Chapitre 6 :
Algèbre linéaire :
espaces vectoriels et applications linéaires

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux
https://www.jean-philippe-preaux.fr

- Espace vectoriel, sous-espace vectoriel, somme directe
  - $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  - Sous-espaces vectoriels
  - Somme de sous-espaces vectoriel
- Applications linéaires
  - Généralités
  - Équations linéaires
  - Projecteurs et symétries
  - Polynôme d'endomorphisme
- Espaces vectoriels de dimension finie
  - Familles finies de vecteurs
  - Espace vectoriel de dimension finie
  - Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie
  - Sous-espaces vectoriels de dimension finie
  - Rang d'une famille de vecteurs
- Applications linéaires en dimension finie
  - Image d'une base
  - Rang d'une application linéaire en dimension finie
  - Représentation matricielle
  - Noyau, image et rang d'une matrice
  - Trace d'un endomorphisme en dimension finie

La notion d'espace vectoriel a été introduite au début du 19^e siècle avec le britannique Arthur Cayley (1821-1895), sur des n-uplets et l'allemand Hermann Grassmann (1809-1877), sur des espaces abstraits. C'est l'italien Giuseppe Peano (1858-1932) qui a formalisé les espaces vectoriels actuels.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p et q deux entiers strictement positifs.

Les preuves en algèbre linéaire sont souvent élémentaires. Nous ne détaillerons que les preuves non triviales.

$\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne, $+$, (l'addition), et d'une loi de composition externe avec $\mathbb{K}$, $\cdot$, (la multiplication par un scalaire), tels que :

- $(E, +)$ *est un groupe commutatif. Le neutre sera noté* O_E.
- *La multiplication par un scalaire vérifie les quatres propriétés suivantes pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *quelconques et* $x, y \in E$ *quelconques*
  - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
  - $1 \cdot x = x$

Remarques.

• Les élément de E sont appelés les vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires.

• Dans la pratique, on omet la notation $\cdot$, mais on prendra garde à ne jamais écrire $x\lambda$ (quel sens ?) mais bien λx.

• Si E est un $\mathbb{K}$-ev, et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$\lambda \cdot x = \mathrm{O}_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = \mathrm{O}_E)\,.$$

Exemples. Les exemples de référence sont :

- l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de scalaires ;
- l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ des applications d'un ensemble non vide Ω dans $\mathbb{K}$, en particulier :
  - l'ensemble $\mathbb{K}^I$ (ou $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$) des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$
  - l'ensemble $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  - l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$
- l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ des applications d'un ensemble non vide Ω dans un $\mathbb{K}$-e.v., en particulier :
  - $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires d'un $\mathbb{K}$-ev E dans un $\mathbb{K}$-e.v. F.
  - $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

La plupart des exemples précédents sont des cas d'application des deux constructions suivantes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (en remarquant que $\mathbb{K}$ est trivialement un $\mathbb{K}$-e.v. où la loi externe coïncide avec la multiplication interne).

Proposition

(Produit fini de $\mathbb{K}$-e.v.)

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-ev. L'ensemble produit :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Démonstration. Il est trivial de vérifier les axiomes d'un $\mathbb{K}$-e.v.. Le vecteur nul est $(O_{E_1}, \ldots, O_{E_n})$. ∎

Proposition

($\mathbb{K}$-e.v. des applications à valeurs dans un $\mathbb{K}$-e.v.)

Soit X un ensemble non-vide et E un $\mathbb{K}$-e.v.. L'ensemble des application de X dans E noté $\mathcal{F}(X, E)$ ou E^X est un $\mathbb{K}$-e.v. muni des lois :

$$\forall x \in X \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Démonstration. Il est trivial de vérifier les axiomes d'un $\mathbb{K}$-e.v.. Le vecteur nul est l'application identiquement nulle $x \longmapsto O_E$. ■

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Définition

(Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs)

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$; une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est un vecteur u de E de la forme : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Définition

(Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque F, muni des mêmes opérations $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition

(Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., F un sous-ensemble de E ; F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $O_E \in F$,
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\lambda.x + \mu.y \in F$ *(on dit que F est stable par combinaisons linéaires)*

Démonstration. Triviale ; les deux conditions assurent que F est non-vide et stable par $+$ et $\cdot$; ce qui assure que les lois interne $+$ et externe $\cdot$ soient définies sur F. Elles héritent alors naturellement des propriétés vérifiées dans le $\mathbb{K}$-e.v. E. ∎

Remarque. Ou de manières équivalentes, un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel ssi F est non vide et stable par combinaison linéaire. La condition $O_E \in F$ peut être remplacée par $F \neq \varnothing$. La stabilité par combinaison linéaire peut être remplacée par les stabilités par $+$ et $\cdot$.

Exemples.

– $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\}$; (sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation cartésienne)

– $\left\{(a - 2b, 3a, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$; (sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$ défini par une paramétrisation)

– $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \times M = O_2\}$ avec $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ fixée.

– Les ensembles des suite réelles convergentes ? croissantes ? monotones ?

– Les ensembles de séries convergentes ? divergentes ?

Exemples. Exemples de référence.

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène définie sur un intervalle I est-un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition

(Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs)

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille finie de vecteurs de* E*.*
On désigne par $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ *:*

$$\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E*, appelée* *sous-espace vectoriel engendré* par $(x_1, \ldots, x_n)$

Exemples.

– $\left\{(a-2b, 3a, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $((1,3,1), (-2,0,1))$.

– $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(1, X, \ldots, X^n)$.

Remarque. $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit s.e.v. de E contenant x_1, ..., x_n (au sens de l'inclusion). Autrement dit : Si F est un s.e.v. de E contenant x_1, ..., x_n alors $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset F$.

Méthode. Pour montrer qu'un sous-ensemble est un sous-e.v. :

– On montre qu'il est non-vide (le plus souvent que $O_E \in F$) et stable par addition $+$ et multiplication par un scalaire $\cdot$.

– On montre qu'il contient O_E et que pour tout $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x + y \in F$.

– On remarque que c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs (en général lorsque l'ensemble est donné par une paramétrisation).

– On remarque que c'est l'image $\mathrm{Im}\,\varphi$ ou le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ d'une application linéaire φ.

Proposition

(Intersection de s.e.v.)

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace-vectoriel de E.

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E (I est un ensemble non vide quelconque, fini ou infini). On vérifie les deux conditions de la caractérisation :
– $\forall i \in I,\ O_E \in F_i \implies O_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$.
– Soient $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; $\forall i \in I,\ (\lambda \cdot x + y) \in F_i \implies (\lambda \cdot x + y) \in \bigcap_{i\in I} F_i$. ∎

Sommes de 2 sous-espaces

Proposition-Définition

(Somme de deux sev)

Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E. On définit :

$$F + G = \Big\{ f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G \Big\}.$$

C'est un sous espace vectoriel de E.

Démonstration. Immédiate. ∎

Définition

(Somme directe de deux sev)

Deux sous-espaces vectoriels de E, F et G, sont en somme directe si :

$$\forall x \in F + G, \exists!(f, g) \in F \times G, x = f + g.$$

On note alors :

$$F \oplus G = F + G.$$

Remarque. Si F et G sont en somme directe alors $F \cap G = \left\{O_E\right\}$.

Définition

(Sous-espaces supplémentaires)

Deux sev F et G de E sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$, ou autrement dit, si :

$$\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, x = f + g$$

Proposition

Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Deux sev F et G de E sont supplémentaires dans E ssi :

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \left\{O_E\right\}$$

Démonstration. L'existence pour tout $x \in E$ de $(f, g) \in F \times G$ tels que $x = f + g$, équivaut à $E = F + G$; l'unicité à $F \cap G = \left\{O_E\right\}$. ∎

Exemples.

• Dans $\mathbb{R}^3$ le plan vectoriel $E = \Big\{(x,y,z) \mid x-y+z=0\Big\}$ et la droite vectorielle $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ sont supplémentaires : $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

• Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les sev des matrices symétriques et anti-symétriques sont supplémentaires : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

• Dans $\mathbb{K}[X]$ les sev $F = \mathbb{K}_1[X]$ et $G = \Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\Big\}$ sont supplémentaires.

• Dans E ensemble des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, les sev F des suites stationnaires et G des suites convergeant vers 0 sont supplémentaires.

Exercice. Montrer que :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \Big\{ \text{ fonctions paires } \Big\} \oplus \Big\{ \text{ fonctions impaires } \Big\}$$

Résolution.

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est à la fois paire et impaire alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x) = -f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0$; ainsi $f : x \longmapsto 0$ soit $f = O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Autrement dit :

$$\left\{\text{fonctions paires}\right\} \cap \left\{\text{fonctions impaires}\right\} = \left\{O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)}_{\text{impaire}}$$

Autrement dit :

$$\left\{\text{fonctions paires}\right\} + \left\{\text{fonctions impaires}\right\} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

D'après la caractérisation, on a bien :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{\text{fonctions paires}\right\} \oplus \left\{\text{fonctions impaires}\right\}$$

Sommes de p sous-espaces

Remarque. Il s'avère que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel admet un supplémentaire.

En dimension finie c'est facile à démontrer grâce au théorème de la base incomplète. Mais ça demeure vraie en dimension infinie.

Proposition-Définition

(somme de p-sous espaces)

Soit $F_1, \cdots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ l'ensemble :

$$\left\{ f_1 + f_2 + \cdots + f_p \mid (f_1, f_2, \cdots, f_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p \right\}$$

On le note $\sum_{i=1}^{p} F_i$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Que ce soit un sous-espace vectoriel se démontre par une récurrence immédiate sur p, en appliquant le fait que la somme de deux sev est un sev et l'associativité de l'addition.

Définition

(Somme directe de p-sous espaces)

On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe et on la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, lorsque tout vecteur f de F se décompose de manière unique sous la forme :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p \text{ où } (f_1, \cdots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i.$$

Théorème

(Caractérisation des sommes directes de p sev)

$F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si pour tout $(f_1, \cdots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i$:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = O_E \implies f_1 = f_2 = \cdots = f_p = O_E.$$

Démonstration.

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, si $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = O_E$ avec l'un des $f_i \neq O_E$ alors O_E ne se décompose pas de manière unique sur $\sum F_i$: la somme n'est pas directe.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u \in \sum F_i$ quelconque ; si il existe $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(f_1', \ldots, f_p') \in \prod F_i$ tels que

$$u = f_1 + \cdots + f_p = f_1' + \cdots + f_p' \Longrightarrow (f_1 - f_1') + \cdots (f_p - f_p') = O_E \Longrightarrow \begin{cases} f_1 - f_1' & = O_E \\ & \vdots \\ f_p - f_p' & = O_E \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_1 & = f_1' \\ & \vdots \\ f_p & = f_p' \end{cases}$$

L'écriture est donc unique ; la somme est directe. ■

Corollaire

On dit que F_1, F_2,..., F_p sont supplémentaires dans E si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$,

c'est à dire ssi :

– tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = f_1 + f_2 + \cdots + f_p \quad \textit{avec} \quad (f_1, \cdots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i$$

si et seulement si :

– tout vecteur x de E se décompose sous la forme :

$$x = f_1 + f_2 + \cdots + f_p \quad \textit{avec} \quad (f_1, \cdots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i$$

et

$$\forall\, (f_1, \cdots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i,\ f_1 + f_2 + \cdots + f_p = O_E \implies f_1 = f_2 = \cdots = f_p = O_E.$$

Applications linéaires

Définition

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire lorsqu'elle vérifie :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in E^2, f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

Dans le cas où $F=\mathbb{K}$, on parle de forme linéaire.

Remarque. Nécessairement, $f(0_E)=0_F$.

Exemples. Les homothéties vectorielles $x\longmapsto\lambda\cdot x$, les projections, les symétries, dans des espaces à préciser :
$f\longmapsto f'$, $f\longmapsto\displaystyle\int_0^x f$, $f\longmapsto\displaystyle\int_a^b f$, $P\longmapsto P(X+1)$, $M\longmapsto P^{-1}MP$, etc.

Proposition

L'ensemble des applications linéaires noté $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition 2. ∎

Définition

(Endomorphisme)

Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Il est muni en outre de la loi $\circ$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ on note :

$$f^0 = \mathrm{id}_E \quad ; \quad f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}}$$

Une composée d'application linéaires est linéaire :

Proposition

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration. Découle facilement des linéarités de f et g. ∎

Proposition-Définition

(Noyau et image d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$;

$$\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f = f(E)$$

sont des sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F.

Démonstration. Découlent de la linéarité de f. La proposition qui suit les prouvent en plus grande généralité. ∎

Remarque. Le noyau d'une forme linéaire non-nulle est appelé un hyperplan.
Dans $\mathbb{R}^3$ un plan vectoriel admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$: c'est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$.

Plus généralement, les images et images réciproques d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$:

– Si E' est un sev E, alors $f(E')$ est un sev de F.

– Si F' est un sev de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

Démonstration. Découlent immédiatement de :

$$\forall (x_1, x_2) \in (E')^2,\ \lambda \cdot f(x_1) + f(x_2) = f(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E'}) \in f(E') \text{ donc } f(E') \text{ est un sev de } F$$

$$\forall (x_1, x_2) \in f^{-1}(F'),\ f(\lambda x_1 + x_2) = \underbrace{\lambda \cdot f(x_1) + f(x_2)}_{\in F'} \implies \lambda x_1 + x_2 \in f^{-1}(F') \text{ donc } f^{-1}(F')$$

est un sev de E. ∎

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$; f est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{O_E\}$

Démonstration. Découle de la linéarité de f : $f(x) = f(x') \iff f(x-x') = O_E$. ∎

Proposition

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$; si u et v commutent, alors $\ker v$ *est stable par u.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$; alors :

$$v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(O_E) = O_E \implies u(x) \in \mathrm{Ker}\, v$$

ainsi $u(\mathrm{Ker}\, v) \subset \mathrm{Ker}\, v$. ∎

Proposition-Définition

(Isomorphisme ; automorphisme)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si f est bijective alors f^{-1} est une application linéaire. On dit que f est un isomorphisme de E sur F.

Lorsque $E = F$, on parle d'automorphisme de E.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $f^{-\mathbf{1}}$ est bijective ;

$$\begin{aligned}\forall (y, y') \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f^{-\mathbf{1}}(\lambda \cdot y + y') &= f^{-\mathbf{1}}(\lambda \cdot f(x) + f(x')) \\ &= f^{-\mathbf{1}}(f(\lambda \cdot x + x')) \\ &= \lambda \cdot x + x' \\ &= \lambda \cdot f^{-\mathbf{1}}(y) + f^{-\mathbf{1}}(y').\end{aligned}$$

■

Le groupe linéaire

Proposition-Définition

L'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$, muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe (non commutatif) appelé groupe linéaire. Autrement dit :

- $\forall f, g \in \mathrm{GL}(E) \implies g \circ f \in \mathrm{GL}(E)$
- $\forall f \in \mathrm{GL}(E), f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$
- $\forall f \in \mathrm{GL}(E),\ \exists g \in \mathrm{GL}(E),\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$

Démonstration. Découle de la proposition 10 et 12 ; id_E désigne l'identité de E. ∎

Exercice. Somme directe de trois sous-espaces vectoriels

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On pose $F = \operatorname{Ker}\varphi$, $G = \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $H = \operatorname{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_E\right)$.

Montrer que l'on a la somme directe $F \oplus G \oplus H$.

Résolution.

On applique la caractérisation : soient $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, $g \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $h \in \operatorname{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_E\right)$; c'est à dire :

$$\varphi(f) = O_E \quad ; \quad \varphi(g) = g \quad ; \quad \varphi \circ \varphi(h) = -\varphi(h) - h$$

et tels que :

$$\begin{aligned}
& f + g + h = O_E \\
\Longrightarrow\ & f + 3 \cdot g + O_E = O_E && \text{en composant par } \varphi^2 + \varphi + Id \\
\Longrightarrow\ & 3 \cdot g = O_E && \text{en composant par } \varphi \\
\Longrightarrow\ & f = O_E \Longrightarrow h = O_E
\end{aligned}$$

Ainsi $f + g + h = O_E \Longrightarrow f = g = h = O_E$: la somme est directe.

Une application linéaire est uniquement déterminée par ses restrictions sur chaque facteur d'une décomposition en somme directe de l'espace de départ.

Proposition

(Application linéaire sur une somme directe)

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ *et pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ *; il existe une unique application linéaire* $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *qui coïncide avec* f_i *sur chaque* E_i*, c'est à dire telle que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_{|E_i} = f_i$.

Démonstration. Analyse : soit $x \in E$; $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Par linéarité de $f \in \mathscr{L}(E, F)$:

$$f(x) = f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \quad \text{car } f_{|E_i} = f_i.$$

Synthèse : l'application $f : x \longmapsto f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$ est bien définie par unicité de la décomposition, et est linéaire par linéarité des f_i ; elle se restreint à f_i sur chaque E_i. Elle convient ; c'est la seule. ∎

Équations linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une équation linéaire est une équation de la forme :

$$f(x) = b \quad \text{d'inconnue } x \in E, \text{ avec } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } b \in F$$

Exemples. Les équations différentielles linéaires, les systèmes linéaires, les suites récurrentes linéaires (par exemple une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = a.u_n + b$ est solution de $f(u_n) = v_n$ avec $f : (u_n) \longmapsto (u_{n+1}) - a \cdot (u_n)$, $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)$ et (v_n) est stationnaire égale à b), etc.

Sous-espace affine

Pour une équation linéaire, l'ensemble des solutions a une structure particulière, dite affine.

Dans un $\mathbb{K}$-ev E, un sous-espace affine est un sous-ensemble de la forme $\left\{x_0 + x \mid x \in E_1\right\}$, noté $x_0 + E_1$, avec $x_0 \in E$ fixé et E_1 un sev de E ; le sev E_1 s'appelle la direction du sous-espace affine.

Structure des solutions d'une équation linéaire

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $x \in E$: $f(x) = b$. L'ensemble des solutions $\mathscr{S} = f^{-1}\left(\{b\}\right)$ vérifie :

- *Si $b \notin \operatorname{Im} f$ alors $\mathscr{S} = \varnothing$.*
- *Si $b \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$ et $\mathscr{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$.*

  L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

  Autrement dit les solutions sont toutes somme d'une solution particulière x_0 et des solutions générales de l'équation homogène associée $f(x) = O_F$.

Démonstration. Le premier point est évident ; le second découle de la linéarité de f :

$$f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = O_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} f \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} f$$

Exemple. Expressions en fonction de n des suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = a.u_n + b$ (avec $a \neq 1$). Soit :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N} \\ & (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1}) - a(u_n) \end{array}$$

f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(\lambda.(u_n) + (v_n)) &= (\lambda.u_{n+1} + (v_{n+1})) - a(\lambda.(u_n) + (v_n)) \\ &= \lambda.(u_{n+1} - a(u_n)) + (v_{n+1} - a(v_n)) \\ &= \lambda.f((u_n)) + f((v_n)) \end{aligned}$$

en notant (b) la suite stationnaire égale au réel b, il s'agit de résoudre l'équation linéaire $f((u_n)) = (b)$.

Puisque $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ a une unique solution égale à $x = b/(1-a)$; la suite stationnaire égale à $b/(1-a)$ est donc solution. Par ailleurs $\mathrm{Ker}\, f$ est constitué de toutes les suites géométrique de raison a. Ainsi :

$$\mathscr{S} = \left\{ n \longmapsto k.a^n + \frac{b}{1-a} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

et la donnée de u_0 détermine de manière unique $k = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Exercice. Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 2 \cdot 3^n$$

Indication : montrer que la suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution.

Résolution.

Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1}) - 5(u_n) \end{array}$$

f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(\lambda.(u_n) + (v_n)) &= (\lambda.u_{n+1} + (v_{n+1})) - 5(\lambda.(u_n) + (v_n)) \\ &= \lambda.(u_{n+1} - 5(u_n)) + (v_{n+1} - 5(v_n)) \\ &= \lambda.f((u_n)) + f((v_n)) \end{aligned}$$

Déterminer les suites (u_n) vérifiant cette relation de récurrence, consiste à résoudre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'équation linéaire : $f((u_n)) = -2.3^n$, d'inconnue (u_n).

La suite $(3^n)_n$ est solution :

$$5 \times 3^n - 2 \times 3^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$

Ainsi $\mathscr{S} \neq \varnothing$: $\mathscr{S} = 3^n + \mathrm{Ker}\, f$.

D'autre part $\mathrm{Ker}\, f$ et constitué de toutes les suites géométriques de raison 5 ; ainsi (u_n) est de la forme :

$$u_n = k.5^n + 3^n$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Pour simplifier la recherche d'une « solution particulière » x_0, on peut lorsque le second membre est une somme, appliquer le principe de superposition des solutions :

Théorème

(Principe de superposition des solutions)

On se place dans les conditions du théorème précédent avec $b = b_1 + b_2$. Si x_1 est solution de l'équation d'inconnue $x \in E$, $f(x) = b_1$, de même pour x_2 avec l'équation $f(x) = b_2$ alors $x = x_1 + x_2$ est solution de l'équation $f(x) = b$.

Démonstration. Découle de la linéarité de f. ■

Exemple. Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$y'' + y = \sin(2x) + \cos(x) \qquad (E)$$

Il s'agit d'une équation linéaire : l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{D}_2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y'' + y \end{array}$$

est linéaire, par linéarité de la dérivation.

L'équation homogène associée est : (H) : $y'' + y = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta < 0$ et ses deux solutions sont les complexes conjugués : $\pm\mathrm{i}$. Ainsi les solutions de (H) sont :

$$\mathscr{S}_H = \operatorname{Ker} f = \left\{x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Pour déterminer une solution particulière on applique le principe de superposition des solutions ; soient :

$$y'' + y = \sin(2x) = \operatorname{Im}\left(e^{2ix}\right) \quad (E_1) \qquad ; \qquad y'' + y = \cos(x) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) \quad (E_2)$$

– Solution particulière de (E_1). Puisque $2i$ n'est pas solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme $y_1(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Après calculs on trouve que la fonction $y_1(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x)$ est une solution particulière de (E_1).

– Solution particulière de (E_2). Puisque i est solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme : $y_2(x) = ax\cos(x) + bx\sin(x)$. Après calculs on trouve que $y_2(x) = \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E_2).

Finalement, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}_E = y_p + \mathrm{Ker}\, f = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Projecteurs et symétries

Définition

On suppose que $E = F \oplus G$

Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(f_x, g_x) \in F \times G$ tel que $x = f_x + g_x$.

- *Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application linéaire :*

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

- *La symétrie de F parallèlement à G est l'application linéaire :*

$$s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f_x - g_x \end{array}$$

Remarque. On remarque que $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ et $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, avec F le plan vectoriel d'équation $z = 0$, et G la droite vectorielle $\mathrm{Vect}((0,0,1))$, p est la projection orthogonale sur F, s est la symétrie orthogonale par rapport à F :

$$p : (x, y, z) \longmapsto (x, y, 0) \quad ; \quad s : (x, y, z) \longmapsto (x, y, -z)$$

Avec $G = \mathrm{Vect}((0,1,1))$:

$$p : (x, y, z) \longmapsto (x, y - z, 0) \quad ; \quad s : (x, y, z) \longmapsto (x, y - 2z, -z)$$

Caractérisation des projecteurs

Théorème

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ *; p est un projecteur si et seulement si :*

$$p \circ p = p.$$

On a alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ *: p est le projecteur sur* $\operatorname{Im} p$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$*.*

De plus :

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$$

c'est-à-dire que $x \in \operatorname{Im} p \iff p(x) = x$*.*

Démonstration. Si p est un projecteur sur F parallèlement à G, il est clair que pour tout $x \in E$:

$$p(p(x)) = p(\underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{O_E}_{\in G}) = p(x).$$

donc $p \circ p = p$.

Réciproquement, Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Soit $x \in E$, écrivons $x = p(x) + x - p(x)$; comme $p(x - p(x)) = O_E$, on a : $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$, donc $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$. Il reste à montrer que la somme est directe.

Si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et $p(x) = p(p(y)) = p(y) = O_E = x$ donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{O_E\}$ d'où la somme directe : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

Enfin si $x = p(x)$ alors $x \in \operatorname{Im} p$ (évident) et réciproquement si $x \in \operatorname{Im} p$ alors il existe y tel que $x = p(y) = p(p(y)) = p(x)$. Ainsi $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$. ■

Caractérisation des symétries

Théorème

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$; s est une symétrie si et seulement si :

$$s \circ s = \mathrm{id}_E$$

On a alors :

$$E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$$

et s est la symétrie de $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Démonstration. Notons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$; alors p est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ ssi s est une symétrie de $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

On a :

$$p \circ p = p \iff \frac{1}{4}\left(s^2 + 2s + \mathrm{id}_E\right) = \frac{1}{2}\,(s + \mathrm{id}_E) \iff s \circ s = \mathrm{id}_E$$

ce qui montre la première assertion ; de plus
$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\,\left(\frac{1}{2}(s - \mathrm{id}_E)\right) = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$
$\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\,\left(\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)\right) = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$. ∎

Exercice. (Oral Mines-Ponts 2018)

Soient $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par g.
2) Soit p un projecteur de E. Montrer que p et f commutent ssi $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Résolution.

1) Soit $y \in \mathrm{Im}\, f\ :\ y = f(x)$:

$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) \in \mathrm{Im}\, f \text{ ; ainsi } \mathrm{Im}\, f \text{ est stable par } g$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f\ :\ f(x) = O_E$

$$O_E = g(O_E) = g \circ f(x) = f \circ g(x) \implies g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$$

ainsi $\mathrm{Ker}\, f$ est stable par g.

2) Soit p un projecteur de E. D'après 1), si p et f commutent, alors $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par f.

Réciproquement : supposons que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ soient stables par f.

On a $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$; soit $x \in E$ quelconque, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, p$.

Alors :

$$f(p(x)) = f(x_1)$$
$$p(f(x)) = p(\underbrace{f(x_1)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{f(x_2)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}) = p(f(x_1)) = f(x_1)$$

Ainsi pour tout $x \in E$, $f \circ p(x) = p \circ f(x)$: f et p commutent.

Polynôme d'endomorphisme

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E. Les résultats de cette partie sont une retranscription de ceux vus au paragraphe 2.4 du chapitre sur les matrices.

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ on note :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k$$

C'est un endomorphisme de E qu'on appelle polynôme d'endomorphisme.

Exemple. Avec $P = 1 + X + X^2$ et $u(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$.

$$u^0(x, y, z) = (x, y, z) \ ; \ u^1(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z) \ ;$$
$$u^2(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y + 2z, z)$$

$$\Longrightarrow \ P(u) = u^0 + u^1 + u^2 : (x, y, z) \longmapsto (3x + 3y + 4z, 3y + 3z, 3z)$$

Les polynômes d'endomorphisme ont des propriétés naturelles ; les opérations sur les polynômes d'endomorphisme coïncident avec les opérations sur les polynômes.

Proposition

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ ($n \geqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$). Alors par définition :

$$(P+Q)(u) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot u^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k + b_k \cdot u^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot u^k = P(u) + Q(u)$$

par linéarité de la somme. ∎

Proposition

Soient $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *et* $u \in \mathscr{L}(E)$. *Alors :*

$$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $b_m \in \mathbb{K}$:

$$(P \times b_m X^m)(u) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_m X^{k+m}\right)(u) = \sum_{k=0}^{n} (a_k b_m) \cdot u^{k+m} = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot u^k) \circ (b_m \cdot u^m)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k\right) \circ b_m \cdot u^m = P(u) \circ b_m \cdot u^m \qquad (*)$$

par distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}[X]$, et par propriété des puissances, compatibilité de $\cdot$ avec $\circ$ et distributivité de $\circ$ sur $+$ dans $\mathscr{L}(E)$.

En notant $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, on a alors avec ce qui précède et la proposition 19, et par distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}[X]$ et de $\circ$ sur $+$ dans $\mathscr{L}(E)$:

$$(P \times Q)(u) = \left(P \times \sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right)(u) = \left(\sum_{k=0}^{m} P \times b_k X^k\right)(u) \underset{(19)}{=} \sum_{k=0}^{m} \left(P \times b_k X^k\right)(u)$$

$$\underset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{m} P(u) \circ b_k u^k = P(u) \circ \sum_{k=0}^{m} b_k u^k = P(u) \circ Q(u)$$

■

Corollaire

Soient $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$; les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent pour la composition $\circ$

Démonstration. Découle de la proposition 20 et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P(u) \circ Q(u) \underset{(20)}{=} (P \times Q)(u) = (Q \times P)(u) \underset{(20)}{=} Q(u) \circ P(u)$$

■

Proposition

($\mathrm{Ker}\, P(u)$ est stable par u)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$; alors le noyau de l'endomorphisme $P(u)$ est stable par u.

Démonstration. D'après le corollaire précédent les endomorphismes $P(u)$ et u commutent. D'après la proposition 13 $\mathrm{Ker}\, P(u)$ est stable par u. ■

Définition

(Polynôme annulateur)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$; P est appelé polynôme annulateur de u si $P(u) = O_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple. Le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme $u(x,y) = (4x - 10y, x - 3y)$; en effet :

$$u^2(x,y) = (6x - 10y, x - y) \qquad (u^2 - u - 2\mathrm{id}_E)(x,y,z) = (0,0,0)$$
$$\Longrightarrow u^2 - u - 2\mathrm{id}_E = O_{\mathscr{L}(E)}$$

Méthode. Un polynôme annulateur P d'un endomorphisme u, permet le calcul :

- d'un inverse de u : lorsque le monôme de degré 0 de P est non-nul,
- des puissances de u : si P est de degré d, toutes les puissances u^n pour $n \geqslant d$ sont combinaisons linéaires des endomorphismes $u^0, u^1, \ldots, u^{d-1}$:

$$\forall n \geq d, \ \exists(\alpha_n, \beta_n, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{K}^d, \ u^n = \alpha_n \cdot u^0 + \beta_n \cdot u^1 + \cdots + \zeta_n \cdot u^{d-1}$$

et les suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n, \ldots$, $(\zeta_n)_n$ sont des suites récurrentes linéaires imbriquées. Si l'on parvient à exprimer α_n, β_n, $\ldots$, ζ_n en fonction de n on obtient l'expression des coefficients de u^n.

Famille libre ; liée

Définition

Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$; on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre lorsque :

$$\forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = O_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée.

Remarque. Une famille est liée ssi l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire de tous les autres.

Exemples.

– $((1,0,2),(1,1,1),(-1,1,0))$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$; le système :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \\ 2x+y \quad =0 \end{cases}$$

a pour unique solution $(0,0,0)$.

– $(\cos,\sin)$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$a\cos(x)+b\sin(x)=O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \implies \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\phi)=O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \implies a=b=0.$$

– Une famille $P_0,\dots,P_n$ de polynômes à degrés échelonnés (*i.e.* $\deg(P_0)<\dots<\deg(P_n)$) est libre dans $\mathbb{K}[X]$: en effet si $a_n\neq 0$, $\deg\left(a_0.P_0+\dots+a_n.P_n\right)=\deg(P_n)$.

Proposition

Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition en complétant toute combinaison linéaire $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p$ de la sous-famille $(v_1, \ldots, v_p)$ en une combinaison linéaire de la famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1} \ldots, v_n)$ par :

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p + 0 \cdot v_{p+1} + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

La deuxième assertion est la contraposée de la première. ■

Famille génératrice

Définition

(Famille génératrice)

Soit $x_1, \dots, x_n \in E$; on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E lorsque $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n) = E$.

Exemples.

– Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y - z = 0$ a pour famille génératrice $((1, 1, 3), (0, 1, 2))$.

– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$ a pour famille génératrice $(\cos, \sin)$.

Base

Définition

Une base de E est une famille libre et génératrice de E.

Exemples. (Bases canoniques). Les familles suivantes sont des bases de référence de chacun des espaces suivants, appelées bases canoniques.

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $((1,0,\dots,0,0),(0,1,\dots,0,0),\dots,(0,0,\dots,0,1))$.
- La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour base la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui ligne i, colonne j qui vaut 1.

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Proposition-Définition

On suppose que E possède une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$
Alors, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés les <u>*coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$*</u>.

Démonstration. L'existence de la famille de scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ découle du fait que la famille soit génératrice. Son unicité découle du fait qu'elle soit libre ; en effet :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot e_i \implies \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i') \cdot e_i = O_E \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = x_i'$$

■

Base adaptée à une somme directe

Proposition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que

- $E = F \oplus G$.
- *F admet une base* $(f_1, \ldots, f_m)$.
- *G admet une base* $(g_1, \ldots, g_n)$.

Alors la famille $(f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de E. Elle est dite adaptée à la somme directe $F \oplus G$

Démonstration. La famille est génératrice ; soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times G$, et il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $x_1 = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot f_m$ et $x_2 = \mu_1 \cdot g_1 + \cdots + \mu_n \cdot g_n$; donc :

$$x = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot f_m + \mu_1 \cdot g_1 + \cdots + \mu_n \cdot g_n.$$

La famille est libre : supposons que

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot f_m}_{=x_1 \in F} + \underbrace{\mu_1 \cdot g_1 + \cdots + \mu_n \cdot g_n}_{=x_2 \in G} = O_E$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur $F \oplus G$, appliquée au vecteur nul O_E, nécessairement $x_1 = O_E$ et $x_2 = O_E$, et par liberté des familles $(f_1, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots, g_n)$, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ et $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. ■

Ce résultat admet une réciproque :

Proposition

(Décomposition en somme directe)

Si $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ *est une famille libre de* E*, alors* $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ *et* $\mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ *sont en somme directe.*

Démonstration. Si la somme n'était pas directe on aurait une intersection $\neq \{O_E\}$ c'est-à-dire $\lambda_{\mathbf{1}}, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+\mathbf{1}}, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_{\mathbf{1}} \cdot e_{\mathbf{1}} + \cdots + \lambda_k \cdot e_k = \lambda_{k+\mathbf{1}} \cdot e_{k+\mathbf{1}} + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$ ce qui contredirait le fait que la famille soit libre. ∎

Plus généralement :

Proposition

(Base adaptée à une somme directe)

Soit une somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ *et pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathcal{B}_i$ *une base de* F_i. *Alors la concaténée des* $(\mathcal{B}_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ *est une base de* E.
Réciproquement, on suppose que $(e_i)_{1\in[\![1,n]\!]}$ *est une base de* E *concaténée de familles libres* $(\mathcal{B}_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ *Alors, en posant pour tout* $i \in [\![1, m]\!], F_i = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B}_i)$, *on a la somme directe :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i \text{ et pour tout } i \in [\![1, m]\!], \mathcal{B}_i \text{ est une base de } F_i.$$

Démonstration. Elle procède de la même façon, mais avec m sous-espaces. ■

Espace vectoriel de dimension finie

Définition

Un espace vectoriel E est dit de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

Exemples. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux en théorie des espaces vectoriels de dimension finie ; ils permettent la construction d'une base, pour le premier en complétant une famille libre, pour le second en l'extrayant d'une famille génératrice.

Théorème de la base incomplète

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E. Alors toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée par des vecteurs de $\mathcal{F}$ en une base de E.

Sa preuve repose sur le lemme très utile suivant :

Lemme

(Famille libre non génératrice)

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E et soit u_{n+1} un vecteur de E qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est encore une famille libre.

Démonstration. Dans le cas contraire on aurait $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot u_k = O_E$$

puisque la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, nécessairement $\lambda_{n+1} \neq 0$; mais alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \cdot u_k \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$$

impossible par hypothèse. ∎

Démonstration. Théorème 27.

Soit $\mathcal{L} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice.

Si $e_1 \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, on change $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L} \cup \{e_1\}$; d'après le lemme on obtient une famille libre. On procède de la même façon avec $e_2, \ldots, e_n$.

On obtient finalement une famille libre $\mathcal{L}$, telle que $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. Mais puisque $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est le plus petit sev contenant $e_1, \ldots, e_n$, on a :
$E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{L}) \subset E$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}) = E$; la famille $\mathcal{L}$ est donc libre et génératrice : c'est une base de E constituée de $u_1, \ldots, u_p$ et de vecteurs de $\mathcal{F}$. ∎

Théorème de la base extraite

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

Sa preuve repose sur le lemme important suivant :

Lemme

(Famille génératrice liée)

Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $\mathcal{F}$ contient un vecteur e_i tel que $\mathcal{F} \setminus \{e_i\}$ soit encore une famille génératrice de E.

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors un des vecteurs v_i de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de tous les autres. La famille $\mathcal{F}'$ obtenue en retirant e_i de $\mathcal{F}$ vérifie que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$. Puisque $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sev contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$, on a :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F}') \subset E$$

et donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}') = E$: $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{e_i\}$ est encore une famille génératrice de E. ■

Démonstration. Théorème 29.

Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, d'après le lemme on peut lui retirer un vecteur pour obtenir une famille génératrice $\mathcal{F}'$ de E avec $\mathrm{Card}(\mathcal{F}') = \mathrm{C}ard(\mathcal{F}) - 1$. Puisqu'une famille vide est libre (base de $\{O_E\}$), en répétant ce procédé tant que la famille génératrice est liée, on finit par obtenir une famille libre et génératrice de E. ■

Corollaire

(Existence de base)

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Le résultat fondamental est que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal. Sa preuve s'appuie sur le lemme technique suivant :

Lemme
(de Steinitz)

Toute famille de $n+1$ *vecteurs dans* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est liée.*

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec $\mathscr{P}(n)$: "toute famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathrm{Vect}(e_\mathbf{1}, \dots, e_n)$ est liée".

(I) Pour $n = 1$; une famille de 2 vecteurs $(v_\mathbf{1}, v_\mathbf{2})$ dans $\mathrm{Vect}(e_\mathbf{1})$ est liée ; en effet $v_\mathbf{1} = \lambda_\mathbf{1} \cdot e_\mathbf{1}$ et $v_\mathbf{2} = \lambda_\mathbf{2} \cdot e_\mathbf{2}$. Si $\lambda_\mathbf{1} = 0$ alors $1 \cdot v_\mathbf{1} + 0 \cdot v_\mathbf{2} = O_E$ tandis que si $\lambda_\mathbf{1} \neq 0$ alors $\lambda_\mathbf{2} \cdot v_\mathbf{1} - \lambda_\mathbf{1} \cdot v_\mathbf{2} = O_E$.

(H) Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie pour $n-1 \geq 1$ fixé. Considérons une famille de $n+1$ vecteurs $(v_\mathbf{1}, \dots, v_n, v_{n+\mathbf{1}})$ dans $\mathrm{Vect}(e_\mathbf{1}, \dots, e_{n-\mathbf{1}}, e_n) = Vect(e_\mathbf{1}, \dots, e_{n-\mathbf{1}}) + \mathrm{Vect}(e_n)$.

Décomposons $v_1, \dots v_n$, v_{n+1} sur cette somme : il existe $n+1$ vecteurs $v'_1, \dots, v'_n, v'_{n+1}$ dans $Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $n+1$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que :

$$\begin{cases} v_1 = v'_1 + \lambda_1 \cdot e_n \\ \quad\vdots \\ v_n = v'_n + \lambda_n \cdot e_n \\ v_{n+1} = v'_{n+1} + \lambda_{n+1} \cdot e_n \end{cases}$$

Si tous les λ_i sont nuls alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de n vecteurs dans $Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$ et par hypothèse de récurrence, c'est une famille liée ; sa sur-famille $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ est donc aussi liée (proposition 23). Dans ce cas on obtient $\mathscr{P}(n)$.

Sinon, un des λ_i est non nul ; supposons sans perte de généralité que $\lambda_1 \neq 0$. Alors $e_n = \frac{1}{\lambda_1}(v_1 - v'_1)$; en substituant dans les lignes 2 à $n+1$ du système :

$$\begin{cases} v_2 = v'_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot (v_1 - v'_1) \\ \quad\vdots \\ v_n = v'_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot (v_1 - v'_1) \\ v_{n+1} = v'_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \cdot (v_1 - v'_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2 = v_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_1 = v'_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v'_1 \\ \quad\vdots \\ u_n = v_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_1 = v'_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v'_1 \\ u_{n+1} = v_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \cdot v_1 = v'_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} \cdot v'_1 \end{cases}$$

Or par construction, $u_k = v'_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot v'_1 \in Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$. Ainsi $(u_2, \dots, u_n, u_{n+1})$ est une famille de n vecteurs dans $Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$; par hypothèse de récurrence c'est une famille liée.

Ainsi il existe des scalaires $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \alpha_k \cdot u_k = O_E$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_k \cdot \left(v_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot v_1 \right) = O_E$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \cdot v_k = O_E \qquad \text{avec } \alpha_1 = -\sum_{k=2}^{n+1} \alpha_k \times \frac{\lambda_k}{\lambda_1}$$

La famille $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ est donc liée. Ainsi dans ce cas aussi $\mathscr{P}(n)$ est vérifié. ■

Dimension d'un e.v. de dimension finie

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration. Soient $(e_{\mathbf{1}}, \dots e_n)$ et $(e'_{\mathbf{1}}, \dots, e'_m)$ deux bases de E ; si l'on avait $n < m$ alors $\mathrm{Vect}(e_{\mathbf{1}}, \dots, e_n)$ contiendrait la sous-famille libre $(e'_{\mathbf{1}}, \dots, e'_n, e'_{n+\mathbf{1}})$ de $(e'_{\mathbf{1}}, \dots, e'_m)$, constituée de $n+1$ vecteurs ; c'est impossible d'après le Lemme de Steinitz. ∎

On peut alors définir la notion de dimension d'un e. v. de dimension finie :

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal d'une base de E est appelé <u>dimension</u> de E et noté $\dim(E)$.

Exemples. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n ; $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$; $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n \times p$; le sev $\{O_E\}$ de E est de dimension 0.

Dimension d'un produit cartésien

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, alors leur produit cartésien $E \times F$ est aussi de dimension finie et :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels de dimension finies, alors leur produit cartésien et aussi de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Démonstration. SI $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de E et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ est une base de F alors on vérifie aisément que la famille constituée des couples $(e_i, 0)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(0, f_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ est une base de $E \times F$. On généralise facilement au produit cartésien de plus de deux espaces. ■

Familles libre/génératrice et dimension

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- *Une famille libre contient au plus n vecteurs ; de plus lorsqu'elle contient précisément n vecteurs c'est une base de E.*
- *Une famille génératrice de E contient au moins n vecteurs ; de plus lorsqu'elle contient précisément n vecteurs c'est une base de E.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des théorèmes de la base incomplète (pour le premier) et de la base extraite (pour le second), et bien sur du fait que toutes les bases de E aient même cardinal. ■

Corollaire

Dans une espace vectoriel E de dimension n, pour toute famille $\mathcal{F}$ constituée de n vecteurs de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

– $\mathcal{F}$ *est libre.*

– $\mathcal{F}$ *est génératrice de E.*

– $\mathcal{F}$ *est une base de E.*

Exercice. Montrer que la famille $P_k = ((X+1)^k - X^k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Résolution.

Puisque c'est une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, il suffit de montrer que la famille est libre.

Or pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$(X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = X^k + k \cdot X^{k-1} - X^k + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^i = k \cdot X^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^i$$

et donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\deg P_k = k-1$.

Il s'agit donc d'une famille de polynômes à degrés échelonnés : c'est donc une famille libre, et donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple. Polynômes d'interpolation de Lagrange.

On considère une famille finie (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) de couples de réels et on cherche une fonction réelle aussi simple et régulière que possible dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par les points de coordonnées dans cette famille. Une telle fonction est dite interpolatrice.

Nécessairement on suppose que les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts (car soit il y a des répétitions dans la famille, soit une telle fonction n'existe pas), et on cherche une fonction polynomiale de degré minimal. C'est un polynôme d'interpolation. On considère alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

C'est une application linéaire puisque :

$$\begin{aligned} f(\lambda.P + Q) &= ((\lambda.P + Q)(x_1), (\lambda.P + Q)(x_2), \ldots, (\lambda.P + Q)(x_n)) \\ &= \lambda.(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)) + (Q(x_1), Q(x_2), \ldots, Q(x_n)) \\ &= \lambda.f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

et on cherche une solution de degré minimal de l'équation linéaire :

$$f(P) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le polynôme :

$$\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (X - x_j)$$

a pour degré $n-1$, est scindé à racines simples x_j pour $j \in [\![1, n]\!]$ avec $j \neq i$. Sa valeur en x_i est non nulle, égale à $\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$. On considère alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L_i = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (X - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

c'est un polynôme de degré $(n-1)$ scindé à racines simples x_j pour $j \in [\![1, n]\!]$ avec $j \neq i$ et valant 1 en x_i.

Ainsi :

$$L = y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + \cdots + y_n \cdot L_n$$

est un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L(x_i) = y_i \cdot L_i(x_i) = y_i$$

C'est donc une solution de notre équation linéaire ; c'est un polynôme interpolateur de (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Nous allons voir que c'est celui de degré minimal.

Définition

(Polynômes de Lagrange ; polynôme interpolateur de Lagrange)

Soit (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) une famille finie de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $i \neq j \implies x_i \neq x_j$. Pour cette famille, les polynômes de Lagrange sont : $(L_1, L_2, \dots L_n)$ définis par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (X - x_j)}{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Pour cette famille, le polynôme interpolateur de Lagrange est :

$$L = y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + \cdots + y_n \cdot L_n$$

il est de degré au plus $n-1$ et vérifie :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ L(x_i) = y_i.$$

Proposition

Sous les mêmes hypothèses, la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Démonstration. C'est une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n ; il suffit donc de montrer que la famille est libre.

Soient des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que : $\lambda_1 \cdot L_1 + \lambda_2 \cdot L_2 + \cdots + \lambda_n \cdot L_n = O_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.' En particulier :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (\lambda_1 \cdot L_1 + \lambda_2 \cdot L_2 + \cdots + \lambda_n \cdot L_n)(x_i) = \lambda_i \cdot L_i(x_i) = \lambda_i = O_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}(x_i) = 0$$

La famille est donc libre. ∎

Proposition

Sous les mêmes hypothèses, le polynôme interpolateur de Lagrange est l'unique polynôme de degré $\leqslant n-1$ *interpolateur de* (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$, (x_n, y_n).

En particulier, il est de degré minimal : c'est le polynôme recherché.

Démonstration. Soit P un polynôme de degré au plus $n-1$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.
D'après la proposition 37, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $P = \lambda_1 \cdot L_1 + \lambda_2 \cdot L_2 + \dots + \lambda_n \cdot L_n$.
Mais alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$P(x_i) = y_i = \lambda_i \cdot L_i(x_i) = \lambda_i$$

Ainsi $P = y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + \dots + y_n \cdot L_n$. C'est le polynôme interpolateur de Lagrange. ∎

Les polynômes de Lagrange vérifient aussi la propriété remarquable :

Proposition

Sous les mêmes hypothèses, $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ est le polynôme constant égale à 1.

Démonstration. Aux n points $x_1, x_2, \ldots x_n$, le polynôme $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ vaut 1, tout comme le polynome constant égale à 1. Or deux polynômes de degré $\leqslant n-1$ qui coïncident en n points son égaux (leur différence sera un polynôme de degré $\leqslant n-1$ ayant n racines distinctes). ∎

Exercice. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré minimal vérifiant :

$$P(0) = 1 \quad ; \quad P(1) = 2 \quad ; \quad P(2) = 0 \quad ; \quad P(3) = 1.$$

L'écrire sous forme développée et ordonnée avant de vérifier que le polynôme obtenu convient.

Résolution.

Déterminons le polynôme interpolateur de Lagrange :

$$L_1 = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(-1)\times(-2)\times(-3)} = -\frac{1}{6}\left(X^3 + (-1-2-3)X^2 + (6+2+3)X - 6\right)$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X-3)}{1\times(-1)\times(-2)} = \frac{1}{2}\left(X^3 + (-2-3)X^2 + 6X\right)$$

$$L_3 = \frac{X(X-1)(X-3)}{2\times 1\times(-1)} = -\frac{1}{2}\left(X^3 + (-1-3)X^2 + 3X\right)$$

$$L_4 = \frac{X(X-1)(X-2)}{3\times 2\times 1} = \frac{1}{6}\left(X^3 + (-1-2)X^2 + 2X\right)$$

$$P = L_1 + 2L_2 + L_4 = X^3 + \left(1 - 5 - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(-\frac{11}{6} + 6 + \frac{1}{3}\right)X + 1$$

$$P = X^3 - \frac{9}{2}X^2 + \frac{27}{6}X + 1$$

Vérifions :

$$P(0) = 1 \quad ; \quad P(1) = 1 - \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + 1 = \frac{6 - 27 + 27 + 6}{6} = 2$$

$$P(2) = 8 - \frac{9 \times 4}{2} + \frac{27 \times 2}{6} + 1 = 8 - 18 + 9 + 1 = 0$$

$$P(3) = 27 - \frac{9 \times 9}{2} + \frac{27 \times 3}{6} + 1 = \frac{54 - 81 + 27 + 2}{2} = 1$$

Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème

(Croissance de la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et :

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

De plus, $\dim(F) = \dim(E)$ *si et seulement si* $F = E$.

Démonstration. Premier cas : si $F = \{O_E\}$, $\dim(F) = 0$ et la conclusion est claire.

Deuxième cas : si $F \neq \{O_E\}$; alors F contient des familles libres, et puisque ce sont aussi des familles libres dans E, d'après le lemme de Steinitz, elle sont toutes de cardinal au plus $\dim(E)$. Il existe donc dans F une famille libre $\mathcal{F}$ de cardinal maximal $n \leqslant \dim(E)$. Si cette famille $\mathcal{F}$ n'était pas génératrice de F, alors d'après le lemme 28 on pourrait lui ajouter un vecteur de F pour obtenir une famille libre de F, ce qui contredirait la maximalité de son cardinal. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre et génératrice de F. C'est une base de F et le sev F est donc de dimension finie.

D'après le théorème de la base incomplète la famille $\mathcal{F}$ peut se compléter en une base de E et donc si $\dim(E) = \dim(F)$, alors $\mathcal{F}$ est déjà une base de E, et donc $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$. ∎

Remarque. Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle ; de dimension 2, plan vectoriel.

Théorème

(Existence de supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E, c'est à dire un sev G de E tel que $E = F \oplus G$, et tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension :

$$E = F \oplus G \Longrightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, F est de dimension finie et admet donc une base $(e_1, \ldots, e_m)$. D'après le théorème de la base incomplète cette famille se complète en une base de E : $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$. En posant $G = \mathrm{Vect}(e_{m+1}, \ldots, e_n)$, on vérifie aisément que G est un supplémentaire de F dans E, et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. ∎

Lorsqu'une somme n'est pas nécessairement directe, sa dimension s'obtient par la formule de Grassman :

Théorème

(Formule de Grassman)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sev de E. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration. Soit G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. On a alors $\dim(G) = \dim(G_1) + \dim(F \cap G)$. Montrons que $F + G = F \oplus G_1$; on aura alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G_1) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et la formule sera démontrée.

Soit $x \in F + G$, $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ et $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in F \cap G$ et $g_1 \in G_1$. Ainsi :

$$x = f + g = \underbrace{(f + g_0)}_{\in F} + \underbrace{g_1}_{\in G_1} \in F + G_1$$

Ainsi $F + G \subset F + G_1$; puisque l'autre inclusion est évidente (car $G_1 \subset G$), on a $F + G = F + G_1$.

Soit $x \in F \cap G_1$, alors $x \in F \cap G$ et $x \in G_1$. Mais puisque $F \cap G$ et G_1 sont en somme directe, nécessairement $x = O_E$. Ainsi $F \cap G_1 = \{O_E\}$: la somme est bien directe. ∎

La dimension permet alors de caractériser les sous-espace supplémentaires.

Corollaire

(Caractérisation dimensionnelle des supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sev. Alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ F \cap G = \{O_E\} \end{cases} .$$

Démonstration. Puisque $F \cap G = \{O_E\}$, avec la formule de Grassman on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$. Puisque $F + G \subset E$ on a alors bien $E = F \oplus G \iff \dim(E) = \dim(F+G)$ c'est à dire ssi $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. ■

Corollaire

(Caractérisation des sommes directes en dimension finie)

Soient F_1, F_2, F_p des sous-espaces vectoriels de dimensions finis. Alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Démonstration. En considérant la concaténée de bases de tous les F_i on obtient une famille génératrice de $\sum F_i$; son cardinal est égal à $\sum \dim(F_i)$ et est supérieur à $\dim\left(\sum F_i\right)$ (avec le théorème 35). L'égalité a lieu exactement lorsque cette famille est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\sum F_i$. Dans ce cas puisqu'un élément de $\sum F_i$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base, il s'écrit aussi de manière unique sous la forme $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ avec $(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$. Par définition, la somme est donc directe. Réciproquement, d'après la proposition 26, lorsque la somme est directe on a bien l'égalité $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$. ∎

Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou non) et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

On appelle rang de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, notée $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

La notion de rang est importante en dimension finie, rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'une application linéaire, d'un système linéaire.

Rang d'une famille libre/génératrice

Proposition

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou non) soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

Alors :

- $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$,
- $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *est libre ssi* $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = p$,
- $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *est génératrice de E ssi* $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim(E)$.

Démonstration. Par définition $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; d'après le théorème de la base extraite, $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$, et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une base ssi elle est libre ssi $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = p$. De plus $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est génératrice de E ssi $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = E$ ssi $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim(E)$ (théorème 40). ∎

Image d'une base par une application linéaire

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$; alors :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Démonstration. Soit $y \in F$; $y \in \operatorname{Im} f$ ssi $\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(e_n)$ ssi $y \in \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. ■

Caractérisation par l'image d'une base

De plus f est uniquement déterminée par la donnée de ses images des vecteurs d'une base.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base de E ; c'est-à-dire :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; pour toute famille $(f_1, \dots, f_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_i) = f_i$

Démonstration. Données $(f_1, f_2, \dots, f_n) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$; soit $x \in E$ quelconque, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$\begin{aligned}\exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x &= \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n \\ \implies \varphi(x) &= \lambda_1 \cdot \varphi(e_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(e_2) + \dots + \lambda_n \cdot \varphi(e_n) \\ \implies \varphi(x) &= \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_n \cdot f_n\end{aligned}$$

En particulier, la caractère injectif, surjectif, bijectif d'une application linéaire est aussi déterminé par l'image d'une base.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

– φ est injective ssi $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille libre.

– φ est surjective ssi $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice de F.

– φ est bijective ssi $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F.

Démonstration. Le troisième point découle des deux premiers. Quant à ces derniers :

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est injective } &\iff \left(\ker\varphi = \{O_E\}\right) \iff \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i\right) = O_F \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\right)\\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\varphi(e_i) = O_F \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\right)\\
&\iff \left(\{\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n)\} \text{ est libre.}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est surjective } &\iff \left(\forall y\in F,\ \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i\right) = y\right)\\
&\iff \left(\forall y\in F, \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\varphi(e_i) = y\right)\\
&\iff \{\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n)\} \text{ est génératice de } F.
\end{aligned}$$

■

Corollaire

- *Pour une application linéaire φ entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension :*

$$\varphi \text{ est injective } \iff \varphi \text{ est surjective } \iff \varphi \text{ est bijective.}$$

En particulier :

- *Pour un endomorphime φ d'un espace vectoriel E de dimension finie :*

$$\varphi \text{ est injective } \iff \varphi \text{ est surjective } \iff \varphi \text{ est bijective.}$$

C'est un fait remarquable que la dimension caractérise les $\mathbb{K}$-ev à isomorphisme près.

Théorème

(La dimension caractérise les ev isomorphes)

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

Démonstration. Si E et F de dimensions finies sont isomorphes il découle de la proposition 48 que $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, si $\dim(E) = \dim(F)$, d'après la proposition 48 il existe une application linéaire qui envoie la base de E sur celle de F, et toujours d'après la proposition 48 c'est un isomorphisme. ■

Rang d'une application linéaire

Définition

Une application linéaire f est dite de rang fini lorsque $\operatorname{Im} f$ *est de dimension finie. On appelle alors rang de f, noté* $\operatorname{rg} f$ *ou* $\operatorname{rg}(f)$, *la dimension de* $\operatorname{Im} f$.

Remarque. Lorsque E ou F est de dimension finie, toute application de $\mathscr{L}(E, F)$ est de rang fini.

Exemple. L'application $\varphi : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est de rang 1.

Bien sûr, toute combinaison linéaire d'applications de rang fini est de rang fini. C'est vrai aussi pour la composition d'application.

Proposition

(Rang d'une composée)

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires de rang fini.
Alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min \left\{ \mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g \right\}$

Démonstration. D'une part $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$ donc $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
D'autre part, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ alors $\mathrm{Im}\, g \circ f$ est engendré par $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ et donc $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant n = \mathrm{rg}(f)$. ∎

Remarque. En fait il suffit que g ou f soit de rang fini pour que leur composée le soit aussi.

Le résultat suivant est fondamental pour la notion de rang.

Proposition

(Invariance du rang par composition avec un isomorphisme)

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$:

- *Si f est de rang fini et si g est un isomorphisme, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$.*
- *Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$*

Démonstration. Le premier point découle du fait qu'un isomorphisme envoie une base sur une base : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ alors $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ et une base de $\mathrm{Im}\, g \circ f$.

Le second point découle du fait que lorsque $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme, $\mathrm{Im}\, f = F$ et donc $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g$. ∎

Remarque. Plus généralement avec les mêmes arguments :

- Si f est de rang fini et si g est injective, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
- Si f est surjective et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$

Pour une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finis, son rang caractérise son injectivité/surjectivité/bijectivité.

Proposition

(Rang et injectivité/surjectivité/bijectivité)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fini et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *f est injective ssi* $\mathrm{rg} f = \dim(E)$.
- *f est surjective ssi* $\mathrm{rg} f = \dim(F)$.
- *f est bijective ssi* $\mathrm{rg} f = \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. Découle de la proposition 48 : soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, alors f est injective (resp. surjective, bijective) ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre (resp. génératrice de F, une base de F) ; or $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $Im(f)$. ∎

Théorème du rang

Pour une application linéaire au départ d'un espace de dimension finie, les dimensions du noyau et de l'image sont liées. C'est le théorème du rang, d'application très importante dans les exercices.

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$; si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f$$

Sa preuve découle d'une version forte de ce théorème : *Imf* est isomorphe à un supplémentaire du noyau.

Théorème

Théorème du rang (version forte).

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si E' est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, alors $f_{|E'}$ est un isomorphisme de E' dans $\operatorname{Im} f$.

Démonstration. Soit E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E : $E = E' \oplus \operatorname{Ker} f$. En considérant une base de E adaptée à la somme directe $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots e_m)$ avec $(e_1, \dots, e_n)$ base de E' et $(e_{n+1}, \dots, e_m)$ base de $\operatorname{Ker} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n), \underbrace{f(e_{n+1}), \dots, f(e_m)}_{\textbf{tous } = O_F}) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

de plus la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et libre car :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot f(e_1) + \cdots + \lambda_, \cdot f(e_n) = O_F &\implies f(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = O_F \\
&\implies \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n \in E' \cap \operatorname{Ker} f \\
&\implies \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = O_E \qquad \text{car } E = E' \oplus \operatorname{Ker} f \\
&\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}} \qquad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base}
\end{aligned}$$

Ainsi f envoie une base de E' sur une base de Imf ; on conclut avec la proposition 48. ∎

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim E = n$.

Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff \begin{cases} f^2 = O_{\mathscr{L}(E)} \\ n = 2 \times \operatorname{rg}(f) \end{cases}$

Résolution.

D'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = n$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$ alors $n = 2 \times \dim \mathrm{Im}\, f = 2 \times \mathrm{rg}(f)$ et :

$$\forall x \in E,\ f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}\, f}) = f(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, f}) = O_E$$

Donc $f^2 = O_{\mathscr{L}(E)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $f^2 = O_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$; mais puisque $n = 2 \times \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg} f$ alors nécessairement $\dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im}\, f$.

Mais $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f$ implique $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$.

Représentation matricielle

Dans tout cette partie, E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, on note $n = \dim E$, $p = \dim F$, $q = \dim G$.

Définition

(Matrice d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemples. La matrice des coordonnées dans leur base canonique $\mathcal{B}$ du vecteur :

- $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- $P = 1 - X^2 \in \mathbb{K}_2[X]$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition

(Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E *et soit* $\mathcal{F}\,(a_1, \dots, a_p)$ *une famille de* p *vecteurs de* E.

La matrice de la famille $\mathcal{F} = (a_1, \dots, a_p)$ *est la matrice* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *telle que :*

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j}$ *est la* i*-ème coordonnée de* a_j *dans la base* $\mathcal{B}$.

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ *; on a donc*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(a_1) \Big| \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(a_2) \Big| \ \cdots \ \Big| \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(a_p) \Big)$$

Définition

(Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \underbrace{\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_j) & f(e_n) \\ \left[\begin{array}{ccc} \quad & \boxed{\begin{array}{c} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{array}} & \quad \end{array}\right] \end{array}}_{\substack{\textit{Nombre de colonnes} \\ = \textit{dimension de } E}} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array}}\right\} \substack{\textit{Nombre de lignes} \\ = \textit{dimension de } F}$$

C'est une matrice dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $p = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$.

Exemples.

• Matrice dans les base canoniques de $f : (x, y, z) \mapsto (3x + 2z, x + y - z)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• Matrice de la dérivation, endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Matrice de la dérivation, endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, dans la base $(1, X + 1, X^2 + X + 1, X^3 + X^2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Un projecteur p et sa symétrie $s = 2p - \mathrm{id}_E$ en dimension finie ont pour matrice représentative dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots e_n)$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ une matrice diagonale de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_d & O_{d,n-d} \\ \hline O_{n-d,d} & O_{n-d} \end{array}\right) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_d & O_{d,n-d} \\ \hline O_{n-d,d} & -I_{n-d} \end{array}\right)$$

– Plus généralement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie, et soit F un sev de E stable par f, *i.e.* $f(F) \subset F$. Alors en considérant un supplémentaire F' de F dans E (théorème 41) et une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus F'$ (proposition 24), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où A est la matrice de la restriction de f à F dans la base $\mathcal{B}$ restreinte à F.

Remarque. Pour la représentation matricielle d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on choisit souvent une seule base $\mathcal{B}$ pour E vu comme espace de départ et d'arrivée (mais pas toujours ; voir les matrices de passage). Dans ce cas on pourra noter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ plutôt que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Proposition

Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont isomorphes. D'où :

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration. On vérifie aisément que données $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, l'application qui à une application linéaire associe sa matrice représentative dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est linéaire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda.f + g) = \lambda.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

et bijective de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. ∎

Corollaire

$$\dim \mathscr{L}(E) = \dim(E)^2$$

L'intérêt de la représentation matricielle des applications linéaires réside dans le fait que tous les calculs se traduisent en calcul matriciel.

Théorème
(Calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire)

Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et soient $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) \text{ et } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Alors :

$$Y = AX.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_p)$ des bases de E et F ; soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Par définition : $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$ et $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \cdot f_i$. Alors :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \cdot f_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{i,j} \cdot f_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j} \cdot f_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) \cdot f_i$$

donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$i.e. \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

■

Proposition

(Matrice d'une composée)

Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, des bases de, respectivement, E, F et G.
Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Démonstration. D'après le théorème 58, pour tout $x \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathscr{D}}(g \circ f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Cette égalité est vraie pour tout vecteur $x \in E$, donc en particulier pour tout vecteur e_j de la base $\mathcal{B}$. Ainsi les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathscr{D}}(g \circ f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ ont mêmes colonnes ; elles sont donc égales. ∎

Remarques.

– Attention au sens de lecture des bases qui est un peu contre-intuitif :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathscr{D}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathscr{D}}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

– Pour $f : E \longrightarrow F$ l'existence de $g : F \longrightarrow E$ tel que :

$g \circ f = \mathrm{id}_E$ équivaut à l'injectivité de f ; $f \circ g = \mathrm{id}_F$ équivaut à la surjectivité de f donc l'injectivité (resp. la surjectivité) de f équivaut à l'inversibilité à gauche (resp. à droite) de $\mathrm{Mat}(f)$. Avec le corollaire 49 on obtient le résultat que l'on avait admis : pour une matrice carrée l'inversibilité à droite équivaut à l'inversibilité à gauche.

Proposition

(Matrice d'un isomorphisme)

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases de, respectivement E et F, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$; f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1}$.

Démonstration. Découle de la proposition précédente et de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$. ∎

Exercice. L'application $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + z, x + y - z)$ est-elle un isomorphisme ? Si oui donner l'expression de $f^{-1}(x, y, z)$.

Résolution.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot (x + z, -2x + 2y, -x + 2y - z)$$

La matrice d'une application linéaire dépend du choix des bases ; les formules de changement de base permettent de passer de la représentation matricielle d'une application linéaire dans des bases, à celle dans d'autres bases.

Proposition-Définition

(Matrice de passage d'une base à une autre.)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$; on la note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. C'est une matrice inversible et $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

Démonstration. C'est la matrice représentative de id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ de E. Daprès la proposition 60, elle est inversible et son inverse est la matrice représentative de id_E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, c'est à dire $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$. ∎

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B}$ sa base canonique, et $\mathcal{B}' = \left(1, X-1, (X-1)^2\right)$.
Ecrivons $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; i.e. \begin{cases} 1 = 1 \\ X = (X-1)+1 \\ X^2 = (X-1)^2 + 2(X-1) + 1 \end{cases}$$

Proposition

(Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ Alors :

$$X = PX'$$

Démonstration. D'après le théorème 58 :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}_{=X} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)}_{=X'}$$

Remarque. Attention ! Le sens est contre-intuitif : on obtient les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, alors que la matrice exprime la nouvelle base en fonction de l'ancienne. Cela découle du sens contre-intuitif de lecture des bases déjà évoqué pour le theorème 58 et la proposition 59.

Corollaire

On a donc :

$$X' = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} X = P^{-1} X.$$

Proposition

(Sur la matrice d'une application linéaire)

Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f), \quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}, \quad Q = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$$

Alors :

$$A' = Q^{-1} A P$$

Démonstration. D'après la proposition 59 et par associativité de la composition et du produit matriciel :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)}_{=A'} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)}_{=P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}=Q^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)}_{=A} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=P}$$

■

Corollaire

(Sur la matrice d'un endomorphisme)

Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base : canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer sa matrice dans la base

$$\mathcal{B}' = ((1,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0)).$$

Résolution.

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_3 \\ L_1\leftarrow L_1-L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP \quad :$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Noyau, image et rang d'une matrice

Définition

(Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, est appelée l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition-Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- *Le noyau de A est l'ensemble* $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = O_{n,1}\}$ *; c'est un sev de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.*
- *L'image de A est l'ensemble $\{Y = AX \mid X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$; c'est un sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Le fait que ce soient des sev découle facilement de la distributivité du produit matriciel sur $+$ et de la compatibilité entre $\times$ et $\cdot$. ∎

Remarque. On assimile souvent les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) avec les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{K}^p$) via l'isomorphisme naturel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^n$ qui envoie la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur celle de $\mathbb{K}^n$. L'image et le noyau de A se confondent alors avec ceux de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition

Soient $C_1, C_2, \dots C_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_p\right) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(C_1, \dots, C_p\right)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $C_i = A \times E_{i,\mathbf{1}}$ où $(E_{\mathbf{1},\mathbf{1}}, \dots, E_{n,\mathbf{1}})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,\mathbf{1}}(\mathbb{K})$. ∎

Rang d'une matrice

Définition

Le rang d'une matrice A est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition

Soient $C_1, C_2, \ldots C_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_p\right) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\left(C_1, \ldots, C_p\right)$.

Démonstration. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A ; via l'isomorphisme naturel de $\mathscr{M}_{n,\mathbf{1}}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^n$, $(C_\mathbf{1}, C_\mathbf{2}, \ldots, C_p)$ s'identifie avec une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. ∎

Théorème

(Théorème du rang (version matricielle))

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; alors

$$\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}\, A) = p$$

Démonstration. Découle du théorème du rang appliquée à l'application linéaire associée $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$. ∎

Proposition

(Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *A est inversible,*
- $\mathrm{Ker}\, A = \{O_{n,1}\}$,
- $\mathrm{Im}\, A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
- $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration. A est inversible ssi l'application linéaire canoniquement associée est un isomorphisme (proposition 60) ssi son rang est n (proposition 53), ssi par définition $\mathrm{rg}(A) = n$. L'équivalence avec les deux assertions restantes découle du théorème du rang matriciel et des propositions 65 et 66. ∎

Proposition

(Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- *Soit* $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *; alors* $\mathrm{rg}(B \times A) = \mathrm{rg}(A)$
- *Soit* $C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *; alors* $\mathrm{rg}(A \times C) = \mathrm{rg}(A)$

Notamment appliquer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice A ($L_i \leftarrow L_i + L_j$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ avec $\lambda \neq 0$) ne change pas son rang puisque cela revient à multiplier à gauche par une matrice inversible ($T_n(i,j)$, $E_n(i,j)$, $M_n(i,\lambda)$ cf. proposition 25 du cours sur les matrices).

C'est le cas aussi des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice A ($C_i \leftarrow C_i + C_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda.C_i$ avec $\lambda \neq 0$) puisque cela revient à multiplier à droite par leur transposées, qui sont encore inversibles.

Rang d'une matrice échelonnée

Définition

Une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée si le nombre de zéros en début de ligne augmente strictement de la ligne 1 à la ligne p.

Pour une matrice échelonnée, ses pivots sont les premiers coefficients non-nuls sur chaque ligne.

Le nombre de pivots d'une matrice échelonnée est donc égal au nombre de lignes non-nulles.

Théorème

Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.

Méthode Cela donne une méthode du calcul du rang : appliquer des opérations élémentaires sur ses lignes/colonnes pour arriver à une matrice échelonnée. Le rang est alors le nombre de pivots.

Démonstration. Considérons une matrice échelonnée, notons p son nombre de pivots, et appliquons des opérations élémentaires d'échanges de colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$ pour que le nombre de zéros augmente de 1 ligne après ligne sur les lignes non nulles :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3\leftrightarrow C_4 \\ C_4\leftrightarrow C_5 \\ C_5\leftrightarrow C_6}]{} \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccc} & v_1 & v_2 & & v_p & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_p & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_p \\ \\ \end{array} \end{array}$$

D'après la proposition 69 on n'a pas changé le rang de la matrice après ces opérations élémentaires.

Soit q le nombre de lignes de la matrice. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ de $\mathbb{K}^q$. Notons $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^q$ dont les matrices des coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont les p premières colonnes non-nulles de la matrice (de droite). Notons aussi $w_1, \ldots, w_r$ les vecteurs de $\mathbb{K}^q$ fournis par les colonnes restantes.

Par construction tous les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ et $w_1, \ldots, w_r$ sont dans le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{K}^q$; de plus pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$v_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-1}).$$

Cela permet facilement de montrer que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre de p vecteurs dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$; c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Finalement, puisque $w_1, \ldots, w_r$ sont des vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$:

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_r) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$$

qui est de dimension p. Donc le rang de la matrice est égal à p. ∎

Rang de la transposée

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;

$$\mathrm{rg}\left(A^T\right) = \mathrm{rg}(A).$$

Démonstration. Notons p le rang de A. En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on transforme la matrice à l'aide d'opérations élémentaires pour obtenir une matrice échelonnée, puis comme dans la preuve du théorème précédent on applique des échanges sur les colonnes pour que le nombre de zéros augmente de 1 lignes après lignes sur les lignes non nulles.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_p & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La même suite d'opérations appliquée en partant de A^T mais sur les colonnes/lignes plutôt que sur les lignes/colonnes permet d'aboutir à la matrice transposée de la précédente.

$$A^T \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & a_p & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant des échanges sur ses lignes et ses colonnes on obtient une matrice dont les p premières lignes sont échelonnées, de même rang que ${}^tA$:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_p & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_p & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que l'on transforme en une matrice échelonnée en appliquant des opérations élémentaires sur ses dernières lignes non échelonnées en utilisant les p premières lignes échelonnées. D'après la proposition 69 la matrice obtenue a même rang que A^T qui d'après le théorème 70 est égal à son nombre de pivots, soit $p = \mathrm{rg}(A)$. ■

Rang d'un système linéaire

Proposition-Définition

Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice associé. Il est inchangé par des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Remarque. Ainsi le rang d'une matrice A est égal :

- au rang de ses matrices colonnes, de ses matrices lignes,
- au rang de toute application linéaire représentée par A,
- au rang de tout système linéaire dont A est la matrice.

Trace d'un endomorphisme

Définition

(Matrices semblables)

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = P^{-1}BP$$

Remarque. Donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, deux matrices semblables sont les matrices d'un même endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes. En effet, puisqu'un isomorphisme envoie une base sur une base, toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de passage.

Le rang et la trace sont des invariants de similitude :

Proposition

Des matrices semblables ont même rang et même trace.

Démonstration. En effet $\mathrm{rg}(P^{-1}AP) = \mathrm{rg}A$ (proposition 69) et $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$ (proposition 22, chapitre sur les matrices). ■

Cela permet de définir la trace d'une endomorphisme en dimension finie.

Proposition-Définition

(Trace d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, ses matrices représentatives dans toutes bases de E ont même trace. On définit alors la trace de u, notée $tr(u)$, comme la trace d'une matrice représentative de u quelconque.

Démonstration. Toutes les matrices représentatives de u sont semblables. ■

Les propriétés de la trace d'un endomorphismes découlent alors de celles de la trace d'une matrice :

Propriété

Soit E un ev de dimension fini, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda, \mu \in K$:

– $tr(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda tr(u) + \mu tr(v)$

– $tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; déterminer tous les endomorphismes $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_E$$

Résolution.

Supposons que $\dim(E) = n$:

$$tr(u \circ v - v \circ u) = tr(u \circ v) - tr(v \circ u) = 0 = tr(\mathrm{id}_E) = n$$

Ainsi soit $\dim(E) = 0$ c'est à dire $E = \left\{O_E\right\}$, $u = v = \mathrm{id}_E$, soit il n'en existe aucun.