

Chapitre 6 : Algèbre linéaire : Déterminants

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
<https://www.jean-philippe-preaux.fr>

Déterminant d'une matrice carrée

Définition et propriétés élémentaires

Calcul de déterminant

Extension de la notion de déterminant

Déterminant d'une famille de n vecteurs d'un ev de dim n .

Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'une matrice carrée

Le résultat fondamental est le suivant :

Proposition-Définition

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, et notée $\det$ qui soit :

- *linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (n -linéarité)*
- *l'échange de deux colonnes change la valeur de l'application en son opposé ; (anti-symétrie)*
- *l'image de la matrice identité I_n vaut 1.*

et si une application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, satisfait aux deux premiers points, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f = \lambda \cdot \det$.

Démonstration. On l'admettra ; ses grandes lignes procèdent ainsi :

L'ensemble des applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ linéaires par rapport à chaque colonne est un espace vectoriel (appelé espace des formes n -linéaires).

Le sous-ensemble des formes n linéaires constituées de celles vérifiant la deuxième propriété est un sous-espace vectoriel de dimension 1 (appelées forme n -linéaires anti-symétriques).

L'image de la matrice identité par une forme n -linéaire anti-symétrique non nulle est non nulle. ■

On note $\det(A)$ le déterminant de A .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ on note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque. Il existe une formule explicite du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients. Mais elle est hors programme (et ni très digeste ni très utile).

Remarque. En dimension 2 et 3, le déterminant admet une interprétation géométrique claire : sa valeurs absolue est l'aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède dont les côtés sont données par les 2/3 matrices colonnes. Son signe est positif/négatif selon que les côtés sont énumérées dans le sens direct ou indirect.

Déterminant d'une matrice diagonale

Proposition

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux

Démonstration. Une matrice diagonale $\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ s'obtient à partir de la matrice I_n en multipliant sa première colonne par le scalaire a_1 , la deuxième par $a_2, \dots$, la dernière par a_n . Puisque $\det(I_n) = 1$, par n -linéarité, $\det(\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$. ■

Remarque. Attention : le déterminant est n -linéaire sur les colonnes de la matrice ; mais ce n'est pas une application linéaire ! En général $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ et $\det(\lambda.A) \neq \lambda \cdot \det(A)$. Par exemple $\det(I_n + I_n) = \det(2.I_n) = 2^n \neq \det(I_n) + \det(I_n) = 2$.

Propriétés fondamentales

Propriété

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Si une colonne (ou une ligne) de M est nulle, alors $\det(M) = 0$.
- Si deux colonnes (ou deux lignes) de M sont égales, alors $\det(M) = 0$.
- Si M' est une matrice déduite de M par l'échange de deux colonnes (ou de deux lignes), alors $\det(M') = -\det(M)$
- Si M' est une matrice déduite de M en multipliant une colonne (ou une ligne) par un scalaire λ , alors $\det(M') = \lambda \cdot \det(M)$
- Si M' est une matrice déduite de M en ajoutant dans une colonne (respectivement : une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement : lignes), alors $\det(M') = \det(M)$.

Démonstration. On les démontre d'abord pour les lignes ; que ça reste vrai pour les colonnes découlera du théorème 4.

Écrivons une matrice M sous la forme $M = (C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n)$ où $C_1, \dots, C_n$ désigne les colonnes de M .

La première découle de la linéarité par rapport à chaque colonne : si la colonne i est nulle :

$$\det((C_1 | \dots | O_{n,1} | \dots | C_n)) = \det((C_1 | \dots | 0.C_i | \dots | C_n)) = 0 \times \det((C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n)) = 0.$$

Le deuxième point découle de l'anti-symétrie : supposons que les colonnes i et j soient égales, alors en les échangeant :

$$\det((C_1 | \dots | C_i | \dots | C_i | \dots | C_n)) = -\det((C_1 | \dots | C_i | \dots | C_i | \dots | C_n)) \implies \det((C_1 | \dots | C_i | \dots | C_i | \dots | C_n)) = 0$$

La troisième n'est que l'anti-symétrie, et le quatrième découle de la n -linéarité.

Pour le dernier point : par n -linéarité, et avec le deuxième point :

$$\begin{aligned} \det(C_1 | \dots | C_i + \lambda.C_j | \dots | C_j | \dots | C_n) &= \det(C_1 | \dots | C_i | \dots | C_j | \dots | C_n) + \lambda. \underbrace{\det(C_1 | \dots | C_j | \dots | C_j | \dots | C_n)}_{=0} \\ &= \det(C_1 | \dots | C_i | \dots | C_j | \dots | C_n) \end{aligned}$$

en répétant le même argument, ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas le déterminant. ■

Propriétés algébriques

Propriété

Pour toute matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et, dans ce cas,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Si A et B sont deux matrices semblables alors $\det A = \det B$.

Démonstration. On utilise la même notation que dans la preuve précédente en notant $A = (C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n)$. Premier point : par n -linéarité :

$$\begin{aligned}\det(\alpha \cdot A) &= \det(\alpha \cdot C_1 | \dots | \alpha \cdot C_i | \dots | \alpha \cdot C_n) = \underbrace{\alpha \times \dots \times \alpha}_{n \text{ termes}} \times \det(C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n) \\ &= \alpha^n \times \det(C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n) = \alpha^n \det(A)\end{aligned}$$

Second point : L'application $B \mapsto \det(AB)$ est n -linéaire par rapport à chacune de ses colonnes et l'échange de deux colonnes change sa valeur en son opposé. Puisque l'image de I_n vaut le scalaire $\det(A)$, on a alors $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Troisième point : si A n'est pas inversible alors l'une de ses lignes est combinaison linéaire de toutes les autres, et donc $\det(A) = 0$. Réciproquement supposons A inversible. On a

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(A \times A^{-1}) = \det(I_n) = 1 \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dernier point : Si $B = P^{-1}AP$ alors

$$\det(B) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(P) \times \det(A) = \det(A).$$

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(M^T) = \det(M).$$

Démonstration. Admis.

Remarque. Le déterminant vérifie donc les mêmes propriétés vis-à-vis de ses lignes que de ses colonnes.

Calcul de déterminant

Proposition

(Opérations élémentaires) Les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes de la matrice, ont l'effet suivant sur le déterminant :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne changent pas le déterminant.
- Les opérations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient le dét. par λ .
- Les opérations $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient le dét. par -1 .

Démonstration. Découlent directement de la propriété 2. ■

Exemple. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$; $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition

Une matrice triangulaire a pour déterminant le produit de ses termes sur la diagonale.

Démonstration. On la fait pour une triangulaire supérieure ; par transposition le résultat demeure vrai pour une triangulaire inférieure.

La matrice n'est pas inversible ssi elle a un 0 sur sa diagonale, et dans ce cas son déterminant est nul (proposition 3). La conclusion est donc vérifiée dans ce cas.

Sinon, l'application du pivot de Gauss permet de la changer en une matrice diagonale en n'appliquant que des opérations élémentaires de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i < j$; ces opérations ne changent ni les termes sur la diagonale, ni le déterminant. Avec la proposition 1 on obtient la conclusion. ■

En particulier on obtient une méthode générale de calcul du déterminant en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss : soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Calcul du déterminant par pivot de Gauss

$\det = 1$ (initialisation)

Pour j variant de 1 à $n - 1$:

 S'il existe $i \geq j$ tel que $m_{i,j} \neq 0$:

 Si $m_{j,j} = 0$:

$L_i \leftrightarrow L_j$

$\det \leftarrow -\det$

 Pour i variant de $j + 1$ à n :

$L_i \leftarrow L_i - \frac{m_{i,j}}{m_{j,j}} L_j$

 Sinon :

$\det \leftarrow 0$ et sortir

$\det \leftarrow \det \times m_{j,j}$

$\det \leftarrow \det \times m_{n,n}$

Exercice. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ en la rendant triangulaire.

Résolution.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9$$

Développement par rapport à une ligne/colonne

Théorème

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

- Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$; alors :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i_0+k} \times a_{i_0,k} \times \Delta_{i_0,k} \quad (\text{développement par rapport à la ligne } i_0)$$

- Soit $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$; alors :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j_0} \times a_{k,j_0} \times \Delta_{k,j_0} \quad (\text{développement par rapport à la col. } j_0)$$

Démonstration. Admis. ■

En particulier :

Déterminant d'une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exercice. Calculer :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Résolution.

- Calcul de D_1 : on décompose par rapport à la première colonne :

$$D_1 = 0 - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times 1 + 1 \times (-3) = -5$$

- Calcul de D_2 : on décompose par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} D_2 &= -0 + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 5 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 - 4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times 15 - 10 - 3 \times 20 + 5 \times 9 - 4 \times 9 = 14 \end{aligned}$$

Règle de Sarrus

Le déterminant d'une matrice 3×3 admet aussi une formule explicite : c'est la règle de Sarrus :

Règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Démonstration. En décomposant le long de la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire par bloc

La formule du déterminant d'une matrice triangulaire se généralise aux matrices triangulaires par blocs.

Théorème

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$,
 $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ et O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(M) = \det(A) \times \det(C).$$

$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ et O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

$$\det(M) = \det(A) \times \det(C).$$

Démonstration. Par produit de matrices par bloc, $M = PQ$ où

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & C \end{array} \right) \quad Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array} \right).$$

En décomposant P le long de la première colonne :

$$\det(P) = \left| \begin{array}{c|c} I_p & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & C \end{array} \right| = 1 \times \left| \begin{array}{c|c} I_{p-1} & O_{p-1,n-p} \\ \hline O_{n-p,p-1} & C \end{array} \right| = \dots = \det(C)$$

En décomposant Q le long de la dernière ligne :

$$\det(Q) = \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-p,p} & I_{n-p} \end{array} \right| = (-1)^{2n} \times \left| \begin{array}{c|c} A & B' \\ \hline O_{n-p-1,p} & I_{n-p-1} \end{array} \right| = \dots = \det(A)$$

Donc $\det(M) = \det(P) \times \det(Q) = \det(A) \times \det(C)$. ■

Exemple. À connaître : Déterminant de Vandermonde.

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires deux à deux distincts ($i \neq j \implies a_i \neq a_j$). La matrice de Vandermonde $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est la matrice :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Calculons son déterminant :

On applique successivement les opérations élémentaires sur les colonnes, en partant de la dernière à la première :

$$C_n \leftarrow C_n - a_1 \cdot C_{n-1} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad C_3 \leftarrow C_3 - a_1 \cdot C_2 \quad ; \quad C_2 \leftarrow C_2 - a_1 \cdot C_1$$

ce faisant on ne change pas le déterminant (proposition 5). On obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{pmatrix}$$

puis l'on décompose le déterminant selon la première ligne :

$$\det(V(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{pmatrix}$$

On voit apparaître que sur la matrice obtenu, se factorise $(a_2 - a_1)$ sur la première ligne, $(a_3 - a_1)$ sur la deuxième, $\dots$, $(a_n - a_1)$ sur la dernière. D'après la propriété 2 :

$$\det(V(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \prod_{j=2}^n (a_j - a_1) \times \det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de VanderMonde est :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Observons le lien avec le polynôme d'interpolation de Lagrange : Déterminer un polynôme P dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui interpole le nuage de points $((a_i, b_i))_{1 \leq i \leq n}$ équivaut en posant $P = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot X^k$ à résoudre le système linéaire d'inconnues $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, coefficients de P :

$$\begin{cases} x_0 + x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_1^2 + \dots + x_{n-1} \cdot a_1^{n-1} &= b_1 \\ x_0 + x_1 \cdot a_2 + x_2 \cdot a_2^2 + \dots + x_{n-1} \cdot a_2^{n-1} &= b_2 \\ &\vdots \\ x_0 + x_1 \cdot a_n + x_2 \cdot a_n^2 + \dots + x_{n-1} \cdot a_n^{n-1} &= b_n \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Puisque lorsque les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux distincts, le déterminant de la matrice du système, qui n'est rien d'autre qu'un déterminant de Vandermonde, est non nul, on retrouve qu'il existe un unique polynôme interpolateur dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ d'un nuage de n points (voir chapitre 6.B).

Lorsque les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts le déterminant est nul (car deux lignes identiques) est il existe alors 0 ou une infinité de tels polynômes interpolateurs.

Déterminant d'une famille de n vecteurs d'un ev de dim n .

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E . On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, noté $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, le déterminant de la matrice P dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs x_i dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Attention le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B}$ la base canonique,

$$\mathcal{B}' = (1, 2X + 1, X^2 + X + 1).$$

Obtenir le déterminant dans chacune des deux bases de la famille $(X + 1, X - 1, X^2 + 3X + 1)$.

Résolution.

Dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(X + 1, X - 1, X^2 + 3X + 1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

Dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\det_{\mathcal{B}'}(X + 1, X - 1, X^2 + 3X + 1) = \begin{vmatrix} 1/2 & -3/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/4 - (-3/4) = 1$$

Théorème

(Caractérisation des bases)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E ,
 $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Démonstration. La famille étant constituée de n vecteurs, elle forme une base ssi elle est de rang n , ssi la matrice P est inversible, ssi $\det(P) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$. ■

Exercice. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = (e_1 + e_3, e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Résolution.

On applique la caractérisation des bases :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - ((-1) + 1) = 1 \neq 0$$

Oui c'est une base.

Remarque. Orientation d'un espace vectoriel réel.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; orienter E , c'est choisir un des deux ensembles $\{\mathcal{B}' \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0\}$ et $\{\mathcal{B}' \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0\}$, qu'on appelle ensemble des bases directes, l'autre étant appelé ensemble des bases indirectes.

On a alors, si $\mathcal{B}_1$ est une base directe, et $\mathcal{B}_2$ une base quelconque de E , $\mathcal{B}_2$ est directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$.

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition-Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, il est appelé déterminant de l'endomorphisme u et noté $\det(u)$.

Remarque. On notera en particulier que $\det(\text{id}_E) = 1$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases, on sait que $\tilde{M} = P^{-1}MP$ où $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\tilde{M} = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(u)$ d'où $\det(\tilde{M}) = \det(P^{-1}) \times \det M \times \det P = \det M$. ■

Propriété

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\det(\alpha u) = \alpha^n \det(u)$.
- $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$
- u est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$, et, dans ce cas :
$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$$

Démonstration. Découle de la propriété 3 et des propriétés de la représentation matricielle d'un endomorphisme (cf. Chap. 6.B). ■

Exemple. Quel est le déterminant de la symétrie de E par F parallèlement à G ?