Chapitre 2 : Révisions sur les fonctions réelles II Dérivabilité et Analyse asymptotique

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

Nombre dérivé ; fonction dérivée

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- *Soit $a \in I$; on appelle taux d'accroissement de f en a l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \tau_a : I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}.$$

On dit que <u>f est dérivable en a</u> lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie quand x tend vers a. Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et notée $f'(a)$.
Ainsi :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- *Lorsque f est dérivable en tout point de I, on définit sa <u>fonction dérivée</u> :*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Remarque. On définit aussi la notion de nombre dérivée à droite/gauche en a, notés $f_d'(a)$, $f_g'(a)$, en considérant les limites à droite/gauche.
On a immédiatement le résultat :

> *Soit a un point intérieur de I ; f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en a et $f_g'(a) = f_d'(a)$.*

Exemple. La fonction $x \longrightarrow |x|$ n'est pas dérivable en 0 ; en effet sa dérivée à droite est 1, sa dérivée à gauche -1.

> **Exercice.**
>
> Retrouver les domaines de dérivabilité et les valeurs des dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Résolution.

- Pour $f : x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\tau_a(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{(x-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^n)' = nx^{n-1}$.

- Pour $g : x \longmapsto \sqrt{x}$; g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\tau_a(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Proposition-Définition

(Tangente)

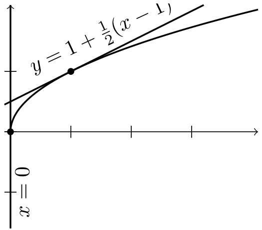
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

La courbe représentative de f admet une tangente en a si le taux d'accroissement de f en a a une limite ℓ (finie ou non) quand x tend vers a.

- *Si ℓ est finie, f est dérivable en a et la tangente en a à la courbe représentative de f est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$*
- *Si ℓ est infinie, la tangente en a à la courbe représentative de f est la droite d'équation $x = a$.*

Démonstration. (Esquisse) Cela découle de l'interprétation géométrique du taux d'accroissement en a : c'est la pente de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$; si lorsque $x \to a$, ce taux d'accroissement a une limite, la corde tend vers une droite tangente à la courbe. Aussi f est dérivable en a ssi $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, ce qu'on écrit aussi : $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$; la droite tangente apparaît alors comme la courbe de l'approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a. ∎

Exemple. Tangentes à la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 et en 1.



Remarque. La dérivée est géométriquement la pente de la tangente. Les dérivées servent dans l'étude des fonctions pour la recherche des variations de la fonction, des extrema éventuels... mais il convient de rappeler que la dérivée est un outil qui apparait naturellement en physique pour les notions de

- vitesse en cinématique (dérivée de l'espace par rapport au temps)
- vitesse angulaire (dérivée de l'angle par rapport au temps)
- intensité de courant $\left(i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$, etc.

Dérivable $\Longrightarrow$ continue

Propriété

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a (resp. sur I) alors f est continue en a (resp. sur I).

Démonstration. Si f est dérivable en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, et par produit des limite, $f(x) - f(a)$ a pour limite $0 = \ell \times 0$. ∎

Opérations sur les dérivées

Propriété

(Dérivée d'une somme, produit, quotient,. . .)

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

- *$\lambda f + \mu g$ est dérivable en sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.*
- *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
- *Si g ne s'annule pas sur I,*
  - *$\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.*
  - *$\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.*

Remarque. Le résultat est vrai aussi en $a \in I$.

Démonstration. (Esquisse) Découle de la définition, du fait que dérivable $\implies$ continu et des opérations sur les limites.
Par exemple :

$$\frac{fg(x)-fg(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$\xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

$$\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)}{x-a}=\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$$
$$=\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\xrightarrow[x\to a]{}\frac{1}{g(a)^2}\left(f'(a)g(a)-f(a)g'(a)\right)$$

■

Dérivée d'une composée

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Remarque. Le résultat reste vrai en un point (si f est dérivable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a.

Démonstration. (Esquisse)

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(f(a)) \times f'(a)$$

par limite d'une composée, continuité de f et produit des limites. ■

Exercice.

Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $g : x \mapsto \sqrt{\cos x}$.

Résolution.

• Puisque cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par dérivée d'une composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

En 0 : il faut étudier la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x - 0} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Ainsi f est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Soit :

$$\begin{array}{rccl} f' : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

• Puisque $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ de dérivée : $g'(x) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$.
Étudions sa dérivabilité en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : par 2π-périodicité de g, il suffit de l'étudier en $\pm\frac{\pi}{2}$.

$$\tau_{\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}}{x \mp \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\cos x}}{x \mp \frac{\pi}{2}}$$

En $\frac{\pi}{2}$, en posant $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \to 0^+$:

$$\tau_{\frac{\pi}{2}}(x) = \frac{\sqrt{\sin h}}{-h} = -\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 1} \times \frac{1}{\sqrt{\sin(h)}} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$$

Et par parité de g, $\tau_{\frac{\pi}{2}}(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi g n'est dérivable que sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ de dérivée : $g'(x) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$.

Dérivée d'une réciproque

Propriété

Soit f une bijection de I vers J. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque. Le résultat reste vrai en tout point $f(a) \in J$ tel que $f'(a) \neq 0$.

Démonstration. (Esquisse) Soit $a, x \in I$ et $b = f(a), y = f(x) \in J$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

par composée et inverse des limites lorsque $f'(a) \neq 0$. ∎

Exemples. C'est ce résultat qui permet de calculer les dérivées de $\exp$, Arctan, Arccos, Arcsin ; par exemple :

• exp est la réciproque de ln qui a pour dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y = \ln(x) \in \mathbb{R},\ \exp'(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y)$$

• Arctan est la réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui a pour dérivée $1 + \tan^2 > 0$; ainsi Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y = \tan(x) \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Exercice.

Soit $f : x \mapsto xe^x$. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$. On note f^{-1} la réciproque de cette bijection. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et préciser son nombre dérivé en 0.

Résolution.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = (x+1)e^x$. En particulier pour tout $x > -1$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[) = [\lim_{-1} f, \lim_{+\infty} f[= [-e^{-1}, +\infty[$ (et f^{-1} est strictement croissante et continue).

De plus $f'(x) = (x+1)e^x \neq 0$ pour tout $x > -1$ ainsi f^{-1} est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$. Son nombre dérivée en 0 est :

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(0)} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

Dérivées usuelles

$f(x)$	*Ensemble de définition*	*Ensemble de dérivabilité*	$f'(x)$	*avec*
x^α	$\begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\end{cases}$	$\begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\end{cases}$	$\alpha \times x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x}$	$\begin{cases}\mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$	$\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \text{si } n \text{ pair} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{n \times x}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	
a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \times a^x$	$a \in \mathbb{R}_+^*$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sh	

$f(x)$	*Ensemble de définition*	*Ensemble de dérivabilité*	$f'(x)$	*avec*
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2(x)$ $= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathrm{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur

Théorème

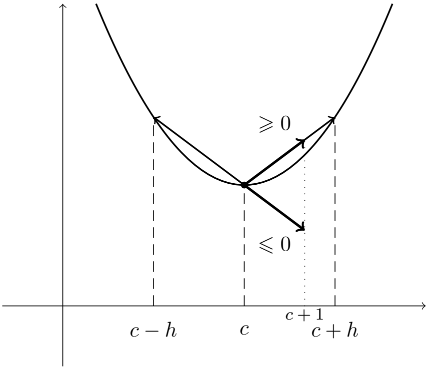
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, a un point intérieur de I (i.e. pas une borne)
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

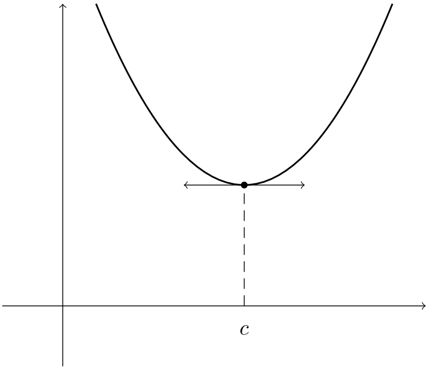
Remarque. Attention :

• La réciproque est fausse en général. Par exemple, la dérivée de $f : x \mapsto x^3$ s'annule en 0 , mais f n'admet pas d'extremum local en 0.

• C'est faux pour un extremum qui n'est pas un point intérieur ; par exemple sur $[0, 1]$, la fonction $x \longmapsto x$ admet des extremums en 0 et 1 tandis que sa dérivée ne s'y annule pas.

Démonstration. Lorsque a est un extremum le taux d'accroissement en a prend des signes opposés sur un voisinage de a selon que $x < a$ ou $x > a$; en effet, le fait que a soit un extremum entraîne que sur un voisinage de a, $f(x) - f(a)$ garde un signe constant, tandis que $x - a$ change de signe selon que x soit à gauche ou droite de a. Par passage à la limite, $f'(a)$ est à la fois positif et négatif ; il est donc nul. ■



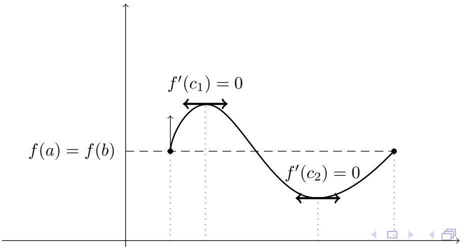


Théorème de Rolle

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. (Esquisse) D'après le théorème des bornes atteintes f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Soit f est constante, dans quel cas sa dérivée est nulle partout, soit le fait que $f(a) = f(b)$ implique que l'un des extremums est nécessairement atteint sur l'intérieur $]a, b[$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de condition nécessaire d'un extremum en un point intérieur pour obtenir un point intérieur c tel que $f'(c) = 0$. ∎



Exercice. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Résolution.

Soit T la période ; on applique le théorème de Rolle sur tous les intervalles de la forme $[kT, (k+1)T]$ avec $k \in \mathbb{Z}$; à l'intérieur de chaque intervalle, la dérivée s'annule en un point. Tous leurs intérieurs étant deux à deux disjoints, on obtient une infinité de zéros de la dérivée.

Égalité des accroissements finis

Théorème

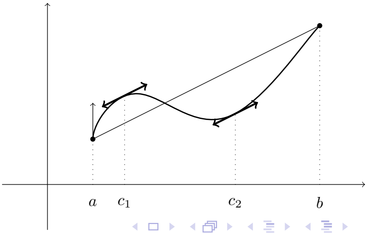
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c)$.

Démonstration. (Esquisse) On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\phi : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

en effet $\phi(a) = f(a) = \phi(b)$. On obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ soit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ∎

Graphiquement, l'égalité des accroissements finis apparaît comme une version "oblique" du théorème de Rolle :



Égalité des accroissements finis

Théorème

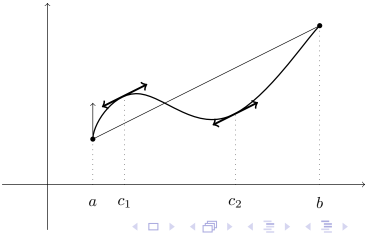
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c)$.

Démonstration. (Esquisse) On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\phi : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

en effet $\phi(a) = f(a) = \phi(b)$. On obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ soit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Graphiquement, l'égalité des accroissements finis apparaît comme une version "oblique" du théorème de Rolle :



Égalité des accroissements finis

Théorème

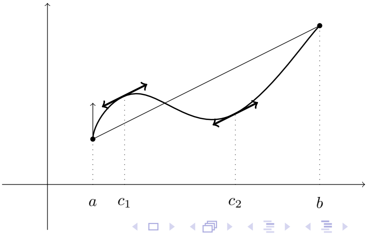
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) \times f'(c)$.

Démonstration. (Esquisse) On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\phi : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

en effet $\phi(a) = f(a) = \phi(b)$. On obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ soit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ∎

Graphiquement, l'égalité des accroissements finis apparaît comme une version "oblique" du théorème de Rolle :



Remarque. Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis sont des résultats équivalents : chacun des deux se déduit directement de l'autre. Avec l'égalité des accroissements finis, le théorème de Rolle apparaît comme un simple cas particulier lorsque $f(a) = f(b)$. Dans un exercice, l'égalité des accroissements finis peut toujours se substituer au théorème de Rolle.

En cinématique, si un mobile se déplace entre les temps t_0 et t_1 avec une vitesse moyenne v alors a au moins un instant dans $]t_0, t_1[$ sa vitesse instantanée sera aussi v.

Exercice. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]t, t+1[$ tel que : $\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$.

Résolution. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque. En appliquant l'égalité des accroissements finis à la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ dérivable sur l'intervalle $[t, t+1]$, on obtient l'existence de $c \in]t, t+1[$ tel que

$$\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = f'(c) \times (t+1-t) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I telle que

$$\left|f'\right| \leq M$$

sur I. Alors

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

(on dit que f est M-lipschitzienne).

Démonstration. Sur I, $-M \leqslant f' \leqslant M$ $(*)$.

Supposons $x \neq y$ car sinon l'inégalité revient à $0 \leqslant 0$. D'après l'égalité des accroissements finis appliqué sur $[\min(x, y), \max(x, y)]$

$$\exists c \in I,\ \ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

et d'après $(*)$:

$$-M \times (x - y) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M \times (x - y)$$

donc : $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. ∎

Exercice. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Résolution.

On a sur $\mathbb{R}$: $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis avec $y = 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(0)| = |\sin(x)| \leqslant |x - 0| = |x|$$

comme recherché.

Monotonie et signe de la dérivée

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors

- *f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$*
- *f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$*

De plus, si f est continue sur I et dérivable sur I sauf en un nombre fini de points alors :

- *Si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I*
- *Si $f' < 0$ sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. (Esquisse) Le sens direct des 3 premiers points est évident : si par exemple f est croissante, tous les taux d'accroissement sont positifs, et donc leur limite aussi.

Pour établir la réciproque des trois premiers points, et les deux derniers points lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, on applique l'égalité des accroissements finis. Pour finir la démonstration des deux derniers points, on procède par récurrence après avoir remarqué que si une fonction définie sur $]a,c[$ est strictement croissante/décroissante sur $]a,b[$ ainsi que sur $]b,c[$, alors elle l'est aussi sur $]a,c[$. ∎

Remarque. Attention ce n'est vrai que sur un intervalle. Par exemple $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, à dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ strictement négative ; f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ (puisque $-1 < 1$ et $f(-1) = \frac{1}{-1} < \frac{1}{1} = f(1)$).

Exercice.

- Soit $x \in [-1,1]$; simplifier $f(x) = \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$; simplifier $g(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Résolution.

• f est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $f'(x) = 0$. Ainsi f est constante sur $[-1, 1]$ et $\forall x \in [-1, 1]$:

$$\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arccos}(0) + \mathrm{Arcsin}(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

• g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Ainsi g est constante sur les deux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et donc :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = g(1) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ g(x) = g(-1) = \mathrm{Arctan}(-1) + \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Théorème de la limite de la dérivée

Théorème

Soit $a \in I, f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$. Soit ℓ réel ou infini. Si $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. (Esquisse) S'obtient en appliquant l'égalité des accroissements finis sur des intervalles de la forme $[x_1, a]$, $[a, x_2]$, puis faire tendre x_1 et x_2 vers a. ■

Remarque. Le cas où ℓ est réel est le plus important. Il permet de conclure sur la dérivabilité d'une fonction en un point sans avoir à étudier la limite du taux d'accroissement en ce point.

En général :

1. On sait qu'une fonction f continue sur I est dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et on connaît l'expression de f' sur $I \backslash \{a\}$
2. On cherche si cette expression a une limite ℓ en a
3. Si cette limite existe et est réelle, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Donc, en a, f est dérivable et f' est continue.

Exercice. Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Résolution.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et $\forall x > 0,\ f'(x) = 2x\ln(x) + x$. De plus f est continue en 0 puisque par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0 = f(0)$. Toujours par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ donc f est dérivable en 0 et f' est continue en 0 d'après le théorème de la limite de la dérivée. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x(2\ln(x)+1) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Dérivées d'ordre supérieur

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit (en cas d'existence) les dérivées successives de f par récurrence par

- $f^{(0)} = f$
- *Pour tout* $k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \longmapsto x^n$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

Résolution. Par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$:

(I) Pour $k = 0$, $f^{(k)}(x) = f(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = x^n$.

(H) Supposons l'assertion vraie pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. Alors $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$, $f^{(k)}$ est dérivable et :

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) \underset{HR}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\right) &= \frac{n!}{(n-k)!} \times (n-k)x^{n-k-1} \\
&= \frac{n!}{(n-k) \times (n-k-1)!} \times (n-k)x^{n-k-1} \\
&= \frac{n!}{(n-(k+1))!}x^{n-(k+1)}
\end{aligned}$$

L'assertion demeure vraie au rang $k+1$.

Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$, ou autrement dit lorsque f admet des dérivées d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque. Par définition si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors f est n fois dérivable sur I. Puisque la dérivabilité entraîne la continuité, si f est $(n+1)$ fois dérivable alors f est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Ainsi en notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R}) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \right\}$$

on a les inclusions :

$$\boxed{\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) \supset \mathscr{D}^1(I,\mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \supset \mathscr{D}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \supset \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}).}$$

Toutes ces inclusions sont strictes :

Être de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ est strictement plus fort qu'être $(n+1)$ fois dérivable, qui lui-même est strictement plus fort qu'être de classe $\mathscr{C}^n$.

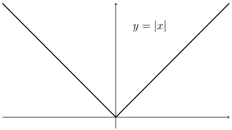
On parle de plus ou moins grande régularité de la fonction ; une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est parfois dite "lisse".

Exemple. Application de classe $\mathscr{C}^n$ qui n'est pas $(n+1)$ fois dérivable.

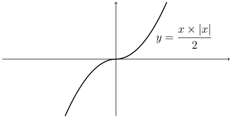
L'application $x \longmapsto |x|$ est continue et non dérivable. Ainsi l'inclusion $\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte.
Puisque l'application valeur absolue est continue elle admet des primitives. En considérant sa primitive sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto \frac{x \times |x|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

on obtient une application dérivable à dérivée continue (*i.e* de classe $\mathscr{C}^1$) qui n'est pas deux fois dérivable. Ainsi l'inclusion $\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte.
En prenant des primitives successives, on obtient des exemples montrant que l'inclusion $\mathscr{D}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte pour tout $n \in \mathbb{R}$.



$x \longmapsto |x|$ est $\mathscr{C}^0$ et non $\mathscr{D}^1$.



Sa primitive est $\mathscr{C}^1$ et non $\mathscr{D}^2$.

Exercice. Soit :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Résolution. Appliquer le théorème des gendarmes permet de montrer que f est continue. Vérifions qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée d'applications dérivables. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \frac{-1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Etudions sa dérivabilité en 0 :

$$\tau_0(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \underset{0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$$

d'après le théorème des gendarmes.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

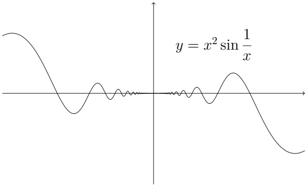
$$f' : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

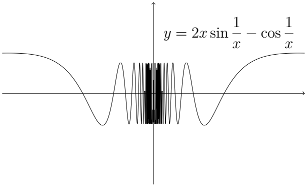
Mais f' n'est pas continue en 0. En effet :

$$2x \sin \frac{1}{x} \underset{0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \cos \frac{1}{x} \quad \text{n'a pas de limite en } 0$$

(autrement cos aurait une limite en $\pm\infty$ ce qui est absurde), ainsi $f'(x)$ n'admet pas de limite en 0.
Ainsi f est un exemple d'application dérivable sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Cet exemple montre que l'inclusion $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte.





$x \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée n'est pas continue en 0.

En prenant des primitives successives (puisque f est continue), on en déduirait des exemples d'applications n fois dérivables qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inclusion $\mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est stricte.

Combinaison linéaire, produit, quotient, composition

Théorème

Soient f, g des application n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, partout où elles sont définies :

$$\lambda f + \mu g, \quad f \times g, \quad \frac{f}{g}, \quad g \circ f$$

sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en appliquant la stabilité de la continuité et de la dérivabilité par ces opérations. ■

Formule de Leibniz

En ce qui concerne la dérivée n-ième d'un produit, on dispose de la formule de Leibniz.

Théorème

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-fois dérivables ($n \in \mathbb{N}$). Alors :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur n, en appliquant la dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit et la formule de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. ∎

Exercice. Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^2 e^{3x}$.

Résolution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(e^{3x}\right)^{(n)} = 3^n e^{3x}$$

tandis que :

$$\left(x^2\right)^{(0)} = x^2 \quad ; \quad \left(x^2\right)^{(1)} = 2x \quad ; \quad \left(x^2\right)^{(2)} = 2 \quad ; \quad \left(x^2\right)^{(n)} = 0 \text{ si } n > 2$$

D'après le formule de Leibniz, si $n \geq 2$:

$$\left(x^2 e^{3x}\right)^{(n)} = \left(3^n x^2 + 2n3^{n-1}x + n(n-1)3^{n-2}\right) e^{3x}$$

et

$$\left(x^2 e^{3x}\right)^{(1)} = \left(3x^2 + 2x\right) e^{3x} \qquad ; \qquad \left(x^2 e^{3x}\right)^{(0)} = x^2 e^{3x}$$

$\mathscr{C}^k$-Difféomorphisme

Théorème

La réciproque d'une fonction bijective de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et dont la dérivée ne s'annule pas, est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $f(I)$.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$ c'est le théorème de la bijection (une fois montré qu'une bijection continue définie sur un intervalle est nécessairement strictement monotone (cf. exercice 8, page 9).

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n, et soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ avec f' ne s'annulant par sur I. Par dérivation de l'application réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ de dérivée :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Or par hypothèse $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. Par composition et quotient, $\left(f^{-1}\right)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J et donc f^{-1} est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur J. L'assertion reste ainsi vraie au rang $n+1$. ∎

Relations de domination et de prépondérance

Dans toute cette partie, I est un intervalle non vide et non réduit à un point, et a est un point de I ou une borne de I, finie ou infinie.

Définition

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que :

- *f est dominée par g au voisinage de a (noté $f \underset{a}{=} O(g)$) lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*
- *f est négligeable devant g au voisinage de a (noté $f \underset{a}{=} o(g)$) lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$; on dit aussi que g est prépondérante devant f au voisinage de a.*

On obtient facilement à partir des définitions les propriétés suivantes :

Propriété

- *Négligeable entraîne dominé :*
$$f \underset{a}{=} o(g) \Longrightarrow f \underset{a}{=} O(g)$$
- *Transitivité :*
$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \Longrightarrow f \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h) \Longrightarrow f \underset{a}{=} o(h)$$
- *Somme et différence :*
$$f \underset{a}{=} O(h) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \Longrightarrow f \pm g \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} o(h) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h) \Longrightarrow f \pm g \underset{a}{=} o(h)$$
- *Multiplication par un scalaire $\lambda \neq 0$:*
$$f \underset{a}{=} O(g) \Longrightarrow \lambda f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } f \underset{a}{=} O(\lambda g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \Longrightarrow \lambda f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } f \underset{a}{=} o(\lambda g)$$

Exemple. La croissance comparée s'énonce à l'aide de la relation de prépondérance :

(Croissance comparée)

$\forall\, \alpha, \beta > 0$:

$$\ln^{\alpha}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(x^{\beta}\right) \quad ; \quad x^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$

$$|\ln(x)|^{\alpha} \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right) \quad ; \quad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^{\beta}}\right)$$

Équivalence

Définition

Soient $f, g : I \longrightarrow R$; on dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ si :

$$f(x) = g(x) \times (1 + \varepsilon(x)) \quad \textit{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Lorsque g ne s'annule pas sur un voisinage de a c'est équivalent à :

$$\frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \textit{ ou encore } f \underset{a}{=} g + o(g).$$

Exemple. Une fonction polynôme :

$$P(x) = \sum_{m}^{n} a_k x^k$$

• est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré : $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$ si $a_m \neq 0$.

• est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré : $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ si $a_n \neq 0$.

On dispose des équivalents usuels, obtenus à l'aide des limites usuelles en 0 et du théorème de limite d'une composée :

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $u \underset{a}{\longrightarrow} 0$:

$$\sin(u) \underset{a}{\sim} u \qquad \tan(u) \underset{a}{\sim} u \qquad 1 - \cos(u) \underset{a}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

$$\ln(1+u) \underset{a}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{a}{\sim} u \qquad \sqrt{1+u} - 1 \underset{a}{\sim} \frac{u}{2}$$

$$\forall \alpha > 0, \quad (1+u)^\alpha - 1 \underset{a}{\sim} \alpha u$$

Il vient facilement avec la définition que :

Propriété

Être équivalent en a est une relation :

- *Réflexive :* $f \underset{a}{\sim} f$
- *Symétrique :* $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$
- *Transitive :* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$.

C'est ce qu'on appelle être une relation d'équivalence.

Pour le calcul d'équivalents on peut appliquer les propriétés suivantes :

Propriété

- *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ *alors :*

$$f \underset{a}{\sim} \ell$$

- *Multiplication par* $\lambda \neq 0$ *:*

$$\forall \lambda \neq 0,\ f \underset{a}{\sim} g \implies (\lambda.f) \underset{a}{\sim} (\lambda.g)$$

- *Inverse :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \left(\frac{1}{f}\right) \underset{a}{\sim} \left(\frac{1}{g}\right)$$

- *Puissance :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall p \in \mathbb{Z},\ f^p \underset{a}{\sim} g^p$$

Si de plus f *et* f *sont strictement positives au voisinage de* a *:*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$$

- *Valeur absolue :*

$$f \underset{a}{\sim} g \implies |f| \underset{a}{\sim} |g|$$

- *Produit :*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$$

- *Quotient : si f_2, g_2 ne s'annulent pas sur un voisinage de a :*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right\} \implies \left(\frac{f_1}{f_2}\right) \underset{a}{\sim} \left(\frac{g_1}{g_2}\right)$$

Démonstration. (Esquisse) Découlent facilement de la définition par composition, produit et quotient des limites. ■

Remarque. On ne compose pas les équivalents !

On n'additionne pas les équivalents ! Pour obtenir un équivalent d'une somme utiliser $f = g + o(g)$ plutôt que $f \sim g$.

$f \underset{a}{\sim} g \implies$ mêmes limite en a et signe au voisinage de a

Le résultat fondamental sur les équivalents est :

Propriété

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. Alors :

- *f et g sont de même signe au voisinage de a.*
- *Si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g tend vers la même limite que f en a.*

Démonstration. Si $f = g(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 0$, alors sur un voisinage de a $(1+\varepsilon) > 0$ et donc f et g ont même signe. Et puisque $1+\varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 1$, par produit des limites, f et g ont même limite (éventuelle). ∎

On dispose aussi d'une "version équivalents" du théorème des gendarmes :

Propriété

Si au voisinage de a :

$$f \leqslant g \leqslant h$$

et si $f \underset{a}{\sim} u$ *et* $h \underset{a}{\sim} u$ *alors* $g \underset{a}{\sim} u$.

Démonstration. De $f \underset{a}{=} u(1+\varepsilon)$ et $h \underset{a}{=} u(1+\varepsilon')$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \underset{a}{\longrightarrow} 0$ découle $g - u = u\varepsilon''$ avec $\varepsilon'' \underset{a}{\longrightarrow} 0$. ∎

Exercice. Calculer les limites de :

a) $\dfrac{\sin x \ln\left(1+x^2\right)}{x \tan x}$ en 0

b) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0

c) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0

d) $\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

Résolution.

a) $\dfrac{\sin x \ln\left(1+x^2\right)}{x\tan x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x\times x^2}{x\times x} = x \underset{0}{\longrightarrow} 0$

b) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{\sin(x)}{6x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{6x} \underset{0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$

c) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\ln(e+x))\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)\right)$

et : $\frac{1}{x}\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\times\frac{x}{e} \underset{0}{\sim} \frac{1}{e}$

par composée des limites : $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \underset{0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{e}}$.

d) $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x}))\right)$

or $\frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x})) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}\ln(e^{-x}+o(e^{-x})) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x}(-x+\ln(1+o(1))) \underset{+\infty}{\longrightarrow} -1$

donc par composition des limites : $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1) = \frac{1}{e}$.

Développement limité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a lorsqu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière du } DL_n(a)} + o(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n$$

Remarques.

• Si f admet un $DL_n(a)$ alors f admet un $DL_p(a)$ pour tout $p \in [\![0, n]\!]$. En effet pour tout $m > p$, $(x-a)^m \underset{a}{=} o\left((x-a)^p\right)$.

• Lorsque un $DL_n(a)$ de f existe, il est unique ; autrement on aurait $(x-a)^p \underset{a}{=} o\left((x-a)^n\right)$ avec $p \leqslant n$.

$DL_0 \iff$ continue ; $DL_1 \iff$ dérivable

Propriété

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :

- *f est continue en a ssi f admet un DL d'ordre 0 en a.*
- *f est dérivable en a ssi f admet un DL d'ordre 1 en a.*

Démonstration. f admet un $DL_{\mathbf{0}}(a)$ ssi $f \underset{a}{=} a_{\mathbf{0}} + o(1) \iff \lim_a f = a_{\mathbf{0}}$ ssi f est continue en a puisque f est par hypothèse définie en a ; en particulier $f(a) = a_{\mathbf{0}}$.
f admet un $DL_{\mathbf{1}}(a)$ ssi $f \underset{a}{=} f(a) + a_{\mathbf{1}}(x-a) + o(x-a) \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{\longrightarrow} a_{\mathbf{1}}$ ssi f est dérivable en a et $f'(a) = a_{\mathbf{1}}$. ∎

Remarque. Attention, le résultat ne se généralise pas aux ordres supérieurs ; par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un $DL_2(0)$ puisque $f(x) \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Un DL_a non nul fournit un équivalent en a

Propriété

Le monôme non nul de plus bas degré d'un DL_a de f est un équivalent de f en a.

Démonstration.

$$f(x) \underset{a}{=} a_m(x-a)^m + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{a}{=} a_m(x-a)^m + o\left((x-a)^m\right) \Longrightarrow f(x) \underset{a}{\sim} a_m(x-a)^m \qquad \text{si } a_m \neq 0$$

■

Formules de Taylor

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f admet pour développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + o\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

Remarque. Une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet donc un DL_n en a, mais la réciproque est fausse en général, pour $n \geq 1$.

Démonstration. (Esquisse) Par récurrence sur n.
(I) Pour $n = 0$ c'est évident.

(H) Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ alors $f' \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f'(t) &\underset{a}{=} f'(a) + f''(a)(t-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(t-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(t-a)^n + o\left((t-a)^n\right) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \times \eta(t) \end{aligned}$$

avec $\eta(t) \underset{a}{\longrightarrow} 0$. On intègre en a et x :

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt$$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt$$

et on montre, à l'aide de la définition que $\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} \times \displaystyle\int_a^x (t-a)^n \times \eta(t)dt \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$ ■

Lorsque f est un peu plus régulière (de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) on peut préciser la valeur exacte du reste. C'est la formule de Taylor avec reste intégral (ou formule de Taylor-Laplace). Elle est non-exigible, mais elle permet de démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui elle est au programme.

Théorème

(Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *et* $a \in I$.
Alors :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration. Par récurrence sur n.

(I) La formule devient $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ qui est évidemment vrai.

(H) Supposons $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$; par hypothèse de récurrence :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{R_n}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = f^{(n+1)}(t) & u' = f^{(n+2)}(t) \\ v = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} & v' = \dfrac{(x-t)^n}{n!} \end{array} \right.$$

On effectue une intégration par partie sur le reste intégral R_n :

$$\begin{aligned} R_n &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

qui montre que l'assertion reste vraie au rang $n+1$. ∎

Inégalité de Taylor-Lagrange

Corollaire

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Notons :

$$M_{n+1} = \max_{t \in I} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Découle de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right|$$

$$\leqslant \int_a^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqslant M_{n+1} \times \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \leqslant M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Opérations sur les DLs

Les développements limités, au contraire des équivalents, se comportent très bien avec les opérations : on peut ajouter, multiplier, composer, etc. des *DL*.

Pour énoncer les résultats on notera $Tronc_p$ la troncature à l'ordre p d'une partie régulière d'un DL d'ordre plus grand :

Si $p \in [\![0, n]\!]$ *:*

$$Tronc_p\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-a)^k.$$

Combinaison linéaire et produit de DL

Propriété

Si f et g admettent des $DL_n(a)$ de parties régulières $P_n(x)$ et $Q_n(x)$:

$$f(x) \underset{a}{=} Pn(x) + o\left((x-a)^n\right)$$
$$g(x) \underset{a}{=} Qn(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ *admet pour* $DL_n(a)$ *:*
  $$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x) \underset{a}{=} \lambda \cdot P_n(x) + \mu \cdot Q_n(x) + o\left((x-a)^n\right)$$
- $f \times g$ *admet pour* $DL_n(a)$ *:*
  $$(f \times g)(x) \underset{a}{=} Tronc_n\Big(P_n(x) \times Q_n(x)\Big) + o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration. (Esquisse) On fait la combinaison linéaire et le produit des DLs ; pour le produit, on tient compte du fait que $\deg(P_n \times Q_n) = \deg(P_n) + \deg(Q_n) = 2n$ et que si $q > n$ alors $(x-a)^q = o\left((x-a)^n\right)$. ■

Composition de DLs

Même si le résultat sur la composition des *DL*s ne figure pas explicitement au programme, il faut savoir l'appliquer dans les calculs.

Propriété

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$; si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $P_n(x)$ et si g admet un $DL_n(f(a))$ de partie régulière $Q_n(x)$ alors $g \circ f$ admet pour $DL_n(a)$:

$$g \circ f(x) \underset{a}{=} Tronc_n\Big(Q_n \circ P_n\Big)(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration. On procède comme dans le cas d'un produit, $\deg(Q_n \circ P_n) = \deg(Q_n) \times \deg(P_n) = n^2$ en utilisant que si $q > n$ alors $(x-a)^q = o\left((x-a)^n\right)$. ∎

Primitivation de DL

Propriété

Soit $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in I$; si f' admet le $DL_n(a)$:

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Démonstration. (Esquisse) On intègre le $DL_n(a)$ de $f'(t)$ entre a et x :

$$f'(t) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (t-a)^k + (t-a)^n \eta(t) \qquad \text{avec } \eta(t) \xrightarrow[t \to a]{} 0$$

$$\Longrightarrow \ f(x) - f(a) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + \int_a^x (t-a)^n \eta(t) dt$$

et on montre sans peine que $\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} \displaystyle\int_a^x (t-a)^n \eta(t) dt \xrightarrow[x \to a]{} 0.$ ∎

Dérivation de DL

Pour dériver un DL il faut prendre garde que si f admet un $DL_n(a)$ il n'est pas toujours vrai que f' admette un $DL_{n-1}(a)$.

Contre-exemple $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ est dérivable et n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ (cf. exercice 18 page 19) ; ainsi f admet un $DL_1(0)$ (car dérivable) mais f' n'admet pas de $DL_0(0)$ (car non continue).

Pour obtenir un résultat il faut donc plus d'hypothèse :

Propriété

Si $f : I \longrightarrow R$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et admet le DL_n en $a \in I$:

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors f' admet le $DL_{n-1}(a)$:

$$f'(x) \underset{a}{=} a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + o\left((x-a)^{n-1}\right)$$

Démonstration. Si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors $f' \in \mathscr{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$ et d'après Taylor-Young, f' admet donc un $DL_{n-1}(a)$ dont les coefficients se déduisent du $DL_n(a)$ de f, par exemple, à l'aide de la formule de primitivation. ■

Inverse d'un DL

Propriété

Si f admet un $DL_n(a)$ et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet aussi un $DL_n(a)$.

Démonstration. (Esquisse) S'obtient par composition avec un $DL_n(f(a))$ de $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui existe puisque l'application inverse est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. ∎

Dans la pratique le *DL* d'un inverse (resp. ou d'un quotient) s'obtient par composition (resp. et produit) à l'aide du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1 \pm x}$.

Exemple. $DL_3(0)$ de $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ (on utilise les DL usuels qui suivent) :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

$$\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad \text{par composition}$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \tan(x) \underset{0}{=} Tronc_3\left(\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right) + o(x^3) \qquad \text{par produit}$$

$$\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + (x^3)$$

Développements limités usuels

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
- $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$

Développements limités usuels

- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\tan x \underset{0}{=} x+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$

Démonstration. (Esquisse) Le DL_n de $\frac{1}{1-x}$ se déduit de la factorisation $(1-x^{n+1}) = (1-x)(1+x+\cdots+x^n)$. En l'appliquant en $-x$ on obtient celui de $\frac{1}{1+x}$, puis par primitivation celui de $\ln(1+x)$.

Les DL de exp, cos, sin, $(1+x)^{\alpha}$ s'obtiennent grâce à la formule de Taylor-Young.

Le DL d'Arctan s'obtient par primitivation de celui de $\frac{1}{1+x^2}$ lui-même obtenu par composition à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$.

Le DL de tan s'obtient par quotient, et ceux de ch et sh par combinaison linéaire à partir de celui de exp. ∎

Remarque. Il est bon de connaître les premières valeurs du DL :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots$$

$DL(0)$ d'une fonction paire/impaire

Pour s'aider à mémoriser ces formules, ou plus généralement dans le calcul de $DL(0)$, se rappeler que :

Propriété

Pour une fonction paire (resp. impaire) un $DL(0)$ n'a que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Démonstration. Si $f(-x) = (-1)^{\varepsilon} f(x)$ (avec $\varepsilon = 0$ ou 1 selon que f est pair/impair) alors :

$$0 = f(-x) - (-1)^{\varepsilon} f(x) \underset{\mathbf{0}}{=} \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} \left(1 - (-1)^{k+\varepsilon}\right) a_k x^k + o(x^n)$$

Or par unicité du DL : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\left(1 - (-1)^{k+\varepsilon}\right) a_k = 0$, or :

$$\left(1 - (-1)^{k+\varepsilon}\right) = 0 \text{ ssi } k + \varepsilon \text{ est impair} \implies \begin{cases} \text{si } \varepsilon = 0, \ a_k = 0 \text{ pour tout } k \text{ impair} \\ \text{si } \varepsilon = 1, \ a_k = 0 \text{ pour tout } k \text{ pair} \end{cases}$$

∎

Exercice. Donner le développement limité en 0 des fonctions :

a) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

b) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

c) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

Résolution.

a)
$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\Longrightarrow \exp(\sin(x)) \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + Tronc_3\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3\right) + o(x^3)$$
$$\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

b) $$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\Longrightarrow (\ln(1+x))^2 \underset{0}{=} Tronc_4\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^2 + o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + 2\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)$$

c)

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$\Longrightarrow \ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{1}{2} Tronc_6\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3} Tronc_6\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^3 + o(x^6)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{2 \cdot 4!} - \frac{x^6}{3 \cdot 8} + o(x^6)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$