aa' + bb' = 0$$

D'après la première égalité il existe $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta' \\ \sin \theta & \sin \theta' \end{pmatrix}$$

Pour cela :

$$\theta = \begin{cases} \text{Arccos}(a) & \text{si } b \geq 0 \\ -\text{Arccos}(a) & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta' = \begin{cases} \text{Arccos}(a') & \text{si } b' \geq 0 \\ -\text{Arccos}(a') & \text{si } b' < 0 \end{cases}$$

La deuxième égalité devient alors :

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta - \theta') = 0$$

D'où :

$$\theta - \theta' \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \theta' \equiv \theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Or :

$$\cos \theta' = \cos \left(\theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -\varepsilon \cdot \sin \theta$$

$$\sin \theta' = \sin \left(\theta + \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \varepsilon \cdot \cos \theta$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\varepsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{pmatrix} \implies \det(M) = \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta = \varepsilon$$

et réciproquement une telle matrice est orthogonale.

On obtient :

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors :

- $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotations

Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

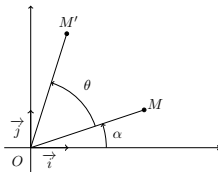
est appelée matrice de rotation d'angle θ . L'endomorphisme $u \in SO(E)$ de matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M(\theta)$ est appelé rotation d'angle θ .

En effet, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons la rotation R_θ de centre l'origine et d'angle θ : pour un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan :

$$r = OM \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha [2\pi] \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ = r \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j})$$

son image $R_\theta(M) = M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vérifie :

$$r = OM' \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \alpha + \theta [2\pi] \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{OM'} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \\ = r \cdot (\cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \theta) \cdot \vec{j})$$



Les coordonnées de M' s'obtiennent de celles de M par :

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = x \sin \theta + y \cos \theta$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La composée de deux rotations est une rotation ; matriciellement on obtient :

Proposition

(Composée de deux rotations)

Soient $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$; on a :

$$M(\theta_1) \times M(\theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2)$$

En particulier deux matrices de rotations commutent entre elles.

Démonstration. Découle immédiatement par produit matriciel du développement du cos et du sin d'une somme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

■

Remarque. En particulier l'inverse de $M(\theta)$ est $M(\theta)^{-1} = M(-\theta)$ puisque $M(0) = I_2$.

Corollaire

$$M(\theta)^{-1} = M(-\theta)$$

La notion d'angle orienté entre deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ peut être défini à l'aide des rotations.

Proposition-Définition

(Angle orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$)

Soient x, y deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien orienté $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Il existe une unique isométrie vectorielle $u \in SO(E)$ qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.

Si sa matrice dans une base orthonormée directe est $M(\theta)$, θ est la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs x et y ; il est défini modulo 2π .

Démonstration. Puisque $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont des sev de dimension 1 dans un ev de dimension 2, leur orthogonal est de dimension 1 ; ainsi il existe un unique vecteur $x' \in \text{Vect}(x)^\perp$ et un unique vecteur $y' \in \text{Vect}(y)^\perp$ tels que $\mathcal{B} = \left(\frac{x}{\|x\|}, x' \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\frac{y}{\|y\|}, y' \right)$ soient des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème 10 la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$, c'est donc la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une isométrie vectorielle $u \in SO(E)$ qui envoie la base $\left(\frac{x}{\|x\|}, x' \right)$ terme à terme sur $\left(\frac{y}{\|y\|}, y' \right)$; d'où l'existence. Et puisqu'un endomorphisme est caractérisé par son image d'une base, c'est le seul qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. Pour l'unicité, une isométrie vectorielle qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$ envoie aussi $\text{Vect}(x)^\perp$ sur $\text{Vect}(y)^\perp$, et si elle envoie x' sur y' , soit $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. ■

Réflexions

Proposition

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$; il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\text{Vect}(e_\theta)$ avec

$$e_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2$$

Démonstration. Calculons son polynôme caractéristique :

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & X + \cos \theta \end{vmatrix} = X^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = X^2 - 1 \implies \text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$$

Donc u est une réflexion par rapport à son sous-espace propre $E_1(u)$, qu'il suffit de déterminer; $E_1(u)$ est de dimension 1. Or $e_\theta = \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2$ en est vecteur propre puisque :

$$\begin{aligned} u(e_\theta) &= \left(\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_1 + \left(\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_2 \\ &= \cos \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_1 + \sin \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \cdot e_2 \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot e_1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot e_2 = e_\theta \end{aligned}$$

Ainsi $E_1(u) = \text{Vect}(e_\theta)$. ■

Exercice. Notons $R(\theta)$ la matrice de rotation θ ; $R(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $P \in O_2(\mathbb{R})$,

$$P^{-1}R(\theta)P = R(\pm\theta).$$

2. Montrer si $P \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $P^{-1}R(\theta)P = R(\theta)$.

3. Montrer que si $P \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ alors $P^{-1}R(\theta)P = R(-\theta)$.

(Indication : remarquer que P s'écrit alors $R(\theta') \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.)

Résolution.

1. On a $P^{-1}R(\theta)P \in O_2(\mathbb{R})$ et

$$\det(P^{-1}R(\theta)P) = \det(P)^{-1} \det(R(\theta)) \det(P) = \det(R(\theta)) = 1$$

ainsi c'est une matrice de rotation $R(\theta')$. Puisque la trace est un invariant de similitude, on obtient $2 \cos \theta' = 2 \cos \theta$, soit $\cos \theta' = \cos \theta$. Ainsi $\theta' \equiv \pm \theta \pmod{2\pi}$.

2. Si $P \in SO_2(\mathbb{R})$, alors c'est une matrice de rotation, elle commute donc avec $R(\theta)$. Ainsi $P^{-1}R(\theta)P = R(\theta)$.

3. Si $P \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ alors il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ \sin \theta' & -\cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= R(\theta') \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En particulier :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times R(-\theta')$$

et donc :

$$\begin{aligned} P^{-1}R(\theta)P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times R(-\theta') \times R(\theta) \times R(\theta') \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta) \end{aligned}$$