Chapitre 13 : Espaces vectoriels normés

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Norme

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; n désigne un entier naturel non nul.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle norme sur E toute application $\mathrm{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall x \in E, \mathrm{N}(x) \geqslant 0$, *et* *(positivité)*
- $\forall x \in E, \mathrm{N}(x) = 0 \implies x = O_E$ *(séparation)*
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x)$ *(homogénéité)*
- $\forall (x, y) \in E^2, \mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que le couple (E,N) est un espace vectoriel normé.

Remarque. Une norme sur E est souvent notée $\|\cdot\|$, notation que l'on utilisera prioritairement dans ce cours.

Inégalité triangulaire

Toute norme vérifie l'inégalité triangulaire, au sens fort.

Propriété

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On a alors :

- *Pour tout $(x, y) \in E^2$,* $\quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- *Pour tout $(x_i) \in E^n$ et $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$,* $\quad \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|x_i\|$.

Démonstration. Pour la double inégalité ; la partie majoration découle de la définition de la norme. Pour la partie minoration :

$$\|x\| = \|x + y - y\| \leqslant \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x + y\|$$

Et en échangeant le rôle de x et y : $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x + y\|$

$$\implies \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x + y\|$$

La seconde inégalité découle par une récurrence immédiate sur n, de le définition, en appliquant inégalité triangulaire et homogénéité. ∎

Remarque. Bien sûr, en appliquant la formule à x et $-y$, et par homogénéité :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Remarques. Les faits suivants sont élémentaires :

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\lambda > 0$, alors $\lambda\|\cdot\|$ est une norme sur E. Si $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont deux normes sur E alors $\|\cdot\|_a + \|\cdot\|_b$ est aussi une norme sur E.
- La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1) ; c'est aussi une norme sur $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2) ; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront en général implicitement munis de ces normes.
- Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel, alors l'application $\|\cdot\|_2 : x \to \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E associée au produit scalaire, appelée norme euclidienne.
- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E, alors la restriction $\|\cdot\|_F$ de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F.

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les applications suivantes sont des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$,

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (|x_k|)$$

Démonstration. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la deuxième est la norme associée au produit scalaire usuel ; mais lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'argument ne s'applique plus. Ce sont clairement des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (somme ou maximum de réels positifs). Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

– Séparation :

$$\|x\|_1 = 0 \implies \sum |x_k| = 0 \implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0 \implies x = O_E.$$
$$\|x\|_2 = 0 \implies \sum |x_k|^2 = 0 \implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0 \implies x = O_E.$$
$$\|x\|_\infty = 0 \implies \max |x_k| = 0 \implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0 \implies x = O_E.$$

– Homogénéité :

$$\|\lambda \cdot x\|_1 = \sum |\lambda x_k| = \sum |\lambda|\,|x_k| = |\lambda| \sum |x_k| = |\lambda|\,\|x\|_1$$
$$\|\lambda \cdot x\|_2 = \sqrt{\sum |\lambda x_k|^2} = \sqrt{\sum |\lambda|^2\,|x_k|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum |x_k|^2} = |\lambda|\,\|x\|_2$$
$$\|\lambda \cdot x\|_\infty = \max |\lambda x_k| = \max |\lambda|\,|x_k| = |\lambda| \max |x_k| = |\lambda|\,\|x\|_\infty$$

– Inégalité triangulaire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \implies \sum |x_k + y_k| \leqslant \sum |x_k| + \sum |y_k| \implies \|x + y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1, \text{ et :}$$

$$\implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k + y_k| \leqslant \max_i |x_i| + \max_j |y_j|$$

$$\implies \max_k |x_k + y_k| \leqslant \max_i |x_i| + \max_j |y_j|$$

$$\implies \|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

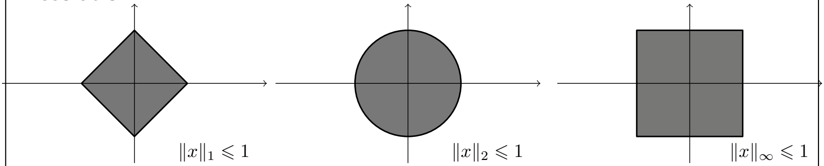
En posant $\tilde{x} = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $\tilde{y} = (|y_1|, \dots, |y_n|)$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, et avec l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$

$$\|x + y\|_2 = \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2 \leqslant \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

■

Exercice. Dessiner dans le plan muni d'un repère orthonormé, les boules unité de $\mathbb{R}^2$, $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ pour ces normes.

Résolution.



• Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E ; les formules précédentes appliquées à $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ permettent de définir des normes usuelles sur E ; bien sûr, elles dépendent de la base choisie.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E ; pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (|x_k|)$$

définissent des normes sur E.

Démonstration. C'est la même que dans le cas de $\mathbb{K}^n$. ∎

- Dans $\mathbb{K}_n[X]$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$:

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \qquad \|P\|_\infty = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$$

Ces formules définissent aussi des normes dans $\mathbb{K}[X]$.

- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, si $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$:

$$\|M\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2} \qquad \|M\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ est bien celle associé au produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle M \mid N \rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$. En effet :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ (M^T M)_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} (M^T)_{j,i} M_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 \implies \|M\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$$

• Soit X un ensemble quelconque non vide. L'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$:

$$\mathscr{B}(X,\mathbb{K}) = \left\{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \;\middle|\; \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M\right\}$$

est un sev du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de X dans $\mathbb{K}$. On peut le munir de la norme :

Proposition

(Norme de la convergence uniforme)

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$, admet la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

appelée norme de la convergence uniforme.

Démonstration. Puisque f et bornée, $\sup_{x\in X}|f(x)|$ existe ; c'est un réel positif.

Séparation. Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $\forall x \in X, 0 \leqslant |f(x)| \leqslant \sup|f(x)| = 0$, donc $f = 0$.

Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sup_{x\in X}|\lambda \cdot f(x)| = |\lambda|\sup_{x\in X}|f(x)|$; en effet :

Posons $\ell = \sup_{x\in X}|f(x)|$; autrement dit ℓ est un majorant de $\{|f(x)|; x \in X\}$ et il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $|f(x_n)|$ converge vers ℓ. Mais alors $|\lambda|\ell$ et un majorant de $\{|\lambda f(x)|; x \in X\}$ et la suite $|\lambda f(x_n)|$ converge vers $|\lambda|\ell$. CQFD

Inégalité triangulaire. Soient $f, g \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$; pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
& |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \\
\Longrightarrow\ & |f(x) + g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| \\
\Longrightarrow\ & \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| \\
\Longrightarrow\ & \|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty
\end{aligned}$$

■

Remarque. Comme le spécifie le programme officiel, on pourra à l'avenir utiliser sans autre justification que si $k \in \mathbb{R}_+$, et $A \subset \mathbb{R}$ est majoré, alors $\sup(kA) = k \sup(A)$.

• Soient $a < b$ deux réels ; les applications suivantes sont des normes sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \qquad \text{(norme de la convergence en moyenne)}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \qquad \text{(norme de la convergence en moyenne quadratique)}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad \text{(norme de la convergence uniforme)}$$

Pour la dernière ça découle du point précédent, puisque toute application continue sur $[a,b]$ est bornée, d'après le théorème des bornes atteintes.

Pour la seconde, c'est la norme associée au produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Reste à établir que la première est bien une norme.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \qquad \text{(norme de la convergence en moyenne)}$$

La positivité est claire.

Séparation. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ tel que $\|f\|_1 = 0$. Une fonction positive et continue d'intégrale nulle sur $[a,b]$ est nulle. Donc $f = 0$.

Homogénéité. Soient $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \cdot \|f\|_1 \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

Inégalité triangulaire.

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)| + |g(t)|\mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et par croissance de l'intégrale.

• Si $(E_1, \|.\|_{E_1})$, ..., $(E_n, \|.\|_{E_n})$ sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriels normés, on peut munir leur produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme :

$$\begin{array}{rccc} \|.\|_\infty : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k\|_{E_k} \end{array}$$

En effet : la positivité est claire.
Séparation : si $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = 0$ alors pour tout $i \in [[1, n]]$,
$\|x_i\|_{E_i} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k\|_{E_k} = 0 \implies x_i = O_{E_i}$ et donc $x = O_E$.
Homogénéité : $\|\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda| \, \|x_k\|_{E_k} = |\lambda| \, \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty$.
Inégalité triangulaire :
$\|(x_1, \ldots, x_n) + (x_1', \ldots, x_n')\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k + x_k'\|_{E_k} \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k\|_{E_k} + \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|x_k'\|_{E_k} \leqslant$
$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty + \|(x_1', \ldots, x_n')\|_\infty$

Distance associée à une norme

Une norme dans un espace vectoriel permet de définir une distance entre deux vecteurs :

Proposition-Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors l'application

$$d : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \|y - x\| \end{array}$$

possède les propriétés suivantes ; pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- $d(x, y) \geqslant 0$ *(positivité)*
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(séparation)*
- $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que d est la distance sur E associée à la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration. Découle facilement de la définition de la norme. Soient $(x, y, z) \in E^3$,

– $d(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$ (positivité).

– $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = O_E \iff x = y$ (séparation).

– $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$ (symétrie).

– $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire). ∎

Remarque. On obtient aussi facilement que pour tout $(x, y, z) \in E^3$,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y) \quad \text{et} \quad d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

(la première découle de l'inégalité triangulaire (au sens fort) et la deuxième de la définition).

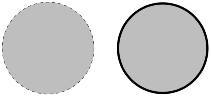
Boules, sphères

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.

- *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$B(a,r) = \left\{x \in E \mid \|x-a\| < r\right\}.$$
- *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$\overline{B(a,r)} = \left\{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\right\}.$$
- *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$S(a,r) = \left\{x \in E \mid \|x-a\| = r\right\}.$$
- *On appelle boule ouverte (resp. boule fermée, sphère) unité l'ensemble $B(0,1)$ (resp. $\overline{B(0,1)}$, $S(0,1)$).*
- *Un vecteur $u \in E$ est dit unitaire lorsque $\|u\| = 1$.*

Par exemple, pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$:



boule ouverte boule fermée

Exemples.

• Les boules ouvertes de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les intervalles ouverts bornés $]a, b[$ avec $a < b$:

D'une part $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$.

D'autre part pour $a < b$, $]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ puisque :

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2} \iff \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} < x < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \iff a < x < b$$

• Les boules fermées de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les intervalles fermés bornés $[a, b]$ avec $a < b$:

D'une part $\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leqslant r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$.

D'autre part pour $a < b$, $[a, b] = \overline{B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)}$ puisque :

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2} \iff \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \iff a \leqslant x \leqslant b$$

Parties, applications, suites, bornées

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

- *Une partie A de E est dite <u>bornée</u> s'il existe $M > 0$ tel que :*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leqslant M.$$

- *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite <u>bornée</u> s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leqslant M.$$

  (autrement dit $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée.)

- *Une fonction $f : B \longrightarrow E$ est dite <u>bornée</u> s'il existe $M > 0$ tel que :*

$$\forall x \in B, \|f(x)\| \leqslant M.$$

  (autrement dit $A = \{f(x), x \in B\}$ est bornée)

Exemples.

• Toute boule fermée ou ouverte, et toute sphère de E est une partie bornée de E : si $x \in B(a,r)$, ou $\overline{B(a,r)}$ ou $S(a,r)$, alors :

$$\|x\| = \|x-a+a\| \leqslant \|a\| + \|x-a\| \leqslant \|a\| + r = M$$

• Toute partie finie de E est une partie bornée de E. Si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors $\forall x \in A,\ \|x\| \leqslant \max(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|) = M$.

• Le seul sous-espace vectoriel borné de E est $\{0\}$. En effet soit $x \in E \setminus \{O_E\}$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lambda = \frac{2M}{\|x\|} \implies \|\lambda \cdot x\| = 2M > M \quad \text{et} \quad \lambda \cdot x \in Vect(x)$$

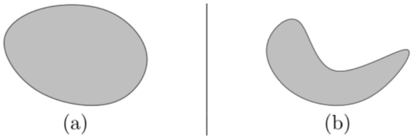
Partie convexe

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$.
A est dite une partie convexe de E lorsque pour tout $(a,b) \in A^2$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$ta + (1-t)b \in A.$$

Autrement dit en notant $[a,b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$ le segment d'extrémité a et b, on a $\forall (a,b) \in A^2, [a,b] \subset A$.



(a) : Ensemble convexe. (b) : Ensemble non convexe.

Les boules sont convexes

Proposition

Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $t \in [0,1]$ et $u = t \cdot x + (1-t) \cdot y$:

$$\|u - a\| = \|t \cdot x + (1-t) \cdot y - t \cdot a - (1-t) \cdot a\| \leqslant |t|\|x - a\| + |1-t|\|y - a\|$$

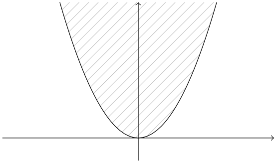
ainsi si $x, y \in B(a,r)$ $\quad \|u - a\| < t \times r + (1-t)r = r \implies u \in B(a,r)$

et si $x, y \in \overline{B(a,r)}$ $\quad \|u - a\| \leqslant t \times r + (1-t)r = r \implies u \in \overline{B(a,r)}$

∎

Remarque. Pour une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle épigraphe de f, l'ensemble :

$$epi(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\right\}$$



L'application f est convexe si et seulement si son épigraphe $epi(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. En effet :

Si $epi(f)$ est convexe, alors en particulier pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ appartenant à $epi(f)$, alors par convexité de $epi(f)$, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t.(x, f(x)) + (1-t)(x', f(x')) = (tx + (1-t)x', tf(x) + (1-t)f(x')) \in epi(f)$$

c'est à dire :

$$f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x')$$

et donc f est convexe.

Réciproquement, si f est convexe, soient $(x, y), (x', y') \in epi(f)$: $f(x) \leqslant y$ et $f(x') \leqslant y'$. Par convexité de f, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x') \leqslant ty + (1-t)y' \quad \text{car } t \geqslant 0 \text{ et } 1-t \geqslant 0$$

et donc :

$$t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in epi(f)$$

ainsi $epi(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

- $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0 \iff x = O_E$.
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \times N(x)$.

Montrer que N est une norme ssi $B = \{x \in E \mid N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.

Résolution.

Si N est une norme alors B est convexe d'après la proposition précédente. Il s'agit de montrer la réciproque. Pour cela il suffit de montrer que N satisfait l'inégalité triangulaire.

Soit $x, y \in E$; si x ou $y = O_E$ alors l'inégalité triangulaire est immédiate. Aussi supposons que $x, y \in E \setminus \{O_E\}$ et posons :

$$\tilde{x} = \frac{1}{N(x)} \cdot x \in B \qquad \tilde{y} = \frac{1}{N(y)} \cdot y \in B$$

Puisque B est convexe :

$$\frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\tilde{x}+\frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\tilde{y}\in B$$

(c'est le barycentre de $(\tilde{x},N(x))$ et $(\tilde{y},N(y))$) ; c'est à dire :

$$\frac{1}{N(x)+N(y)}x+\frac{1}{N(x)+N(y)}y\in B$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{N(x)+N(y)}N(x+y)\leqslant 1$$

soit

$$N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$$

Donc N est une norme sur E.

Suite convergente, divergente

Proposition-Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite réelle $(\|x_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Lorsqu'il existe, un tel vecteur ℓ est unique. On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ ou encore que ℓ est la limite de la suite $(x_n)_n$, et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \quad \text{ou encore} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Si la suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Démonstration. Le seul point à prouver est l'unicité de la limite : Soit ℓ et ℓ' deux limites de $(x_n)_n$; alors :

$$0 \leqslant \left\|\ell - \ell'\right\| \leqslant \left\|\ell - x_n\right\| + \left\|x_n - \ell'\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\left\|\ell - \ell'\right\| = 0$ d'où $\ell = \ell'$. ∎

Remarques.

• Bien sur la convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes ; une suite $(x_n)_n$ peut aussi être définie seulement pour les valeurs entières n à partir d'un certain rang n_0. Toutes les propriétés énoncées restent vraies pour de telles suites.

• Convergence et limite d'une suite dépendent a priori de la norme utilisée ! Nous verrons toutefois qu'en dimension finie, elle n'en dépendent pas ; mais ce n'est plus vrai en dimension infinie.

• La suite $(x_n)_n$ est divergente si :

$$\forall \ell \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \text{ et } \left\|x_n - \ell\right\| > \varepsilon$$

on peut alors construire pour tout ℓ, une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| > \varepsilon.$$

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente

Proposition

Si une suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ alors toute suite extraite $(x_{\sigma(n)})_n$ (c'est-à-dire avec $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante) converge vers ℓ.

Démonstration. En effet toute suite extraite $(\|x_{\sigma(n)} - \ell\|)_n$ de la suite réelle $(\|x_n - \ell\|)_n$ converge vers 0 et donc $x_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

∎

Toute suite convergente est borné

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $x_n \longrightarrow \ell$; pour $\varepsilon = 1$ par exemple,

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N &\Longrightarrow \|x_n - \ell\| \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \|x_n\| - \|\ell\| \leqslant 1 \qquad \text{(proposition 1)} \\ &\Longrightarrow \|x_n\| \leqslant 1 + \|\ell\| \end{aligned}$$

En posant $M_1 = \max\{\|x_0\|, \dots, \|x_N\|\}$ (qui existe en tant que maximum d'une partie finie de $\mathbb{R}$) et $M = \max(M_1, 1 + \|\ell\|)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant M$$

autrement dit la suite $(x_n)_n$ est bornée. ∎

Opérations sur les limites

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé,

- *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.*
- *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda x_n+\mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell+\mu\ell'$.*
- *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(\lambda_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\in\mathbb{K}$ alors la suite $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\cdot\ell$.*

Démonstration. Pour le premier point : d'après la proposition 1 : $0 \leqslant \big|\|x_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \|x_n-\ell\|$; puisque $\|x_n-\ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes $\big|\|x_n\| - \|\ell\|\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.

Pour le second point : Par homogénéité et inégalité triangulaire :

$$\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda \ell + \mu \ell'\|) \leqslant |\lambda| \underbrace{\|x_n - \ell\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + |\mu| \underbrace{\|y_n - \ell'\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour le dernier point : la suite $(x_n)_n$ étant convergente, elle est bornée, disons $\forall n,\ \|x_n\| \leqslant M$, et donc par inégalité triangulaire et homogénéité :

$$0 \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| = \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \underbrace{\|x_n\|}_{\leqslant M} + |\lambda| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\lambda_n \cdot x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \cdot \ell$. ■

Du deuxième point découle immédiatement :

Corollaire

L'ensemble S des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans E.
L'application qui à une suite convergente associe sa limite est une application linéaire de S dans E.

Normes équivalentes

Définition

Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites équivalentes si il existe deux réels $a, b > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ a\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b\|x\|$$

Propriété

Pour des normes sur un espace vectoriel E, être équivalentes est une relation d'équivalence, c'est à dire :

- *Réflexive : toute norme est équivalente à elle-même*
- *Symétrique : Si $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|'$ alors $\|.\|'$ est équivalente à $\|.\|$.*
- *Transitive : Si $\|.\|$ est équivalent à $\|.\|'$ qui est équivalente à $\|.\|''$ alors $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|''$.*

Démonstration. La réfléxivité est triviale en prenant $a = b = 1$.
Pour la symétrie, si $a\|.\| \leqslant \|.\|' \leqslant b\|.\|$ alors $\frac{1}{b}\|.\|' \leqslant \|.\| \leqslant \frac{1}{a}\|.\|'$.
Pour la transitivité, si $a\|.\| \leqslant \|.\|' \leqslant b\|.\|$ et $a'\|.\|' \leqslant \|.\|'' \leqslant b'\|.\|'$ alors $aa'\|.\| \leqslant \|.\|'' \leqslant bb'\|.\|$. ∎

Exemple. Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes ; plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$$

En effet, en posant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = |x_k|$:

$$\|x\|_\infty = |x_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_k| = n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \sqrt{|x_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Pour la dernière :

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$$

partie minoration : de

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

découle :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|x_i|^2}\right)^2 \underset{\sqrt{\cdot}\nearrow}{\Longrightarrow} \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|x_i|^2} = \|x\|_1$$

Partie majoration : en appliquant Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel à $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et $u = (1, \ldots, 1)$ on obtient la majoration :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \langle x \mid u \rangle \leqslant \|x\|_2 \times \|u\|_2 = \|x\|_2 \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}\|x\|_2$$

Des normes équivalentes définissent la même convergence

L'intérêt de la notion d'équivalence est la suivante :

Théorème

Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux norme équivalentes sur une $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, (x_n) est convergente dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si elle est convergente dans $(E, \|.\|')$ et de plus, en cas de convergence, elle converge vers la même limite dans $(E, \|.\|)$ et dans $(E, \|.\|')$.

Démonstration. Soient $a, b > 0$ tels que $a\|.\| \leqslant \|.\|' \leqslant b\|.\|$; si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans $(E, \|.\|)$ alors pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{b} \implies \|x_n - \ell\|' \leqslant b\|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans $(E, \|.\|')$.

Réciproquement, si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans $(E, \|.\|')$ alors pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \|x_n - \ell\|' \leqslant a\varepsilon \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \tfrac{1}{a}\|x_n - \ell\|' \leqslant \varepsilon$$

et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans $(E, \|.\|)$. ■

Et son intérêt est d'autant plus grand que :

Théorème

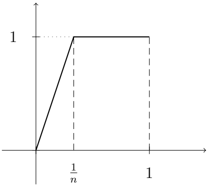
(Équivalence des normes en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. Admis. (Nous en donnerons une preuve en fin de chapitre.) ∎

Exemple. Le résultat est faux en dimension infinie ; il est facile de construire un contre-exemple. Soit (f_n) la suite d'applications dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$$



f_n tend vers f pour $\|.\|_1$ car :

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \left[x - n \times \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

f_n ne tend pas vers f pour $\|.\|_\infty$ car $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont donc non équivalentes dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Caractérisation de la convergence en dimension finie

En dimensions finie la convergence d'une suite de vecteurs équivaut à la convergence de ses coordonnées dans une base.

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie, et soit* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* E*. Pour tout vecteur* $x \in E$ *notons* $(x^1, \ldots, x^p) \in \mathbb{K}^p$ *ses coordonnées dans la base* E *:*

$$x = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + \cdots + x^p \cdot e_p$$

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* E *converge vers* $\ell \in E$ *si et seulement les suites de ses coordonnées convergent vers celles de* ℓ *:*

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_n^i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^i.$$

Démonstration. Soit $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$; en dimension finie toutes les normes étant équivalentes, (x_n) converge vers ℓ pour $\|.\|_\infty$. Ainsi : $\|x_n - \ell\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ 0 \leqslant |x_n^i - \ell^i| \leqslant \max_{i\in[\![1,p]\!]} |x_n^i - \ell^i| = \|x_n - \ell\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc (d'après le théorème des gendarmes), pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la suite scalaire $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ^i.

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la suite scalaire $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ^i. Soit $\varepsilon > 0$; pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:

$$\exists N_i \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_i \implies |x_n^i - \ell^i| \leqslant \frac{\varepsilon}{p}$$

et donc en posant $N = \max(N_1, \dots, N_p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \|x_n - \ell\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_n^i - \ell^i| \leqslant \frac{\varepsilon}{p} \times p = \varepsilon$$

et donc par définition, (x_n) converge vers ℓ pour $\|.\|_1$. Par équivalence des normes en dimension finie, (x_n) converge vers ℓ pour $\|.\|$. ■

Exemple. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme quelconque :

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n^2} & 1-\frac{2}{n} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Point intérieur d'une partie ; intérieur d'une partie

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$. Un élément $a \in A$ est appelé un point intérieur à A lorsqu'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A, c'est à dire lorsque :

$$\exists r > 0,\ B(a, r) \subset A$$

L'ensemble des points intérieurs à A, est noté $\mathring{A}$ et appelé intérieur de A ; bien sur $\mathring{A} \subset A$.

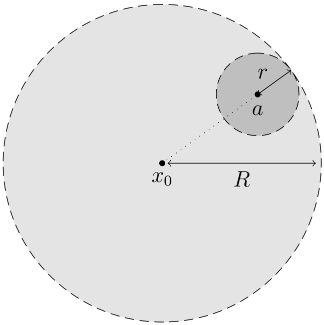
Exemples.

- Il découle immédiatement que $\mathring{\varnothing} = \varnothing$ et $\mathring{E} = E$. Si $A \subset B \subset E$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

• Si $B = B(x_0, R)$ est une boule ouverte, alors tout point de B est un point intérieur ; autrement dit $\mathring{B} = B$. En effet :

Soit $a \in B$; alors $\|a - x_0\| < R$. Notons $r = R - \|a - x_0\| > 0$; alors $B(a, r) \subset B$ puisque d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in B(a, r),\ \|x - a\| < r \implies \|x - x_0\| \leqslant \|x - a\| + \|a - x_0\| < \|a - x_0\| + R - \|a - x_0\| = R$$



• Si $\overline{B} = \overline{B(x_0, R)}$ est une boule fermée, alors les points intérieurs de $\overline{B}$ sont précisément les points de la boule ouverte $B(x_0, R)$; autrement dit :

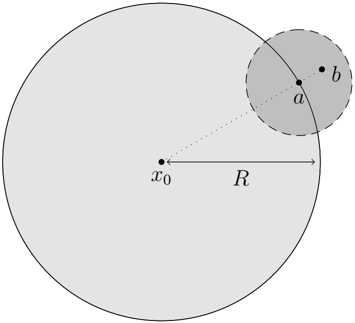
$$\overset{\circ}{\overline{B(x_0, R)}} = B(x_0, R).$$

En effet : l'argument précédent montre que tout point dans $B(x_0, R) \subset \overline{B(x_0, R)}$ est un point intérieur à $\overline{B(x_0, R)}$, et les points du cercle frontière, $C(x_0, R) = \overline{B(x_0, R)} \setminus B(x_0, R)$, ne sont pas intérieurs à $\overline{B(x_0, R)}$ puisque : soit $r > 0$ et $a \in C(x_0, r)$ quelconques.

Alors $\|a - x_0\| = R$ et pour : $b = a + \dfrac{r}{2R} \cdot (a - x_0)$:

$$\begin{cases} \|a-b\| = \frac{r}{2R}\|a-x_0\| = \frac{r}{2} < r \implies b \in B(a,r) \\ \|b-x_0\| = \left\|\left(1+\frac{r}{2R}\right)\cdot(a-x_0)\right\| = \left(1+\frac{r}{2R}\right)\times R = R + \frac{r}{2} > R \implies b \notin \overline{B(x_0,R)} \end{cases}$$

Ainsi pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(a,r)$ n'est pas incluse dans $\overline{B(x_0,R)}$.



Ouverts de E

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Une partie $A \subset E$ de E est appelée un ouvert de E, si tout point de A est un point intérieur à A, c'est-à-dire si

$$\mathring{A} = A$$

Exemples.

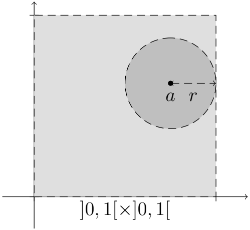
• Toutes les boules ouvertes sont des ouverts. Aucune boule fermée n'est un ouvert.

• $\varnothing$ et E sont des ouverts.

• Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert :

soit $a=(x_0,y_0)\in]0,1[\times]0,1[$;
posons $r=\min(x_0,1-x_0,y_0,1-y_0)>0$.
Alors :

$$B(a,r)\subset]0,1[\times]0,1[.$$



En effet, soit $v=(x,y)\in B(a,r)$ alors :

$$\|a-v\|_2<r \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

dont on déduit que $v=(x,y)\in]0,1[\times]0,1[$:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2<x_0^2 \Rightarrow |x-x_0|<x_0 \Rightarrow x_0-x_0<x<x_0+x_0 \Rightarrow 0<x \\ (x-x_0)^2\leqslant(1-x_0)^2 \Rightarrow |x-x_0|<1-x_0 \Rightarrow x_0-1+x_0<x<x_0+1-x_0 \Rightarrow x<1 \\ (y-y_0)^2<y_0^2 \Rightarrow |y-y_0|<y_0 \Rightarrow y_0-y_0<y<y_0+y_0 \Rightarrow 0<y \\ (y-y_0)^2\leqslant(1-y_0)^2 \Rightarrow |y-y_0|<1-y_0 \Rightarrow y_0-1+y_0<y<y_0+1-y_0 \Rightarrow y<1 \end{cases}$$

et donc $B(a,r)\subset]0,1[\times]0,1[$.

Propriété

(Les boules ouvertes sont des ouverts)

Toute boule ouverte de E est un ouvert de E.

Propriété

L'intérieur $\mathring{A}$ de A est un ouvert de E ; c'est le plus grand ouvert inclus dans A (au sens de l'inclusion).

Démonstration. Le même argument que dans l'exemple ci-dessus montre que si $B(a,r) \subset A$ alors tout point de $B(a,r)$ est un point intérieur à A. Ainsi si $a \in \mathring{A}$ alors a est aussi un point intérieur à $\mathring{A}$. Ainsi $\mathring{A}$ est un ouvert. Puisque tout ouvert inclus dans A ne contient que des points intérieurs à A, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. ∎

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

- *$\varnothing$ et E sont des ouverts de E.*
- *Toute réunion d'ouverts de E est un ouvert de E.*
- *Toute intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.*

Démonstration. On les établit dans l'ordre.

• On a $\mathring{\varnothing} = \varnothing$ et $\mathring{E} = E$; d'où la première assertion (comme déjà remarqué).

• Soit $\mathscr{F}$ une famille d'ouverts de E. Soit $x \in \bigcup_{O \in \mathscr{F}} O$; alors il existe $O \in \mathscr{F}$ tel que $x \in O$, et puisque O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O \subset \bigcup_{O \in \mathscr{F}} O$; ainsi $\bigcup_{O \in \mathscr{F}} O$ est un ouvert.

• Par récurrence sur le nombre $n \geqslant 2$ d'ouverts.

(I) Soient O_1, O_2 deux ouverts de E. Si $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ alors $O_1 \cap O_2$ est un ouvert. Sinon, soit $x \in O_1 \cap O_2$. Puisque O_1, O_2 sont des ouverts, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset O_1$ et $B(x, r_2) \subset O_2$. En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$ on a $B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset O_1$ et $B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset O_2$, donc $B(x, r) \subset O_1 \cap O_2$. Donc $O_1 \cap O_2$ est un ouvert.

(H) Supposons l'assertion vraie pour l'intersection de $n \geqslant 2$ ouverts ; soient $O_1, O_2, \ldots, O_n, O_{n+1}$ $(n+1)$ ouverts de E. Par hypothèse de récurrence $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est un ouvert, et donc par le même argument que dans la partie initialisation, son intersection avec O_{n+1}, qui n'est autre que $\bigcap_{i=1}^{n+1} O_i$, est aussi un ouvert. L'assertion reste donc vraie au rang $(n+1)$. ■

Exemples.

• Tous les intervalles ouverts de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont des ouverts : les ouverts bornés $]a, b[$ avec $a < b$ sont des boules ouvertes, $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ est un ouvert, et les intervalles ouverts ayant une seule borne infinie :

$$]-\infty, b\,[\, = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n<b}} \,]\,n,\ b\,[\qquad]\,a, +\infty\,[\, = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ a<n}} \,]\,a, n\,[$$

sont des ouverts en tant que réunions d'ouverts.

Mais tous les ouverts de $(\mathbb{R}, |.|)$ ne sont pas des intervalles ouverts, comme par exemple $]0, 1[\,\cup\,]1, 2[$.

• Une intersection d'une nombre infini d'ouverts n'est pas en général un ouvert, comme le montre l'exemple de :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \quad \text{ou plus généralement } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(a, \frac{1}{n}\right) = \{a\}.$$

Exercice.

Montrer que si O est un ouvert d'un e.v.n. E, et si $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset O$ est un ensemble fini de points de O, alors $O \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est un ouvert de E.

Résolution.

Soit $a \in O \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; puisque O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset O$; en particulier pour tout r' tel que $0 < r' < r$, $B(a, r') \subset B(a, r) \subset O$.

Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = \|a - a_i\|$; posons alors $r_0 = \min\{r, r_1, r_2, \dots, r_n)$,

$$B(a, r_0) \subset B(a, r) \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], B(a, r_0) \subset B(a, r_i)$$

D'une part puisque $r_0 < r$, on a $B(a, r_0) \subset O$.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \notin B(a, r_i)$, et donc a_i n'appartient pas à $B(a, r_0)$.

Ainsi $B(a, r_0) \subset O \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Donc $O \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est un ouvert de E.

Fermés de E

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Une partie $F \subset E$ de E est appelée un fermé de E si son complémentaire dans E est un ouvert.

Exemples.

• $\varnothing$ et E sont des fermés de E ; en effet leur complémentaires respectifs, E et $\varnothing$ sont des ouverts.

• Tout singleton, toute partie finie de E est un fermé. (Il suffit d'appliquer le dernier exercice à l'ouvert E privé de ces points.)

• Tous les intervalles fermés aux bornes finies sont des fermés :

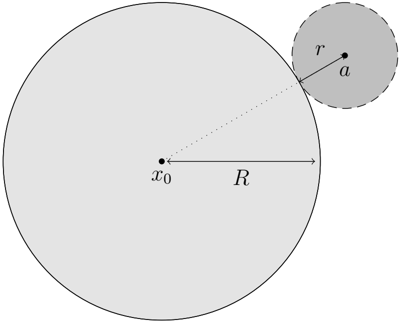
$$[a, b] \quad ; \quad]-\infty, b] \quad ; \quad [a, +\infty[\quad ; \quad]-\infty, +\infty[$$

puisque leur complémentaires sont des intervalles ouverts.

• Toutes les boules fermées sont des fermés de E.

En effet soit $a \in E \setminus \overline{B(x_0, R)}$; c'est à dire $\|a - x_0\| > R$. Posons $r = \|a - x_0\| - R$; alors $B(a, r) \subset E \setminus \overline{B(x_0, R)}$; en effet :

$$\forall x \in B(a,r),\ \|x - x_0\| \geqslant \|x_0 - a\| - \|a - x\| > \|x_0 - a\| - r = \|x_0 - a\| - (\|a - x_0\| - R) = R$$

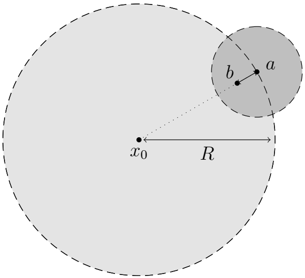


• Aucune boule ouverte n'est un fermé.

En effet soit $a \in \overline{B(x_0, R)} \setminus B(x_0, R)$ et $r > 0$; ainsi $a \in E \setminus B(x_0, R)$; montrons que a n'est pas un point intérieur à $E \setminus B(x_0, R)$. Soit $b = a - \frac{r}{2R} \cdot (a - x_0)$:

$$\begin{cases} \|a - b\| = \|\frac{r}{2R} \cdot (a - x_0)\| = \frac{r}{2} < r \implies b \in B(a, r) \\ \|b - x_0\| = \|(1 - \frac{r}{2R}) \cdot (a - x_0)\| = (1 - \frac{r}{2R})\|a - x_0\| = R - \frac{r}{2} < R \implies b \in B(x_0, R) \end{cases}$$

ainsi $B(a, r) \not\subset E \setminus B(x_0, R)$: $E \setminus B(x_0, R)$ n'est pas un ouvert, c'est-à-dire $B(x_0, R)$ n'est pas un fermé.



• Toute sphère $S(a, R)$ est un fermé ; en effet son complémentaire est réunion de deux ouverts : la boule ouverte $B(a, R)$ et le complémentaire de la boule fermée $\overline{B(a, R)}$.

Propriété

(Sphères et boules fermées sont des fermés)

Toute boule fermée de E est un fermé de E.

Toute sphère de E est un fermé de E.

Quant à la stabilité des fermés par opérations ensemblistes :

Propriété

(Des fermés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

- *$\varnothing$ et E sont des fermés de E.*
- *Toute intersection de fermés de E est un fermé de E.*
- *Toute réunion finie de fermés de E est un fermé de E.*

Démonstration. On les établit dans l'ordre.

• Les complémentaires dans E de $\varnothing$ et E sont des ouverts, donc $\varnothing$ et E sont des fermés.

• Soit $\mathscr{F}$ une famille de fermés ; le complémentaire de $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ est $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} \complement_E F$ une réunion d'ouverts, c'est donc un ouvert, et $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ un fermé.

• Le complémentaire d'une réunion finie de fermées, est un ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts ; une réunion finie de fermés est donc un fermé. ■

Remarque. Une réunion d'un nombre infini de fermés n'est pas en général un fermé, comme le montre l'exemple de :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] =]-1, 1[\quad \text{ou plus généralement} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B\left(a, 1-\frac{1}{n}\right)} = B(a,1).$$

Points adhérents ; adhérence

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et $A \subset E$ une partie de E. Un point $a \in E$ est un point adhérent à A si toute boule ouverte centrée en a intersecte A, c'est à dire si :

$$\forall r > 0, \ B(a, r) \cap A \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ est appelé adhérence de A. Bien sûr :

$$A \subset \overline{A}$$

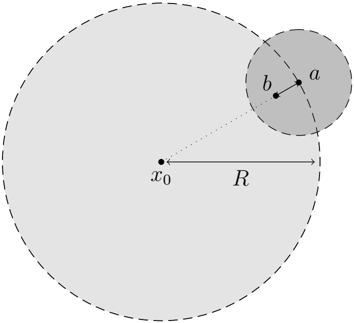
Remarques.

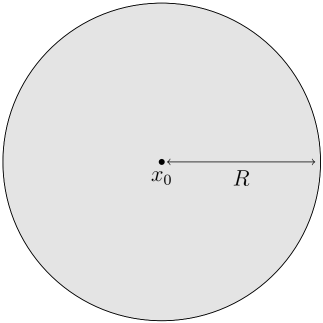
• Que $A \subset \overline{A}$ découle du fait que si $a \in A$ alors pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A$ contient (au moins) a.

• Un point a est adhérent à A si et seulement si $a \in A$ ou a est dans le complémentaire de A mais pas dans son intérieur.

Exemples.

• L'argument appliqué dans les derniers exemples ci-dessus montre que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B(a,r)}$ (d'où la notation d'une boule fermée). Les points dans l'adhérence de $B(a,r)$ qui ne sont pas dans $B(a,r)$ sont les points du cercle au bord $C(a,r)$.





$B(a,r)$ a pour adhérence $\overline{B(a,r)}$

• Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, soient $a < b$; l'adhérence de chacun des itervalles bornés $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b]$, est le segment fermé $[a,b]$.

Un point dans $\overline{A} \setminus A$ est un point du complémentaire de A dans E qui n'est pas dans son intérieur. C'est donc une obstruction à ce que A soit un fermé de E. Plus précisément, A est fermé dans E si et seulement si $A = \overline{A}$:

Propriété

(A fermé $\iff \overline{A} = A$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Une partie $A \subset E$ de E est un fermé de E si et seulement si $\overline{A} = A$. L'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé de E contenant A.

Démonstration. Puisque $A \subset \overline{A}$, on a $A = \overline{A}$ si et seulement si $\overline{A} \subset A$, si et seulement si pour tout $x \in E \setminus A$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus A$ si et seulement si $E \setminus A$ et un ouvert de E si et seulement si A est un fermé de E.

Supposons que F soit un fermé contenant A. Alors tout point a adhérent à A est aussi adhérent à F puisque $\varnothing \neq B(a, r) \cap A \subset B(a, r) \cap F$; ainsi $\overline{A} \subset \overline{F} = F$ puisque F est fermé. ■

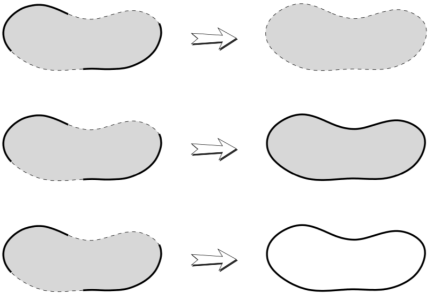
Frontière d'une partie

Définition

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ; On appelle frontière de A, notée ∂A :

$$\partial A = \overline{A} - \mathring{A}.$$

Remarque. Informellement :



l'intérieur d'une patate : c'est la patate épluchée.

l'adhérence d'une patate : c'est la patate avec sa peau.

la frontière d'une patate : c'est sa peau.

Caractérisation séquentielle des points adhérents

Les points adhérents à A admettent la caractérisation séquentielle suivante : ce sont les limites de suites à valeurs dans A.

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. Un point $a \in E$ est adhérent à A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge dans E vers a. Autrement dit :

$$a \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

Démonstration. Supposons que $(a_n)_n$ soit une suite à valeurs dans A convergeant vers $a \in E$. Alors pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$, puisque par définition, pour $\varepsilon = \frac{r}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|a - a_N\| \leqslant \frac{r}{2} < r$, et en particulier $a_N \in B(a, r) \cap A$. Ainsi le point a est adhérent à A.

Caractérisation séquentielle des fermés

Réciproquement, si a est adhérent à A : pour tout $r_n = \frac{1}{n}$, $B(a, r_n) \cap A \neq \varnothing$; choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un point $a_n \in B(a, r_n) \cap A$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a. En effet :

$$\|a_n - a\| \leqslant r_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est à valeurs dans A, converge vers $a \in \overline{A}$. ∎

Ce résultat permet d'obtenir une caractérisation séquentielle des fermés :

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$. Alors A est un fermé de E si et seulement si toute suite $(a_n)_{n\in N}$ de A, convergeant dans E, a sa limite dans A ; autrement dit :

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = a \implies a \in A$$

Démonstration. Si toute suite convergente à valeurs dans A converge vers un élément $a \in A$, alors d'après la proposition 18, $\overline{A} \subset A$, et donc $\overline{A} = A$, et d'après la propriété 17, A est un fermé de E.

Réciproquement, montrons la contraposée en supposant qu'il existe une suite $(a_n)_n$ convergente et à valeurs dans A, dont la limite a est dans $E \setminus A$.
Ainsi $a \in \overline{A} \setminus A$ et donc $\overline{A} \neq A$. D'après la propriété 17, A n'est pas un fermé. ■

Exemple. L'ensemble des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ ainsi que l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des fermés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet considérons une suite $(A_n)_n$ de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) convergeant vers $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(A_n)_{i,j} = (A_n)_{j,i}$ (resp. $= -(A_n)_{j,i}$).

Mais $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, en appliquant le théorème 11 pour la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim (A_n)_{i,j} = A_{i,j}$.

Donc par passage à la limite, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{i,j} = A_{j,i}$ (resp. $= -A_{j,i}$), donc A est symétrique (resp. antisymétrique).

Partie dense

Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ; une partie $A \subset E$ est dite <u>*dense dans E*</u> *si $\overline{A} = E$.*

Remarque. Ainsi A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$:
– $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$ (approximations décimales de x) et converge vers x.

– $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et dense dans $\mathbb{R}$: considérer la suite stationnaire $x_n = x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ si $x \in \mathbb{Q}$. Dans chaque cas la suite (x_n) prend ses valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et converge vers x.

Invariance pour des normes équivalentes

Toutes ces notions d'ouvert, fermé, intérieur, adhérence, dépendent de la norme utilisée. Cependant, ce n'est pas le cas pour des normes équivalentes ; plus précisément :

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes équivalentes de E. Pour toute partie $A \subset E$:

- *A est un ouvert de $(E, \|.\|)$ si et seulement si c'est un ouvert de $(E, \|.\|')$.*
- *A est un fermé de $(E, \|.\|)$ si et seulement si c'est un fermé de $(E, \|.\|')$.*
- *A a même intérieur dans $(E, \|.\|)$ et dans $(E, \|.\|')$.*
- *A a même adhérence dans $(E, \|.\|)$ et dans $(E, \|.\|')$.*

Démonstration. Soient $k_1, k_2 > 0$ tels que $k_1 \|.\| \leqslant \|.\|' \leqslant k_2 \|.\|$. Supposons que A soit un ouvert de $(E, \|.\|)$: pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\|x - a\| < r \implies x \in A$. Mais donc pour tout $x \in E$:

$$\|x - a\|' < k_1 r \implies k_1 \|x - a\| \leqslant \|x - a\|' < k_1 r \implies \|x - a\| < r \implies x \in A.$$

Ainsi dans $(E, \|.\|')$ aussi A est un ouvert. Par symétrie de l'équivalence des normes, $(E, \|.\|)$ et $(E, \|.\|')$ ont mêmes ouverts.

Puisque l'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert inclus dans A, l'intérieur de A pour $(E, \|.\|)$ est le même que pour $(E, \|.\|')$.

Puisque $(E, \|.\|)$ et $(E, \|.\|')$ ont même ouverts, par définition ils ont aussi même fermés ; en effet pour $A \subset E$, $\complement_E A$ est un ouvert de $(E, \|.\|)$ si et seulement si c'est un ouvert de $(E, \|.\|')$.

Finalement, puisque l'adhérence d'une partie $A \subset E$ est le plus petit fermé contenant A, l'adhérence de A est la même dans $(E, \|.\|)$ et $(E, \|.\|')$. ■

Invariance en dimension finie

Par équivalence des normes en dimension finie :

Corollaire

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les notions d'ouvert, fermé, adhérence, intérieur, frontière ne dépendent pas de la norme de E utilisée.

Remarque. Attention, ouverts et fermés ne dépendent pas de norme équivalentes, mais boules ouvertes, boules fermées en dépendent. Une boule ouverte (resp. fermée) pour une norme sera encore un ouvert (resp. fermé) pour une norme équivalente, mais ne sera plus en général une boule.

Exercice.

Montrer que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est un fermé.

Résolution.

Soit F un sev de E, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ de E. On applique la caractérisation séquentielle des fermés ; soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergeant vers $x \in E$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = x_n^1 \cdot e_1 + x_n^2 \cdot e_2 + \cdots + x_n^p \cdot e_p + x_n^{p+1} \cdot e_{p+1} + \cdots + x_n^q \cdot e_q \text{ et}$$
$$x = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + \cdots + x^p \cdot e_p + x^{p+1} \cdot e_{p+1} + \cdots + x^q \cdot e_q$$

D'après le théorème 11 pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, la suite scalaire $(x_n^k)_n$ converge vers x^k dans $\mathbb{K}$. Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, pour tout $k \in [\![p+1, q]\!]$, $x_n^k = 0$. Par passage à la limite, pour tout $k \in [\![p+1, q]\!]$, $x^k = \lim_{n\to+\infty} x_n^k = 0$ et donc $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$.

Ainsi toute suite $(x_n)_n$ dans F convergente a une limite dans F. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, F est un fermé.

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ; nous dirons d'une propriété $P(x)$ dépendant de $x \in A$ qu'elle est vraie au voisinage d'un point a si :

- *lorsque $a \in E$ est adhérent à A : elle est vraie sur l'intersection de A avec une boule (ouverte ou fermée) centrée en a.*
- *lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$: elle est vraie sur l'intersection de A avec un intervalle de la forme $]c, +\infty[$.*
- *lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a = -\infty$: elle est vraie sur l'intersection de A avec un intervalle de la forme $]-\infty, c[$.*

Limite d'une application

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, a un point adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f admet pour limite ℓ en a, et on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathrm{A}, \|x - a\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarque. On peut étendre cette définition au cas où $F = \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$; sur le modèle de telles définitions pour des application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, x \leqslant -\alpha \implies f(x) \geqslant \varepsilon$$

Dans la suite, cependant, a et ℓ seront toujours des vecteurs de E et F.

Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, et a un point adhérent à A.
Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration. Elle généralise celle vue dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f(x)$ ait pour limite ℓ en a, et que $(x_n)_n$ soit une suite à valeurs dans A convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$; puisque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$:

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

puisque $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, pour cet $\alpha > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \|x_n - a\|_E \leqslant \alpha$$

et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \|x_n - a\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(x_n) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement ; montrons la contraposée en supposant que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers a ; par définition :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \alpha \text{ et } \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon$$

Pour cet $\varepsilon > 0$ et pour tout $\alpha_n = \frac{1}{n} > 0$, posons x_n un tel élément de A ; on construit ainsi une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\|_E \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon$$

Ainsi $(x_n)_n$ est une suite à valeurs dans A, qui converge vers a, tandis que $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ. ∎

On peut tirer de ce résultat plusieurs corollaires.

Propriété

(Unicité de la limite)

Sous les mêmes hypothèse, si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Démonstration. Découle de la caractérisation séquentielle de la limite d'une application, et de l'unicité de la limite d'une suite (proposition-définition 6). ∎

Propriété

(La limite est un point adhérent à l'image)

Sous les mêmes hypothèses :

$$\text{si } f : A \longrightarrow F \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

alors ℓ est un point adhérent à $f(A)$.

Démonstration. De la caractérisation séquentielle découle que ℓ est limite d'une suite $(f(x_n))_n$ à valeurs dans $f(A)$; d'après la proposition 18, ℓ est donc un point adhérent à $f(A)$. ■

Propriété

(En dimension finie, la limite ne dépend pas de la norme)

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas des normes considérées.

Remarque. C'est vrai plus généralement en dimension quelconque mais pour des normes équivalentes.

Démonstration. En dimension finie, la limite d'une suite ne dépendant pas de la norme considérée, on conclut grâce à la caractérisation séquentielle de la limite. ■

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, et si F est de dimension finie et admet pour base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, en notant :

$$\forall x \in A,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot e_i \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \cdot e_i$$

alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ si et seulement si } \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$$

Démonstration. Cela découle encore de la caractérisation séquentielle de la limite (dans F et dans $\mathbb{K}$), et du résultat analogue pour la convergence de suites (théorème 11). ∎

Pour le calcul de limites on dispose des résultats suivants sur l'effet sur les limites d'opérations sur les applications.

Proposition

(Limite d'une combinaison linéaire)

Sous les mêmes hypothèses, soient f et g deux applications de A dans F et a un point adhérent à A. Si f et g admettent une limite en a, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ admet une limite en a et :

$$\lim_{x \to a} \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x) + \mu \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Démonstration. Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a ; alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ et donc par opérations sur les limites d'une suite (théorème 6), $\lambda \cdot f(u_n) + \mu \cdot g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell_1 + \mu \cdot \ell_2$. Par caractérisation séquentielle de la limite, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell_1 + \mu \cdot \ell_2$. ■

Proposition

(Composition des limites)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, et $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ avec $f(A) \subset B$. Soient a est un point adhérent à A ; alors :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses, si $f \underset{a}{\longrightarrow} b$ alors avec la propriété 24, b est un point adhérent à $f(A)$, et donc à $B \supset f(A)$; ainsi $g(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ a un sens.
Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a. Puisque $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, on a $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$.
Puisque $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g(f(u_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$. ∎

Proposition

(Produit par une fonction scalaire)

Sous les mêmes hypothèses, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et si* $\lambda : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *est telle que* $\lim_{x\to a} \lambda(x) = \mu$, *alors :*

$$\lim_{x\to a} \lambda(x)\cdot f(x) = \mu\cdot\ell$$

Démonstration. Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \underset{a}{\longrightarrow} \mu$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a ; alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$ et donc par produit d'une suite convergente à valeurs dans A par une suite scalaire convergente (théorème 6), la suite $\lambda(u_n)\cdot f(u_n)$ a pour limite $\mu\cdot\ell$. Par caractérisation séquentielle des limites, $\lambda(x)\cdot f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \mu\cdot\ell$. ∎

Lorsque l'espace d'arrivée est $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles sur les applications ; leur effet sur les limites est semblable au cas des limites d'applications réelles :

Proposition

(Opérations sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A \subset E$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et a un point adhérent à A.

- *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \ell_1 \times \ell_2$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $f(x) \neq 0_K$ sur un voisinage de a dans A, et $\lim\limits_{x \to a} 1/f(x) = 1/\ell$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2 \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $g(x) \neq 0_K$ sur un voisinage de a dans A et $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \ell_1/\ell_2$.*

Démonstration. Le premier point (produit), est un cas particulier (lorsque $F = \mathbb{K}$) de la proposition précédente (produit par une fonction scalaire).
Pour le second point (inverse) ; on peut supposer $\mathbb{K}$ muni de la norme usuelle $|.|$ (car dimension finie $= 1$). Soit $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$, alors puisque $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in A$,

$$\|x-a\| \leqslant r \implies ||f(x)| - |\ell|] \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2} \implies |f(x)| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2} > 0$$

et donc $f(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$ sur $A \cap \overline{B(a,r)}$: f ne s'annule pas sur un voisinage de a. De plus a est dans l'adhérence de $A \cap \overline{B(a,r)}$, de sorte que parler de la limite de $1/f$ en a a un sens.

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - f(x)|}{|f(x)\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2} \times |\ell - f(x)|$$

pour tout $x \in A \cap \overline{B(a,r)}$; puisque $f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A$:

$$\|x-a\| \leqslant \min(\alpha, r) \implies |\ell - f(x)| \leqslant \frac{\ell^2}{2} \times \varepsilon \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc par définition, $1/f \underset{a}{\longrightarrow} 1/\ell$.
Le dernier point découle des deux premiers, puisque le quotient de f par g est le produit de f par l'inverse de g. ■

Continuité d'une application entre e.v.n.

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$ On dit que f est continue en $a \in A$ lorsqu'elle admet une limite en a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A. On note $\mathscr{C}^0(A, F)$ = l'ensemble des applications continues de A dans F.

Exercice. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Montrer que f est continue si et seulement si f et continue en O_E.

Résolution.

Si f est continue sur E, alors en particulier f est continue en O_E.

Réciproquement, supposons que f est linéaire et continue en O_E. Soit $a \in E$; par linéarité :

$$f(x) = f(x-a) + f(a)$$

lorsque $x \longrightarrow a$, alors $x - a \longrightarrow O_E$ et donc par continuité de f en O_E, $f(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(O_E) = O_E$.

Puisque $f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, par somme de limites :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

et donc f est continue en a. Puisque c'est vrai pour tout $a \in E$, f est continue sur E.

Image réciproque d'un ouvert/fermé par f continue

C'est une propriété importante que l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue est un ouvert (resp. un fermé).

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés E et F. Alors :

- *Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.*
- *Pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de E.*

Démonstration. Soit V un fermé de F. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans $f^{-1}(V)$ qui converge vers x dans E. Alors par continuité de f, et par caractérisation séquentielle de la limite (théorème 22) $(f(x_n))_n$ est une suite à valeur dans V qui converge vers $f(x)$ dans F. Puisque V est un fermé de F, d'après la caractérisation séquentielle des fermés (proposition 19), $f(x) \in V$ et donc $x \in f^{-1}(V)$. Ainsi, toujours d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $f^{-1}(V)$ est un fermé de E.
Soit U un ouvert de F ; alors $\complement_E f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\complement_F U\right)$ est un fermé de E d'après le point précédent, et donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E. ∎

En particulier :

Corollaire

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue ; alors :

$$\left\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\right\} \text{ est un fermé de } E$$

$$\left\{x \in E \mid f(x) > 0\right\} \text{ est un ouvert de } E$$

$$\left\{x \in E \mid f(x) = 0\right\} \text{ est un fermé de } E$$

Démonstration. Découle de la propriété précédente par continuité de f puisque :

$$\left\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\right\} = f^{-1}([0, +\infty[\text{ est image réciproque d'un fermé de } \mathbb{R}$$

$$\left\{x \in E \mid f(x) > 0\right\} = f^{-1}(]0, +\infty[\text{ est image réciproque d'un ouvert de } \mathbb{R}$$

$$\left\{x \in E \mid f(x) = 0\right\} = f^{-1}(\{0\}) \text{ est image réciproque d'un fermé de } \mathbb{R}$$

■

Applications lipschitziennes Pour établir la continuité d'une application, on dispose d'une condition suffisante assez large.

Définition

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$. Soit $k \geqslant 0$; on dit que f est k-lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, x') \in A^2,\ \|f(x) - f(x')\|_F \leqslant k \times \|x - x'\|_E.$$

On dit que f est lipschitzienne lorsqu'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Remarques.

• Si f est k-lipschitzienne, alors f est aussi k'-lipschitzienne pour tout $k' \geqslant k$.

• Si l'on change les normes de E et F en des normes équivalentes, l'application reste lipschitzienne, bien que la constante k soit changée.

Exemples.

• Toute application constante est 0-lipschitzienne (et réciproquement).

• L'application id_E de $(E, \|.\|)$ dans lui même est 1-lipschitzienne.

• La norme $\|.\|$ de E est une application 1-lipschitzienne de $(E, \|.\|)$ dans $(\mathbb{K}, |.|)$. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$\big|\|x\| - \|x'\|\big| \leqslant \|x - x'\|.$$

• Toute projection :

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est 1-lipschitzienne lorsqu'on munit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_{E_i}$.

• Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $\mathscr{B}(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [[1, n]]$, l'application i-ème coordonnées dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{rcl} p_i : \ E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est lipschitzienne. En effet, munissons E de la norme

$$\|x\|_\infty = \|\sum_{k=1}^{n} x_i \cdot e_i\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

puisque E est de dimension finie, le caractère lipschitzien de p_i n'en dépend pas, et :

$$|p_i(x) - p_i(x')| = |x_i - x_i'| \leqslant \|x - x'\|_\infty$$

Lipschitzien $\Longrightarrow$ continue

L'intérêt réside notamment dans le fait que toute application lipschitzienne est continue.

Propriété

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application k-lipschitzienne ; on peut supposer $k > 0$.
Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, en posant $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, alors pour tout $(a, x) \in A^2$:

$$\|x - a\|_E \leqslant \alpha = \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant k \times \|x - a\|_E = \varepsilon$$

et donc f est continue en a ; puisque c'est vrai pour tout $a \in A$, f est continue. ∎

Proposition

(Combinaison linéaire, produit, composée)

• *Toute combinaison linéaire d'applications continue est continue.*

• *Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.*

• *La composée de deux applications continues est continue.*

Démonstration. Découle des propriétés 27, 28 et 29. ∎

Remarque. En particulier $\mathscr{C}^0(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice. Montrer que :

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < y < z\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Résolution.

Soient

$$f : (x,y,z) \longmapsto x \quad g : (x,y,z) \longmapsto y - x \quad h : (x,y,z) \longmapsto z - y$$

ce sont trois applications continues car combinaisons linéaires d'applications coordonnées (donc lipschitziennes). Or :

$$A = f^{-1}(]0,+\infty[) \cap g^{-1}(]0,+\infty[) \cap h^{-1}(]0,+\infty[)$$

est une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^3$, donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Encore une fois, lorsque l'espace d'arrivée est $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles sur les applications ; leur effet sur la continuité est semblable au cas des applications réelles :

Proposition

(Opérations sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A \subset E$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{K}$.

- *Si f et g sont continues sur A, alors $f \times g$ est continue sur A.*
- *Si f est continue sur A et ne s'annule pas sur A, alors $1/f$ est continue sur A.*
- *Si f et g sont continues sur A et si g ne s'anue pas sur A, alors f/g est continue sur A.*

Démonstration. Découle de la proposition 30. ■

Prolongement par continuité

Définition

Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow F$, a un point adhérent à A, $a \notin A$, et $\ell \in F$, tels que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. L'application :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccl} A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a. On a $\widetilde{f}_{|A} = f$ et $\tilde{f}$ est continue en a.

Continuité entre e.v.n. de dimensions finies

En dimension finie, la notion de limite ne dépendant pas de la norme choisie, il en va de même de la continuité :

Propriété

La notion de continuité, en dimension finie, ne dépend pas des normes considérées.

Démonstration. Découle immédiatement de la propriété 25. ∎

De plus, en dimension finie, la continuité d'une application revient à la continuité de ses coordonnées :

Théorème

($\mathscr{C}^0 \iff$ applications coordonnées $\mathscr{C}^0$)

Sous les mêmes hypothèses, et si F est de dimension finie, admettant pour base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors en notant :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot e_i$$

f est continue en $a \in A$ (respectivement sur A) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue en a (respectivement sur A).

Démonstration. Découle immédiatement du théorème 26. ∎

Application polynomiale

Définition

Une application $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale si il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Polynomiale $\Longrightarrow$ continue

Les applications polynomiales sont continues.

Proposition

Les applications polynomiales sont continues.

Démonstration. Toutes les projections :

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

sont continues, car 1-lipschitzienne pour les normes $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ et $|.|$ de $\mathbb{K}$.
Toute fonction polynomiale est combinaison linéaire de produits de telles projections. Par produit et combinaisons linéaires, d'applications continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ (proposition 35), toute application polynomiale est continue. ■

En dimension finie, linéaire $\Longrightarrow$ continue

Théorème

Toute application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie, est lipschitzienne, et donc continue.

Démonstration. Soit $f : A \longrightarrow F$ une telle application avec $A \subset E$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Toutes les normes en dimension finie étant équivalentes, on munit E de la norme :

$$\forall x \in E,\ \|x\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

le caractère lipschitzien de f n'en dépend pas. Soient $(x, x') \in E^2$ avec :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \quad ; \quad x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e_i$$

$$\|f(x)-f(x')\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i) \cdot f(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i| \cdot \|f(e_i)\|_F \leqslant \|x - x'\|_E \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F}_{=k} \leqslant k \times \|x - x'\|_E$$

ainsi f est k-lipschitzienne et donc continue. ■

Remarque. Le résultat reste vrai lorsque seul l'espace de départ est de dimension finie.

Exemples. Toutes les applications suivantes sont continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$M \longmapsto P^{-1}MP \qquad M \longmapsto M^T \qquad M \longmapsto \mathrm{tr}(M)$$

Corollaire

• *Soit $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$espaces vectoriels de dimension finie ; pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la i-ème projection :*

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est continue.

• *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application i-ème coordonnée :*

$$\begin{array}{rcl} p_i : \ E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot e_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est continue.

Démonstration. Toutes ces applications sont des applications linéaires entre espaces vectoriels normés de dimension finie. ∎

En dimension ∞ linéaire n'implique pas continue

Remarque. En dimension infinie, une application linéaire n'est pas nécessairement continue. Par exemple dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1/2]} |P(x)|$ l'application $\varphi : P \longmapsto P(1)$ est linéaire, mais n'est pas continue puisque :

$$X^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} O_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{mais} \quad \varphi(X^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \varphi(O_{\mathbb{K}[X]}) = 0$$

En dimension finie, multilinéaire $\Longrightarrow$ continue

Théorème

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Toute application multilinéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque variable x_k) :

$$\begin{array}{rcl} f : E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & F \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & F \end{array}$$

est continue.

Remarque. L'espace d'arrivée F n'est pas nécessairement de dimension finie.

Démonstration. Posons $n = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \dim E_k$; considérons pour chaque E_k une base que l'on complète si nécessaire à l'aide de vecteurs nuls en une famille génératrice de E_k constituée de n vecteurs. Notons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathscr{B}_k = (e_1^k, \dots, e_n^k) \text{ cette famille génératrice de } E_k$$

et pour tout $x = (x^1, \dots, x^p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \ x^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot e_i^k$$

Alors :

$$f(x) = \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} x_{i_p}^p \cdot f(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_p}^p) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n} \left(x_{i_1}^1 \times \cdots \times x_{i_p}^p\right) \cdot f(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_p}^p)$$

Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, l'application :

$$\pi_{i,j} : (x^1, \dots, x^p) \longmapsto x_j^i$$

est continue comme composée de la i-ème projection par la i-ème coordonnée. L'application f est somme de produits de telles fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec des applications constantes (et donc continues) à valeurs dans F ; c'est donc une application continue (propositions 34 et 35) . ■

Exemples.

• Sur un espace euclidien tout produit scalaire est continu.

• Le produit matriciel :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M} p,q(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

est une application continue.

• L'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$; en effet, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T A \end{array}$$

est continue comme composée d'une application linéaire (transposition) et d'une application bilinéaire (produit matriciel). Le groupe orthogonal est l'image réciproque par cette application du fermé $\{I_n\}$.

Continuité du déterminant

Corollaire

Le déterminant est une application continue.

Démonstration. Le déterminant est une forme multilinéaire. ∎

Exemples.

• L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; en effet c'est l'image réciproque par l'application déterminant de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$.

• Le groupe spécial orthogonal est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; en effet c'est l'intersection du fermé $O_n(\mathbb{R})$ avec le fermé $\det^{-1}(\{1\})$.

Exercice. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que les fonctions dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

Résolution.

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, $f(x,y)$ est quotient de polynômes et donc continue.

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite :

soit $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

3. On se ramène à la définition :

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

et pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^4+y^2) - x^2y \times 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2xy^3 - 2x^5y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^4+y^2) - x^2y \times 2y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

Mais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \underset{(t,t)\to(0,0)}{\longrightarrow} 2 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = \frac{(t^2-1)}{(1+t^2)^2} \underset{(t,t)\to(0,0)}{\longrightarrow} -1 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Les deux dérivées partielles sont donc non continues en $(0,0)$.

Fermé borné et image par une application continue

Définition

Dans E un espace vectoriel normé de dimension finie, on appelle fermé borné, une partie A de E qui est à la fois un fermé de E et une partie bornée.

Remarque. Être un fermé de E ne dépend pas de la norme en dimension finie, être borné non plus, toutes les normes étant équivalentes. Ainsi être un fermé borné dans un evn de dimension finie ne dépend pas de la norme considérée.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Si A est un fermé borné de E, alors $f(A)$ est aussi un fermé borné de F.

Démonstration. Admis. ■

Théorème des bornes atteintes

Corollaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Si A est un fermé borné de E, alors f est bornée sur A et atteint ses bornes :

$$\exists (a,b) \in A^2,\ \|f(a)\| = \inf_{x\in A} \|f(x)\| \quad \textit{et} \quad \|f(b)\| = \sup_{x\in A} \|f(x)\|$$

Démonstration. Puisque l'application $\|.\|$ est continue, l'application $x \in A \longmapsto \|f(x)\|$ est continue, comme composée, et son image K dans $(\mathbb{R}, |.|)$ est alors un fermé borné de $\mathbb{R}$. Soit $M = \sup_{x\in A} \|f(x)\| \in \mathbb{R}$; puisque par définition M est le plus petit majorant de $\{\|f(x)\| \,;\, x \in A\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_n \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant \|f(x_n)\| \leqslant M$. La suite $(\|f(x_n)\|)_n$ est donc une suite à valeur dans K, convergeant vers $M \in \mathbb{R}$. Mais puisque K est un fermé, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $M \in K$. Ainsi il existe $b \in A$, tel que $\|f(b)\| = M$.
La preuve est analogue pour la borne inférieure. ■

On peut dès-lors prouver l'équivalence des normes en dimension finie (Non exigible).

Démonstration. De l'équivalence des normes en dimension finie.
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et considérons la norme :

$$\|x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

ainsi que $\|.\|$ une norme quelconque de E. Soient $x = x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n$ et $y = y_1.e_1 + \cdots + y_n.e_n$ deux vecteurs quelconques de E :

$$\|x-y\| = \|(x_1-y_1)\cdot e_1+\cdots+(x_n-y_n)\cdot e_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|\,\|e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x-y\|_\infty.\|e_i\| \leqslant \|x-y\|_\infty \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}_{=k\geqslant 0} \leqslant k\times\|x-y\|_\infty$$

Ainsi l'application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne pour la norme $\|.\|_\infty$ et donc continue pour cette norme.

Puisque la sphère unité $S = S(0_E, 1) = \left\{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\right\}$ est un fermé borné de $(E, \|.\|_\infty)$, d'après le théorème des bornes atteintes, $\|.\|$ est bornée sur S et atteint ses bornes. Soit $m = \inf_{x\in S} \|x\|$ et $M = \max_{x\in S} \|x\|$. Nécessairement $m > 0$ et $M > 0$ car sinon on aurait l'existence de $x \in E$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ tandis que $\|x\| = 0$ et donc $x = O_E$, ce qui est impossible par séparation de la norme $\|.\|_\infty$. Alors pour tout $x \in S$:

$$m = m \times \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant M \times \|x\|_\infty = M$$

et donc pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot x\right) \in S \implies m \leqslant \frac{1}{\|x\|_\infty} \times \|x\| \leqslant M \implies m \times \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant M \times \|x\|_\infty$$

puisque l'inégalité est aussi trivialement vraie pour $x = 0_E$, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ de E sont équivalentes. Par transitivité de l'équivalence, toutes les normes de E sont équivalentes.

■

Exercice.

Soit A un fermé borné non vide de E evn de dimension finie. Notons pour tout $x \in E$:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$, tel que :

$$d(x, a) = d(x, A)$$

Résolution.

Soit $x \in E$ fixé ; considérons l'application :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & d(x, a) = \|x - a\| \end{array}$$

elle est continue car 1-lipschitzienne puisque pour tout $(a, a') \in A^2$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\big| \|x - a\| - \|x - a'\| \big| \leqslant \|a - a'\|$$

Puisque A est fermé borné, cette application est bornée sur A et y atteint ses borne ; ainsi il existe $a \in A$,

$$d(x,a) = \min_{a \in A} d(x,a) = \inf_{a \in A} d(x,a) = d(x,A).$$

Méthodologie

- Comment montrer que $\|\cdot\|$ est une norme ?
  - repérer s'il s'agit d'une norme euclidienne
    Exemple : $\|P\| = \sqrt{\int_a^b P^2(t)\mathrm{d}t}$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
  - revenir à la définition.
- Comment montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans $(E, \|\cdot\|)$?
  - montrer que $\|x_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (définition)
  - En dimension finie, on décompose dans une base. Pour simplifier $E = \mathbb{K}^n$ et $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$. Montrer que chaque suite coordonnées $\left(x_n^i\right)$ tend vers ℓ_i.
  - En dimension finie, on utilise une norme plus adaptée, puisqu'elles sont toutes équivalentes en dimension finie.

- Comment montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est continue ?
  - Si E est un evn de dimension finie, on regarde si f est linéaire ou n-linéaire et on a automatiquement la continuité.
    Exemple : $\begin{cases} (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^3 \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B, C) \longmapsto A \times B \times C \end{cases}$
  - De même si f est k-lipschitzienne.
    Exemple : $x \mapsto \|x\|$
  - Sinon, en dimension finie on peut regarder application coordonnées par application coordonnées si ça aide.
  - Si f est définie par une expression, on constate que l'on a des sommes, produits, composées etc. de fonctions continues.
    Exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \left(e^{xy}, \operatorname{Arctan}\left(1 + x^2 y^4 z^6\right), \ln(1 + |z - x|)\right) \end{cases}$

- Si f est définie par morceaux, il faut revenir à la définition de la limite (en ε).
- Pour une limite en $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, le passage en coordonnées polaires est souvent plus simple. Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- Pour montrer qu'il y a un problème (pas de limite), on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, ou chercher des chemins donnant des limites différentes.

Exemple : $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

▶ Comment montrer qu'une partie A est fermée ?

- On utilise la définition séquentielle de la limite.
Exemple : $A = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^3 = \det M \cdot M^2 \right\}$

- On trouve une fonction continue f (scalaire selon le programme) telle que $A = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ ou bien $f(x) \geqslant 0$ etc.
  Exemple : Montrer que les matrices non inversibles forment un fermé :
  $$GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{0\}).$$
- On montre que son complémentaire est un ouvert (en montrant la définition d'un ouvert), c'est rarement plus simple.

▶ Comment montrer qu'une partie A est ouverte ?

- On montre que son complémentaire est un fermé.
- On trouve une fonction continue f (scalaire selon le programme) telle que $A = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ ou bien $f(x) \neq 0$ etc.
- On montre la définition : pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.
  Exemple : Montrer qu'une boule ouverte est un ouvert.