

# Chapitre 2 :

## Révisions sur les fonctions réelles I

### Limites et continuité

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux

<https://www.jean-philippe-preaux.fr>

## Partie I : Limites et Continuité

### Limites d'une fonction

Définitions

Propriétés

### Continuité

Définition et premières propriétés

Théorèmes sur la continuité

# Limite d'une fonction en un point

Dans tout ce chapitre,  $I$  et  $J$  désignent des intervalles de  $\mathbb{R}$  non vides et non réduits à un point. On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

## Définition

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  un réel appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ ; on dit que :

- $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , ou  $\lim_a f = \ell$ ) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$ ) lorsque

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A$$

- $f(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$ ) lorsque

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq -A$$

### Remarques.

- En français :

– "Pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$  (resp.  $+\infty$ ,  $-\infty$ ), il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $I$  tel que  $f$  envoie  $U$  dans  $V$  ( $f(U) \subset V$ )."

Ou :

– "Pour que  $f(x)$  soit suffisamment proche de  $\ell$  (resp.  $+\infty$ ,  $-\infty$ ), il suffit que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ ."

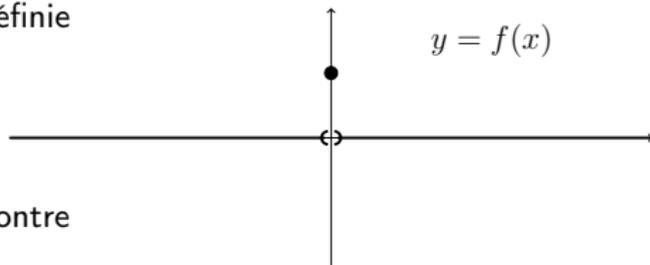
• On définit aussi les limites en  $a$  à droite ( $x \rightarrow a^+$ ) ou à gauche ( $x \rightarrow a^-$ ) en ajoutant à la condition  $|x - a| \leq \alpha$ , "et  $x > a$ " (resp.  $x < a$ ).

Attention les inégalités sont strictes : lorsque  $a \in I$ , la valeur  $f(a)$  n'influe pas sur  $\lim_{a^\pm} f$  tandis que lorsque  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a \in I$ , nécessairement  $\lim_a f = f(a)$ .

**Exemple.** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0; par contre  $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0$ .



On a alors le résultat :

Soit  $a \in I$  et  $l \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f = f(a) = l$$

Définition et caractérisation s'étendent lorsque  $f$  est définie à droite et à gauche de  $a$ , mais pas en  $a$  :

Soit  $a \in I$ ,  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

**Exemples.** La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  a pour limite  $-\infty$  en  $0^-$ ,  $+\infty$  en  $0^+$  et aucune limite en  $0$ .

La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$  a pour limite  $+\infty$  en  $0$ .

# (Limite d'une fonction en $+\infty$ )

## Définition

On suppose  $I$  non majoré (c'est à dire  $I = (a, +\infty[)$ ). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que :

- $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{+\infty} f = \ell \text{ lorsque}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in I, x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{+\infty} f = +\infty \text{ lorsque}$$

$$\forall A > 0, \exists M > 0, \forall x \in I, x \geq M \implies f(x) \geq A$$

- $f(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{+\infty} f = -\infty$ ) lorsque  
$$\forall A > 0, \exists M > 0, \forall x \in I, x \geq M \implies f(x) \leq -A$$

## Définition

(Limite d'une fonction en  $-\infty$ )

On suppose  $I$  non minoré (c'est à dire de la forme  $] -\infty; a)$ ).

...

Toutes les définitions sont analogues en changeant :

$x \rightarrow +\infty$  par  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \geq M$  par  $x \leq -M$ .

**Remarque.** En français :

– "Pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$  (resp.  $+\infty$ ,  $-\infty$ ), il existe un voisinage  $U$  de  $\pm\infty$  dans  $I$  tel que  $f$  envoie  $U$  dans  $V$  ( $f(U) \subset V$ )."

Ou :

– "Pour que  $f(x)$  soit suffisamment proche de  $\ell$  (resp.  $+\infty$ ,  $-\infty$ ), il suffit que  $x$  soit suffisamment proche de  $\pm\infty$ ."

**Exercice.** Soit  $f : ]5, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : ]-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Écrire à l'aide de quantificateurs :

$$\text{a) } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 4$$

$$\text{b) } f(x) \underset{x \rightarrow 5}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\text{c) } g(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\text{d) } g(x) \underset{x \rightarrow 2}{\longrightarrow} 1$$

2. Idem avec les négations de ces assertions.

## Résolution.

1.

a)  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in ]5; +\infty[, x \geq M \implies |f(x) - 4| \leq \varepsilon$

b)  $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]5; +\infty[, |x - 5| \leq \alpha \implies f(x) \leq -A$

c)  $\forall A > 0, \exists M > 0, \forall x \in ]-\infty; 3], x \leq -M \implies f(x) \geq A$

d)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]-\infty; 3], |x - 2| \leq \alpha \implies |f(x) - 1| \leq \varepsilon$

2.

a)  $\exists \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists x \in ]5; +\infty[, x \geq M \text{ et } |f(x) - 4| > \varepsilon$

b)  $\exists A > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in ]5; +\infty[, |x - 5| \leq \alpha \text{ et } f(x) > -A$

c)  $\exists A > 0, \forall M > 0, \exists x \in ]-\infty; 3], x \leq -M \text{ et } f(x) < A$

d)  $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in ]-\infty; 3], |x - 2| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - 1| > \varepsilon$

**Remarque.** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ ; on définit aussi :

$$\lim_a f = \ell^+ \quad \text{et} \quad \lim_a f = \ell^-$$

en ajoutant à la condition  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ , " $f(x) \geq \ell$ " (resp.  $f(x) \leq \ell$ ).

# Unicité de la limite

## Propriété

*Si  $f$  admet une limite en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors cette limite est unique.*

**Démonstration.** (Esquisse) On procède par l'absurde à partir des définitions. Par exemple pour deux limites réelles  $\ell, \ell'$  en un réel  $a$ , en prenant  $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$ , on obtient l'existence de  $\alpha > 0$  et  $\alpha' > 0$  tels que  $\forall x \in I$  :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{|\ell - \ell'|}{3} \\ \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha' \implies |f(x) - \ell'| \leq \frac{|\ell - \ell'|}{3} \end{array} \right\} \implies \forall x \in I, |x - a| \leq \min(\alpha, \alpha')$$

$$\implies |\ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \implies |\ell - \ell'| \leq \frac{2|\ell - \ell'|}{3}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Mais puisque  $I$  est un intervalle il contient des réels  $x$  vérifiant  $|x - a| \leq \min(\alpha, \alpha')$ ; on en déduit que  $1 \leq \frac{2}{3}$ , ce qui est absurde. Il resterait  $3 + 4 + 4 = 11$  cas à traiter, de manière semblable. ■

# Théorème séquentiel de composition des limites

Nous avons déjà vu comme théorème dans le chapitre de rappel sur les suites.

## Théorème

Soient  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim u_n = a \\ \lim_a f = \ell \end{array} \right\} \implies \lim f(u_n) = \ell$$

**Démonstration.** (Esquisse) Il y a neuf cas à considérer selon que  $a, \ell$  soient finis ou infinis. Par exemple pour  $a = +\infty$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque ; puisque  $\lim_{+\infty} f = \ell$ , il existe  $M > 0$  tel que  $x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$  (\*) ; pour ce  $M > 0$ , puisque  $\lim u_n = +\infty$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq N_0 \implies u_n \geq M$ , et donc d'après (\*),  $n \geq N_0 \implies |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$ .

Ainsi on a montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N_0 \in \mathbb{N}$ , au-delà duquel  $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$  ; autrement dit,  $\lim f(u_n) = \ell$ . ■

Il sert soit en application directe à calculer la limite d'une suite, soit à montrer par contraposée qu'une fonction n'admet pas de limite en  $a$ .

**Exemple.** Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  n'admettent pas de limite en  $+\infty$ .

– Pour  $\cos$  considérer la suite  $u_n = n\pi \longrightarrow +\infty$  ; la suite composée  $\cos(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$  n'a pas de limite, et donc d'après le théorème, la fonction  $\cos$  n'admet aucune limite en  $+\infty$ .

– Pour  $\sin$  considérer la suite  $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \longrightarrow +\infty$  ;  
 $\sin(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi)$  et le même argument s'applique.

# Caractérisation séquentielle de la limite

Ce résultat admet une réciproque :

## Théorème

Soient  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  ; alors :  $\lim f = \ell$  ssi pour toute suite  $(u_n)$  à valeur dans  $I$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$ .

**Démonstration.** (Esquisse) Le sens direct, c'est le théorème de composition des limites déjà démontré. Pour la réciproque, on montre sa contraposée : si  $f$  n'a pas pour limite  $\ell$  en  $a$ , alors on construit une suite  $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$  ayant pour limite  $a$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \neq \ell$ . Par exemple lorsque  $a, \ell \in \mathbb{R}$  :

Par définition  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall \alpha > 0, \exists x \in I$  tel que  $|x - a| \leq \alpha$  et  $|f(x) - \ell| > \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; pour cet  $\varepsilon$ , prenons  $\alpha = \frac{1}{n} > 0$  et  $u_n \in I$  tel que  $|u_n - a| \leq \alpha$  et  $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$ . On construit ainsi une suite  $(u_n)$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left. \begin{array}{l} a - \frac{1}{n} \leq u_n \leq a + \frac{1}{n} \\ \text{et} \\ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} u_n \longrightarrow a \\ \text{et} \\ f(u_n) \not\rightarrow \ell \end{array} \right.$$



# Opérations sur les limites

Les opérations usuelles sur les fonctions : somme, produit, quotient, puissance, se comportent assez bien avec leurs limites : en étendant naturellement ces opérations sur  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une puissance de fonctions sont (respectivement) les somme, produit, quotient ou puissance de leurs limites (s'il en est), à l'exception notable des formes indéterminées suivantes :

Formes indéterminées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{somme} & & \text{produit} & & \text{quotient} & & \text{puissance} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} & ; & \underbrace{\hspace{2cm}} & ; & \underbrace{\hspace{4cm}} & ; & \underbrace{\hspace{4cm}} \\
 \infty - \infty & ; & 0 \times \infty & ; & \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; \frac{\ell}{0} & ; & 1^\infty ; 0^0 ; \infty^0
 \end{array}$$

# Limite d'une composée

Pour le calcul de limite on utilise aussi beaucoup le théorème de limite d'une composée :

## Théorème

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f(I) \subset J$ . Soient  $a, \ell, L \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = L \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L$$

**Démonstration.** (Esquisse). Il y a 27 cas à considérer selon que  $a, \ell, L$  soient finis ou infinis. Par exemple, pour  $a, \ell, L$  trois réels :

Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque ; puisque  $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = L$  il existe  $\beta > 0$  tel que  $\forall x \in J$ ,  
 $|x - \ell| \leq \beta \implies |g(x) - L| \leq \varepsilon$  (\*).

Pour ce  $\beta > 0$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in I$ ,  
 $|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \beta$ .

Ainsi, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in I$ ,  $|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \beta \xrightarrow{f(I) \subset J \text{ et } (*)} |g(f(x)) - L| \leq \varepsilon$ .

On a donc montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$\forall x \in I$ ,  $|x - a| \leq \alpha \implies |g \circ f(x) - L| \leq \varepsilon$  ; c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L$ .

# Ordre et limite

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne un point de  $I$  ou une borne (finie ou infinie) de  $I$ .

*Une proposition  $P(x)$  dépendant de  $x \in I$  est dite vraie au voisinage de  $a$  si il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies P(x)$ .*

## Théorème

**(Passage à la limite dans les inégalités larges)**

*Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions admettant une limite finie en  $a$ .*

*Si, au voisinage de  $a$ ,  $f \leq g$ , alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**Démonstration.** (Esquisse). On peut procéder par l'absurde en supposant que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  et en montrant à l'aide de la définition qu'alors lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $a$ ,  $f(x) > g(x)$ .

**Remarque.** Ce théorème ne donne pas l'existence de la limite de  $f$  et/ou de  $g$ , contrairement aux théorèmes suivants, très utiles pour le calcul de limite.

## Théorème

### (Théorème des gendarmes)

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  et soient  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, au voisinage de  $a$ ,

$$f \leq g \leq h$$

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ , alors

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

**Démonstration.** Soit  $\varepsilon > 0$ ; puisque  $\lim_a f = \ell$  et  $\lim_a h = \ell$ , il existe  $\alpha', \alpha'' > 0$  tels que :  
 $|x - a| \leq \alpha' \implies \ell - \varepsilon \leq f(x)$  et  $|x - a| \leq \alpha'' \implies h(x) \leq \ell + \varepsilon$ .

D'autre part par hypothèse, il existe  $\alpha''' > 0$  tel que  $|x - a| \leq \alpha''' \implies f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Soit  $\alpha = \min(\alpha', \alpha'', \alpha''') > 0$  alors :

$$|x - a| \leq \alpha \implies \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ . ■

## Théorème

### (Théorèmes de minoration/majoration)

Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f \leq g$  au voisinage de  $a$

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ , alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ . (théorème de minoration)

Si  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ , alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ . (théorème de majoration)

**Démonstration.** (Esquisse) Cela découle facilement des définitions. ■

**Exercice.** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \ln(x) + \cos(e^x)$  admet une limite en  $+\infty$  et donner sa valeur.

**Résolution.** Sur un voisinage de  $+\infty$ ,  $\ln(x) + \cos(e^x) \geq \ln(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ;  
ainsi d'après le théorème de minoration,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \cos(e^x) = +\infty$ .

# Théorème de la limite monotone

## Théorème

Soit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  avec  $a < b$  et  $f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. Alors  $f$  admet une limite en  $a$  et en  $b$ . De plus :

- Si  $f$  est croissante :
  - Si  $f$  est majorée, alors  $\lim_{b^-} f = \sup f(]a; b[)$  ; sinon  $\lim_{b^-} f = +\infty$ .
  - Si  $f$  est minorée, alors  $\lim_{a^+} f = \inf f(]a; b[)$  ; sinon  $\lim_{a^+} f = -\infty$ .
- Si  $f$  est décroissante :
  - Si  $f$  est minorée, alors  $\lim_{b^-} f = \inf f(]a; b[)$  ; sinon  $\lim_{b^-} f = -\infty$ .
  - Si  $f$  est majorée, alors  $\lim_{a^+} f = \sup f(]a; b[)$  ; sinon  $\lim_{a^+} f = +\infty$ .

**Démonstration.** (Esquisse) La preuve suit le même argument que pour le théorème de la limite monotone des suites, en utilisant la caractérisation en  $\varepsilon$  des bornes supérieures/inférieures et la définition des limites infinies. ■

C'est un théorème très utile pour démontrer l'existence d'une limite. Il admet de plus le corollaire important suivant.

### Corollaire

Soit  $f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. Alors  $f$  admet en tout point  $x_0 \in I$  une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche, finies ; de plus :

$$\text{si } f \text{ est croissante : } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\text{si } f \text{ est décroissante : } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

**Exercice.** Soit une fonction décroissante  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\forall x \in ]0, 1], \arccos(x) \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ . Que peut-on dire sur l'existence et les valeurs des limites de  $f$  en 0 et 1 ?

**Résolution.** La limite de  $f$  en 0 (en  $0^+$ ) existe d'après le théorème de la limite monotone et est soit finie et supérieure ou égale à  $\frac{\pi}{2} = \lim_0 \text{Arccos} = \text{Arccos}(0)$  ou égale à  $+\infty$ .

La limite de  $f$  en  $1^-$  existe et est comprise entre  $\text{Arccos}(1) = 0$  et  $\frac{1}{1} = 1$ ; que  $f$  admette une limite en 1 dépend de si  $f(1) = \lim_{1^-} f$  ou pas.

# Continuité - Définition

## Définition

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f(a).$$

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

Des opérations sur les limites découle la stabilité de la continuité par les opérations usuelles :

## Propriété

**(Stabilité de la continuité par les opérations usuelles)**

*Somme, produit, inverse, quotient, composée, de fonctions continues (en un point, sur un intervalle), sont continues (en un point, sur un intervalle) là où elles sont définies.*

Il découle facilement des définitions :

## Proposition-Définition

### (Prolongement par continuité)

Si  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$ , alors

l'application :

$$\begin{aligned} \bar{f} : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

est continue sur  $I$  ; on l'appelle le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  (ou sur  $I$ ).

**Exemple.** L'application  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  est continue et se prolonge par continuité sur  $\mathbb{R}$  en posant  $f(0) = 1$ .

# Théorèmes des valeurs intermédiaires

## Théorème

Soit  $a < b$  deux réels ; si  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution sur  $[a, b]$ .

**Remarque.** Il peut aussi s'énoncer sous la forme équivalente :

## Théorème

(T.V.I.)

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

**Démonstration.** Il est facile de voir que le T.V.I. permet d'établir que si  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, et si  $c$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  alors  $f(x) = c$  admet au moins une solution sur  $[a, b]$  (appliquer le théorème à  $x \mapsto f(x) - c$ ).

Pour conclure il suffit d'appliquer la caractérisation suivante des intervalles : une partie  $D \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ssi  $\forall y_0, y_1 \in D$  avec  $y_0 < y_1$ , tout réel  $y$  compris entre  $y_0$  et  $y_1$  est aussi dans  $D$ .

Le T.V.I. admet comme corollaire utile :

### Corollaire

Soit  $a < b$  deux réels; si  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement monotone et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement une solution sur  $[a, b]$ .

### Exercice. (Un théorème de point fixe)

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Montrer qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = x$ .

**Résolution.** On définit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

Par combinaison linéaire,  $g$  est continue.

De plus  $g(0) = f(0) \geq 0$  et  $g(1) \leq 1 - 1 = 0$  puisque  $f(1) \leq 1$ .

En appliquant le T.V.I. à  $g$  on obtient l'existence de  $c \in [0, 1]$  tel que  $g(c) = 0$  soit  $f(c) = c$ .

**Exercice. (Un cas concret)**

Un randonneur a parcouru 24 km en 6 h. Montrer qu'il existe un intervalle d'1 h pendant lequel le randonneur a parcouru exactement 4 km.

**Résolution.** Considérons l'application  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $t$  associe  $f(t)$  : distance parcourue par le randonneur entre  $t$  et  $t+1$  heures. On peut supposer  $f$  continue puisque la vitesse du randonneur est finie.

Si il n'existait pas  $a$  et  $b$ ,  $a < b$  dans  $[0, 5]$  tels que  $f(a) - 4$  et  $f(b) - 4$  soient de signes opposés, alors cela signifierait que soit chaque heure le randonneur a parcouru strictement plus de 4 km, soit strictement moins. En particulier le randonneur n'aurait pas pu parcourir exactement 24 km en 6h.

Ainsi on peut appliquer le T.V.I. à  $t \mapsto f(t) - 4$ , qui donne l'existence de  $t \in [0, 5]$  tel que le randonneur ait parcouru exactement 4 km entre  $t$  et  $t+1$  heures.

Une démonstration classique du T.V.I. procède par dichotomie :

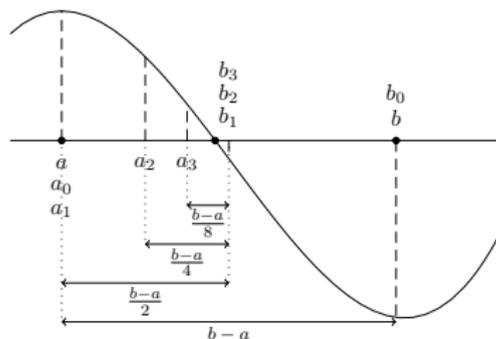
**Démonstration.** (Esquisse) On se place sous les hypothèses du théorème 11. On construit les suites  $(a_n), (b_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  par les relations de récurrence :

$$a_0 = a \quad ; \quad b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} m_n & \text{si } f(m_n) \text{ et } f(a_n) \text{ ont même signe} \\ a_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} m_n & \text{si } f(m_n) \text{ et } f(b_n) \text{ ont même signe} \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$



On démontre facilement par récurrence que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bien définies et vérifient :

- (1)  $(a_n)$  est croissante,  $(b_n)$  est décroissante,
- (2)  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- (3)  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)$  et  $f(b_n)$  sont de signes opposés.

En particulier de (1) et (2) découle que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites adjacentes et convergent donc vers la même limite  $c \in [a, b]$ .

Par passage à la limite dans l'inégalité  $f(a_n) \times f(b_n) \leq 0$  provenant de (3) on obtient par continuité de  $f$  :

$$[f(c)]^2 \leq 0 \implies f(c) = 0.$$

La méthode de démonstration présente l'avantage de donner un algorithme de recherche approchée d'une racine :

---

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
    """ Recherche par dichotomie d'une racine de f sur
    [a,b] ; f doit être continue , a<b et f(a)*f(b)<=0 """
    assert a < b and f(a)*f(b) <= 0
    while b-a > eps:
        m = (a+b)/2 # milieu
        if f(a)*f(m) <= 0:
            b = m # Dichotomie à gauche
        else:
            a = m # Dichotomie à droite
    return a, b # valeurs par défaut et excès à eps près
```

---

Par exemple pour obtenir une approximation de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-6}$  près :

---

```
In [1]: dichotomie(lambda x: x**2-2, 1, 2, 1e-6)
Out[1]: (1.4142131805419922, 1.4142141342163086)
```

```
In [2]: 2**.5 # Decimales correctes
Out[2]: 1.4142135623730951
```

---

**Remarque.** L'algorithme a une complexité en  $O\left(\log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)\right)$  ; en effet, la boucle s'exécute en temps borné  $O(1)$ , et autant de fois,  $n$ , qu'il faut pour que :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon &\iff 2^n \geq \frac{b-a}{\epsilon} \iff e^{n \ln(2)} \geq \frac{b-a}{\epsilon} \\ &\iff n \geq \ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) \times \frac{1}{\ln(2)} = \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Par exemple avec  $a$  et  $b$  fixés, pour avoir  $N$  décimales grossièrement correctes ( $\epsilon = 10^{-N}$ ), l'algorithme est linéaire en  $N$  puisque

$$\log_2\left(\frac{b-a}{10^{-N}}\right) = N \log_2(10) + \log_2(b-a).$$

# Théorème des bornes atteintes

Nous admettrons pour l'instant le résultat suivant. Il s'avère très utile !

## Théorème

*Une application continue sur un segment  $[a, b]$  est bornée et atteint ses bornes.*

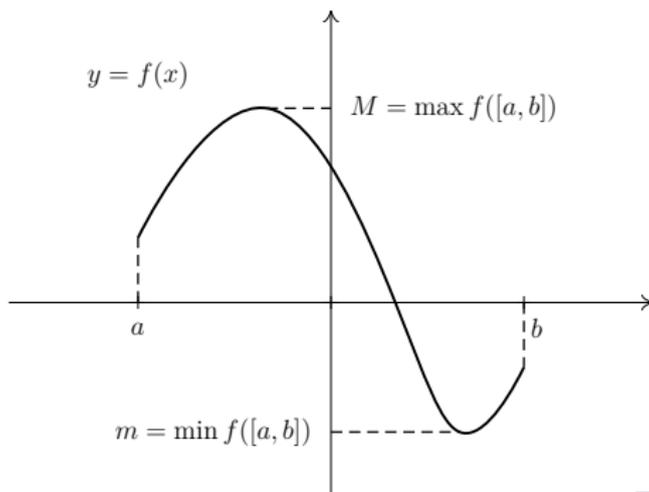
Un énoncé plus précis décrit l'image d'un segment  $[a, b]$  (i.e.  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ) par une application continue (attention en général ce n'est pas le segment  $[f(a), f(b)]$ , à moins que  $f$  ne soit croissante) :

## Théorème

### (Image d'un segment par une application continue)

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une application continue est un segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min f([a, b]) = \inf_{[a, b]} f \qquad M = \max f([a, b]) = \sup_{[a, b]} f.$$



**Exercice.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodique et continue. Montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Résolution.**

Soit  $T$  une période de  $f$ . Alors par périodicité  $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ .

Or  $f$  étant continue, elle est bornée sur  $[0, T]$  et atteint ses bornes.

C'est donc aussi le cas sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée.

### Résolution.

Soit  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ; soit  $\varepsilon > 0$ , par définition il existe  $A > 0$  tel que  $x \geq A \implies l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$ . En particulier  $f$  est bornée sur  $[A; +\infty[$ .

Par continuité  $f$  est bornée sur  $[0, A]$  : il existe  $m_0, M_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in [0, A], m \leq f(x) \leq M$ .

En posant  $m = \min(m_0, l - \varepsilon)$  et  $M = \max(M_0, l + \varepsilon)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ ; autrement dit,  $f$  est borné sur  $\mathbb{R}_+$ .

# Théorème de la bijection

## Théorème

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone. Alors :

- $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$
- sa réciproque  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone sur  $f(I)$ , de même monotonie que  $f$ .

**Démonstration.** (Essentiellement admis) Le seul point non trivial est la continuité de  $f^{-1}$  que l'on admet.

La stricte monotonie de  $f$  entraîne son injectivité, et donc qu'elle réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ ; d'où l'existence de l'application réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$ . Soit  $x, x' \in I$ ;  $y = f(x)$ ,  $y' = f(x')$  ssi  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x' = f^{-1}(y')$ . Alors  $f$  est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout  $x, x' \in I$ ,  $x \leq x' \iff f(x) \leq f(x')$  (resp.  $x \leq x' \iff f(x) \geq f(x')$ ) si et seulement si  $\forall y, y' \in J$ ,  $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y') \iff y \leq y'$  (resp.  $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y') \iff y \geq y'$ ) si et seulement si  $f^{-1}$  est strictement croissante (resp. décroissante). ■

Le point essentiel du résultat est la continuité de l'application réciproque d'une application continue. C'est ainsi qu'on peut établir que les fonctions  $\exp$  (réciproque de  $\ln$ ),  $\text{Arccos}$  (réciproque de  $\cos|_{[0, \pi]}$ ),  $\text{Arcsin}$  (réciproque de  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ ) et  $\text{Arctan}$  (réciproque de  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ ) sont continues.

### Exercice.

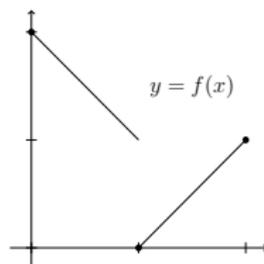
- Donner un exemple d'application non continue qui réalise une bijection entre deux intervalles. Son application réciproque peut-elle être continue ?
- Montrer qu'une application continue sur un intervalle réalise une bijection sur son image si et seulement si elle est strictement monotone. Pour cela on admettra que pour une application non strictement monotone, il existe  $a < b < c$  tel que  $f(a) \leq f(b)$  et  $f(c) \leq f(b)$  (ou  $f(a) \geq f(b)$  et  $f(c) \geq f(b)$ )

## Résolution.

- Soient

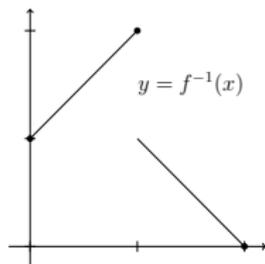
$$f : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$f^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 + x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



L'application  $f$  réalise une bijection de  $[0, 2]$  sur  $[0, 2]$ , d'application réciproque :  $f^{-1}$ .

Quelque soit  $f$  non continue et bijective d'un intervalle sur un autre, son application réciproque ne peut pas être continue, sinon avec le théorème de la bijection  $f$  le serait aussi, car comme on l'établit dans la question suivante, une bijection continue ne peut qu'être strictement monotone.

- Si  $f$  est continue sur un intervalle et strictement monotone alors elle réalise une bijection sur son image : c'est la première partie du théorème de la bijection. Montrons la réciproque.

Soit une application  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  ; elle réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  si et seulement si elle est injective. Montrons donc que si  $f$  n'est pas strictement monotone alors elle n'est pas injective.

Admettons que dans ce cas il existe  $a < b < c$  tel que  $f(a) \leq f(b)$  et  $f(c) \leq f(b)$  (sans perte de généralité, quitte à changer  $f$  en  $-f$ ).

Si  $f(a) = f(b)$  ou  $f(b) = f(c)$  alors clairement  $f$  est non injective. Aussi supposons que  $f(a) < f(b)$  et  $f(c) < f(b)$ . D'après le TVI, si  $f(a) \leq f(c)$  alors il existe  $d \in [a, b[$  tel que  $f(d) = f(c)$  et  $c \neq d$  :  $f$  est non injective.

Si  $f(a) \geq f(c)$  alors il existe  $d \in ]b, c]$  tel que  $f(d) = f(a)$  et  $a \neq d$  :  $f$  est non injective.