

Annexe Fonctions réelles usuelles

<https://www.jean-philippe-preaux.fr/>

Nous passons en revue les fonctions réelles usuelles.

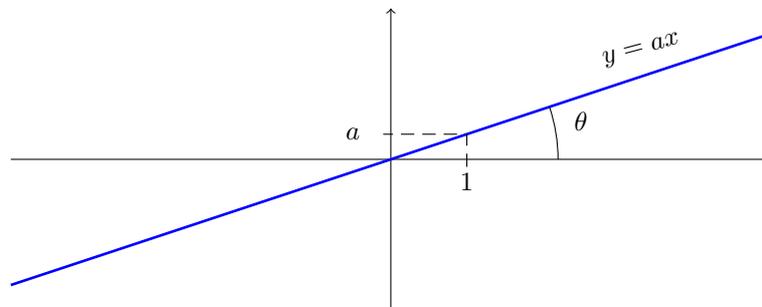
1. FONCTIONS LINÉAIRES

C'est toute fonction de la forme :

$$x \mapsto a \times x \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} , de nombre dérivée a en tout point.

Sa courbe représentative est la droite de pente a passant par l'origine.



De plus $a = \tan \theta$. Ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

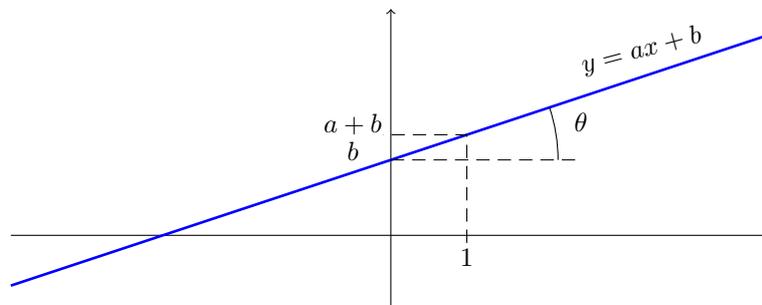
2. FONCTIONS AFFINES

C'est toute fonction de la forme :

$$x \mapsto a \times x + b \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} , de nombre dérivée a en tout point.

Sa courbe représentative est la droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b .



De plus $a = \tan \theta$. Ses limites aux bornes sont :

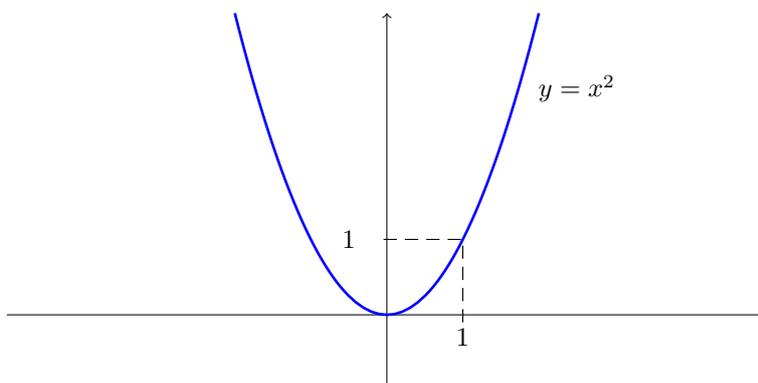
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax + b = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ b & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

3. FONCTION CARRÉE

La fonction carrée :

$$x \mapsto x^2$$

est définie sur \mathbb{R} et paire. Elle est dérivable, de dérivée $x \mapsto 2x$. Sa courbe représentative est une parabole dirigée selon l'axe (O, \vec{j}) .



Ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

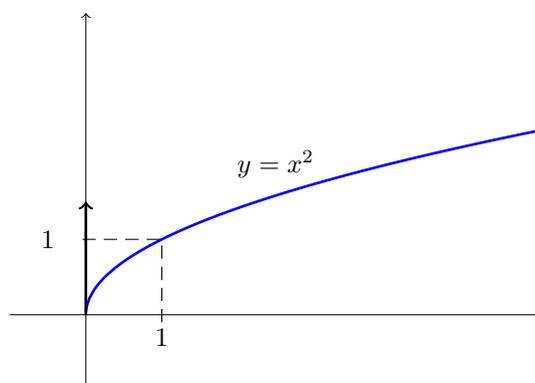
4. FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction carrée réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ dont la bijection réciproque est la fonction racine carrée :

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ (\sqrt{x})^2 = x \end{cases}$$

Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* ; sa courbe représentative est un arc de parabole dirigé selon l'axe (O, \vec{i}) qui admet en l'origine une tangente verticale ; en effet :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{0} +\infty$$



Sa limite en $+\infty$ est :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

5. FONCTIONS PUISSANCES ENTIÈRES

Ce sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto x^n \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Une fonction puissance entière est définie sur :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

elle est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée :

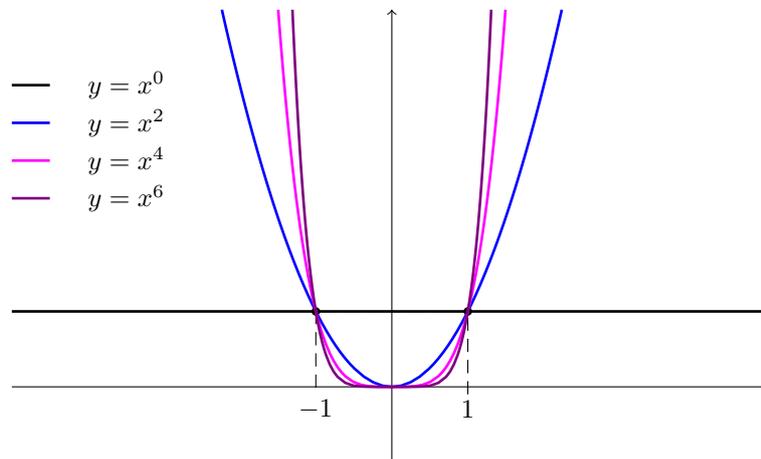
$$\begin{cases} x \mapsto nx^{n-1} & \text{si } n \neq 0 \\ x \mapsto 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

et elle a pour parité :

$$\begin{cases} \text{paire} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{impaire} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

• Courbes représentatives et limites en $\pm\infty$:

– Lorsque $n \geq 0$ et n est pair :

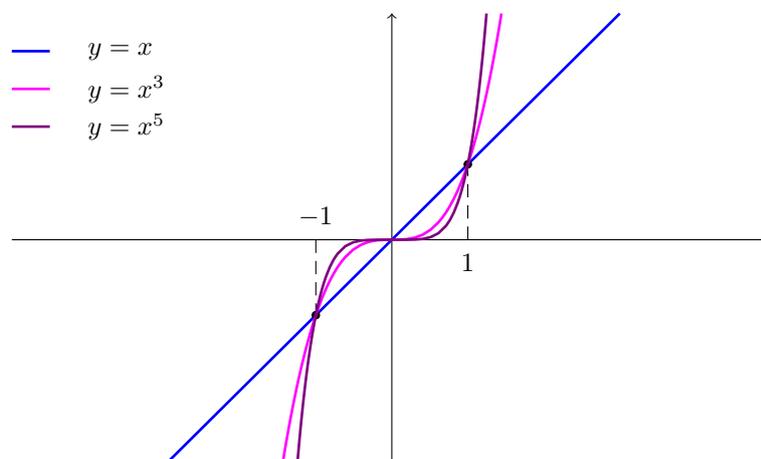


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Lorsque $n > 0$ est pair, elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ , de bijection réciproque :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} : \text{l'unique réel positif dont la puissance } n\text{-ième vaut } x \end{aligned}$$

– Lorsque $n \geq 0$ et n est impair :

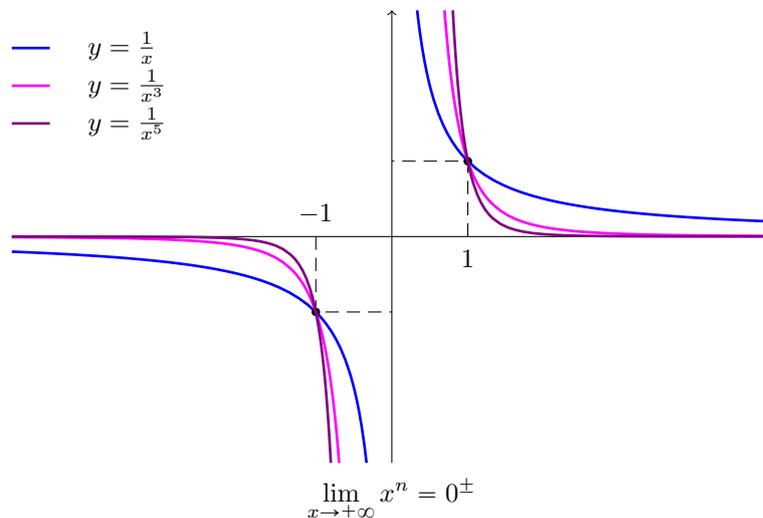


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty$$

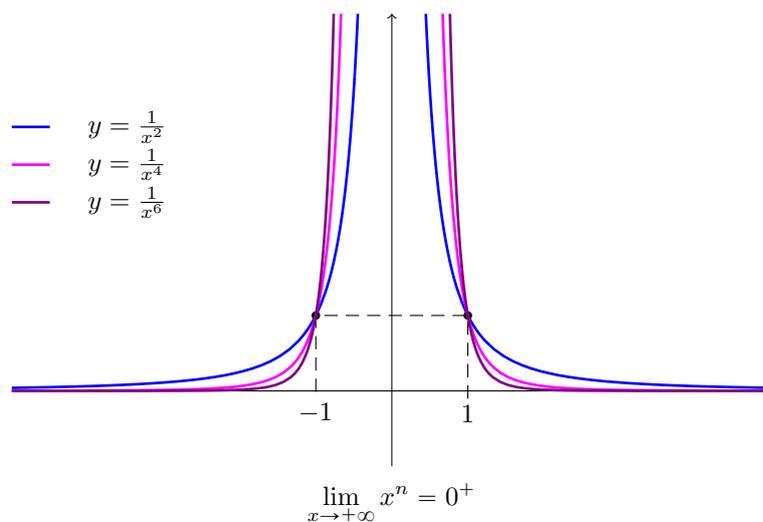
Lorsque n est impair, elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , de bijection réciproque :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} : \text{l'unique réel dont la puissance } n\text{-ième vaut } x \end{aligned}$$

– Lorsque $n < 0$ et n est impair :



– Lorsque $n < 0$ et n est pair :



6. FONCTIONS POLYNÔMES

Ce sont les fonctions de la forme :

$$f : x \longmapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad \text{avec } (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

C'est la somme des monômes a_kx^k de degrés allant de 0 à n . Lorsque $a_n \neq 0$ on dit que le polynôme a pour degré n .

Toute fonction polynôme de degré $n > 0$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est un polynôme de degré $n - 1$.

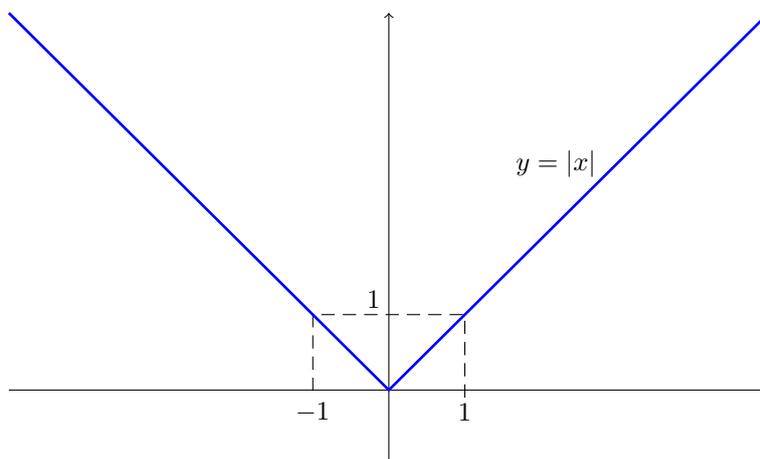
$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1}$$

Ses limites en $\pm\infty$ sont égales à celles de son monôme de plus haut degré.

7. FONCTION VALEUR ABSOLUE

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est définie et continue sur \mathbb{R} , elle est dérivable sur \mathbb{R}^* , et paire.



Ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$$

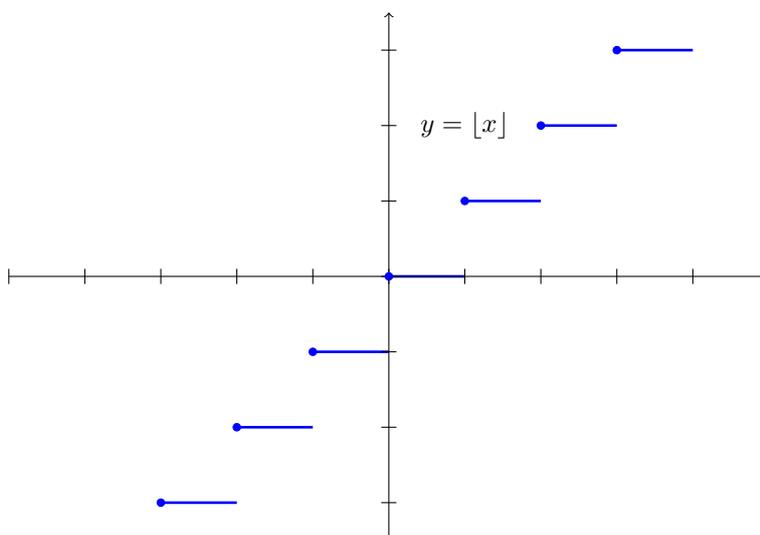
8. FONCTION PARTIE ENTIÈRE

$$x \mapsto [x] \quad \text{c'est le plus grand entier } \leq x$$

La fonction partie entière est définie sur \mathbb{R} et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle est croissante, et admet donc en tout point une limite à gauche ainsi qu'une limite à droite, finies. En ses points de discontinuité :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$$

Sa courbe représentative est en escalier :



et ses limites aux bornes sont :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

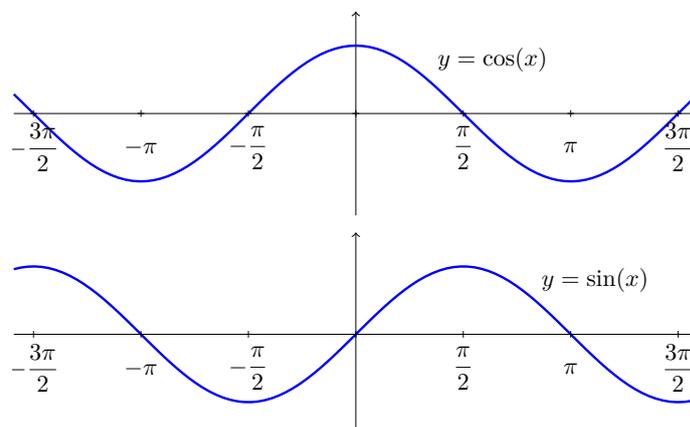
9. FONCTIONS cos ET sin

Les fonctions cos et sin sont définies et dérivables sur \mathbb{R} , et 2π -périodique.

$$\cos' = -\sin \quad ; \quad \sin' = \cos$$

Elles ont pour image directe l'intervalle $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$; cos est paire, sin est impaire.

Leurs courbes représentative sont des sinusoides s'obtenant l'une de l'autre par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2} \cdot \vec{i}$.



Les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $\pm\infty$. On a par contre les limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(la 2ème se déduit de la première en multipliant par $\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$).

$$\begin{aligned} \cos^2(a) + \sin^2(a) &= 1 \\ \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) & \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) & \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \sin(b) \cos(a) \\ \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) & \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\sin(a) \end{aligned}$$

10. FONCTION tan

La fonction tan est définie et dérivable sur :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

sa dérivée est :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

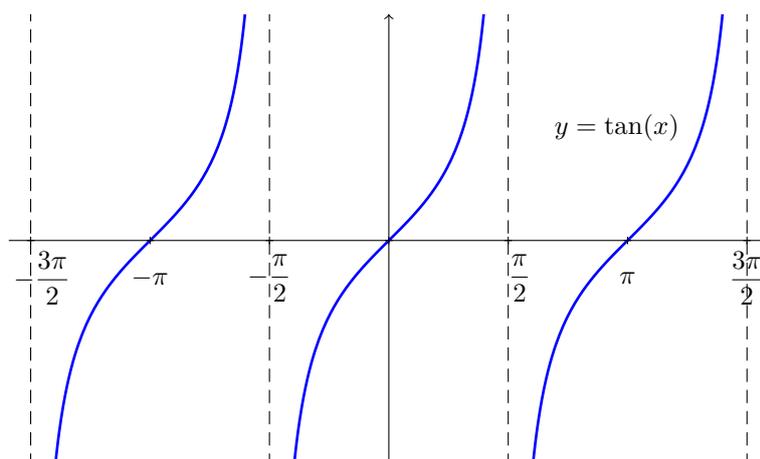
La fonction tan est impaire et π -périodique; l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ a pour image directe $\tan\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \mathbb{R}$.

tan n'a pas de limite en $\pm\infty$ mais :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \quad \tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}$$

Sa courbe représentative admet pour asymptôtes verticales toutes les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lorsque k décrit \mathbb{Z} .



11. FONCTION Arctan

D'après le théorème de la bijection, la fonction \tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbb{R} . Sa bijection réciproque est noté Arctan .

La fonction Arctan est la bijection réciproque de \tan restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

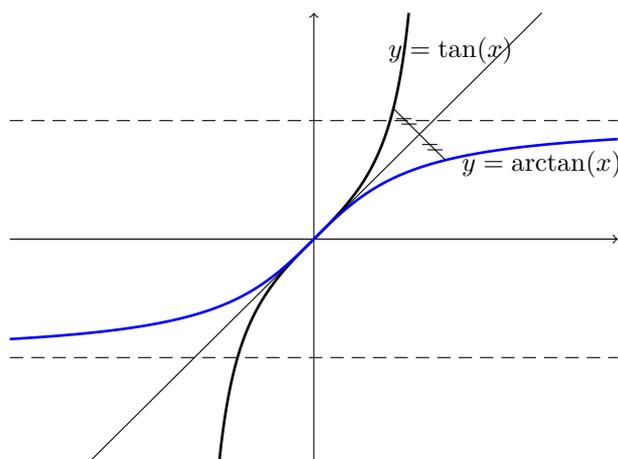
Elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} , d'image directe $\text{Arctan}(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sa dérivée est :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La fonction Arctan est impaire, car la fonction \tan l'est.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) &= x \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) &= x \end{aligned}$$

- La courbe représentative de Arctan s'obtient de celle de \tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par la symétrie d'axe $y = x$:



En particulier elle admet deux asymptôtes horizontales d'équations $x = \pm \frac{\pi}{2}$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

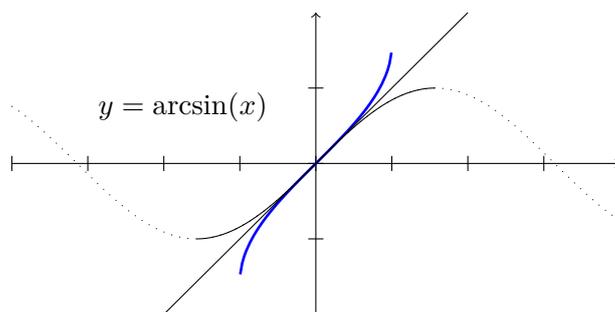
12. FONCTION Arcsin

La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est Arcsin.

La fonction Arcsin est la bijection réciproque de sin restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle est définie sur $[-1, 1]$, impaire, dérivable sur $] -1, 1[$ de dérivée :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

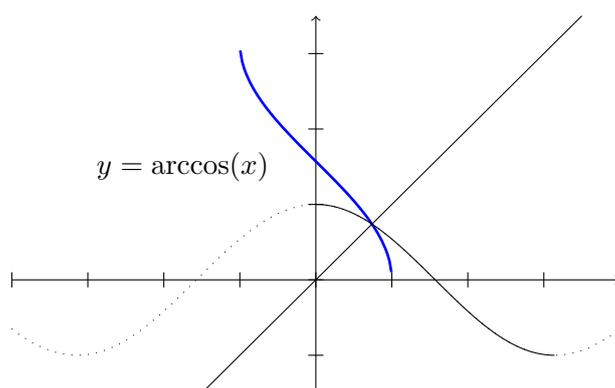
13. FONCTION Arccos

La fonction cos réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est Arccos.

La fonction Arccos est la bijection réciproque de cos restreinte à $[0, \pi]$.

Elle est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ de dérivée :

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

Les fonctions Arccos et Arcsin ayant des dérivées opposées, il se déduit facilement que :

$$\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

14. FONCTION LOGARITHME NÉPERIEN \ln

\ln est l'unique primitive sur \mathbb{R}_+^* de $x \mapsto \frac{1}{x}$ valant 0 en 1 :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

En particulier elle est définie sur \mathbb{R}_+^* et dérivable de dérivée la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, la fonction \ln est strictement croissante. Or $\ln(1) = 0$ et donc :

$$\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0 \quad ; \quad \forall x > 1, \ln(x) > 0.$$

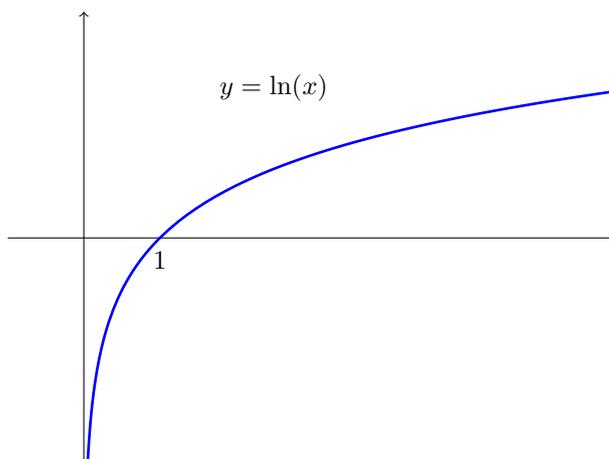
Concernant ses limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

- Courbe représentative de \ln :



La fonction \ln réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

15. FONCTION EXPONENTIELLE

Puisque \ln est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* vers $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$; sa bijection réciproque est notée \exp .

La fonction \exp est la bijection réciproque de \ln . Elle est définie sur \mathbb{R} .

De plus elle est continue, strictement croissante et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\exp(a))^n = \exp(na)$$

Concernant la dérivabilité de \exp :

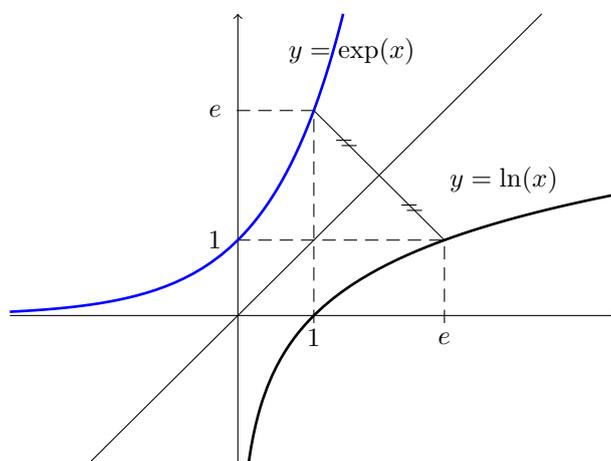
La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp' = \exp$.

On retrouve la caractérisation donnée comme définition de \exp au lycée :

La fonction \exp est l'unique fonction satisfaisant l'équation différentielle $y' - y = 0$ et valant 1 en 0.

Après avoir établi qu'une fonction vérifiant ces deux conditions est unique.

La courbe représentative de \exp s'obtient de celle de \ln par la symétrie d'axe $y = x$:



On note : $e = \exp(1)$; alors $\ln(e) = 1$.

Les limites à connaître sont :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0^+ \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

16. FONCTIONS PUISSANCES RÉELLES

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$$

Ceci nous permet de généraliser la notation puissance à des exposants réels :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$; on note :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ peut s'étendre par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ est le nombre positif qui élevé à la puissance n vaut x :

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(x)\right)^n = \exp\left(n \times \frac{1}{n} \ln(x)\right) = \exp(\ln(x)) = x.$$

Ainsi, $\forall x > 0$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Pour tout $x > 0$ et $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Les puissances à exposants réels ont mêmes propriétés que les puissances à exposants entiers :

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^0 = 1 \quad ; \quad x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta} \quad ; \quad (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$$

On généralise aussi les propriétés de exp et ln aux exposants réels :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$$

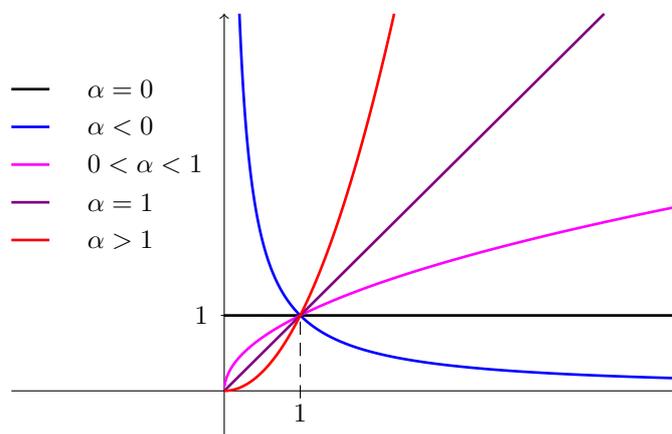
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

Quant à sa dérivabilité :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et dérivable de dérivée :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Sa courbe représentative a pour allure, selon les valeurs de α :



17. FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES EN BASE a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction exponentielle en base a est :

$$x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$$

elle est définie sur \mathbb{R} .

- La fonction logarithme en base a est :

$$\log_a : x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

elle est définie sur \mathbb{R}_+^* .

$$e^x = \exp(x) \quad ; \quad \log_e(x) = \ln(x)$$

Les fonctions exponentielle et logarithme de base a sont des bijections réciproques l'une de l'autre :

Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y)$$

Les fonctions exponentielles et logarithmes en base a vérifient les mêmes propriétés algébriques que \exp et \ln :

$$\log_a(1) = 0$$

Pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \log_a(x^\alpha) = \alpha \times \log_a(x)$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$$

Elles sont dérivables comme composées et :

$$\log_a(x)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$(a^x)' = (\exp(x \ln(a)))' = \ln(a) \times a^x$$

Un cas particulier important en chimie, est le logarithme décimal.

La fonction logarithme décimal est :

$$\log_{10} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

C'est la bijection réciproque de : $x \mapsto 10^x$:

$$y = \log_{10}(x) \iff x = 10^y$$

Elle est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* est sa dérivée est donnée par :

$$\log_{10}(x)' = \frac{1}{x \ln(10)}.$$

18. FONCTIONS ch ET sh

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

appelé cosinus hyperbolique de x , et :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

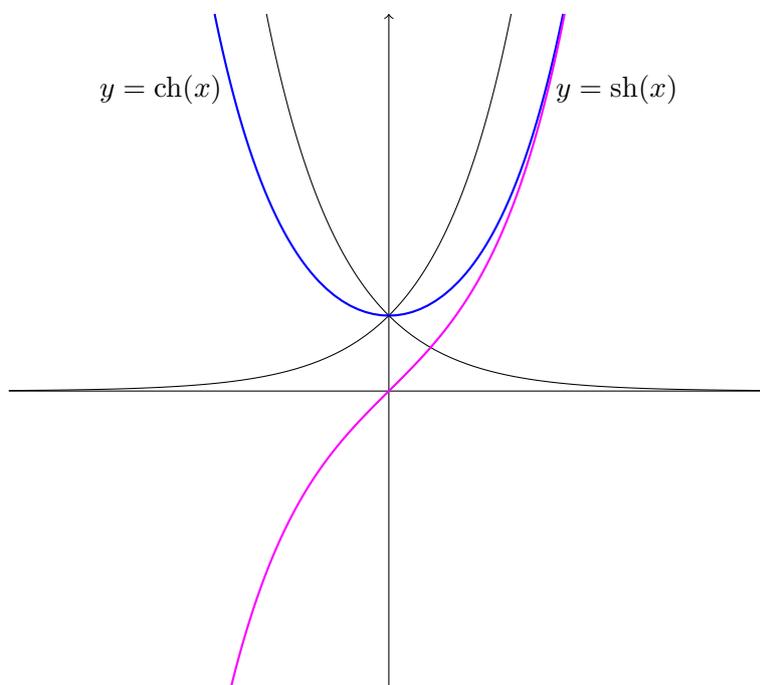
appelé sinus hyperbolique de x .

La fonction ch est paire, sh est impaire. Elles sont dérivables de dérivée :

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \quad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$$

et ont pour limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sh}(x) = \pm\infty$$



On établit facilement par calcul direct le petit formulaire trigonométrique hyperbolique suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) &= 1 & \operatorname{sh}(2a) &= 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a) & \operatorname{ch}(2a) &= \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) \\ \operatorname{ch}(a \pm b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) & \operatorname{sh}(a \pm b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a) \end{aligned}$$