Dénombrement

Ex 1 On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et sans remise, dans un jeu de 32 cartes. Combien de dispositions différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

Sol. 1) : On choisit la place des trèfles parmi les cinq cartes. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

On choisit les trois trèfles parmi 8, en tenant compte de l'ordre.
Il y a $\mathrm{A}_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.
On choisit les deux autres cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas de trèfles, en tenant compte de l'ordre. Il y a $\mathrm{A}_{24}^2 = 24 \times 23 = 552$ possibilités.
Le nombre cherché est donc $10 \times 336 \times 552 = 1854720$.

Ex 2 Reprendre l'exercice précédent dans le cas où l'on tire les 5 cartes une à une et avec remise.

Sol. 2) : On choisit la place des trèfles parmi les cinq cartes. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

On choisit les trois trèfles parmi 8. Chaque carte peut être une des 8 possibles. Il y a $8^3 = 512$ possibilités.
On choisit les deux autres cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas de trèfles. Chaque carte peut être une des 24 possibles. Il y a $24^2 = 576$ possibilités.
Le nombre cherché est cette fois $10 \times 512 \times 576 = 2949120$.

Ex 3 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Dénombrer les applications non surjectives de E dans lui-même.

Sol. 3) : Rappelons qu'une application d'un ensemble fini E dans lui-même est surjective si est seulement si elle est injective si et seulement si elle est bijective.
Le nombre d'applications de E dans lui-même vaut n^n et le nombre d'applications surjectives (c'est-à-dire bijectives) vaut $n!$.
Conclusion : le nombre d'applications non surjectives de E dans lui même vaut $\boxed{n^n - n!.}$

Ex 4 Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectivement n et p tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Donner le nombre de sous-ensembles X de B vérifiant

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{X} \subset \mathrm{B}.$$

Sol. 4) : Notons que $n \leqslant p$. L'ensemble $\mathcal{A}$ des sous-ensembles X de B vérifiant $\mathrm{A} \subset \mathrm{X} \subset \mathrm{B}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A})$ via l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathrm{U} & \longmapsto & \mathrm{X} = \mathrm{A} \cup \mathrm{U} \end{array} \right. .$$

Comme $\mathrm{card}(\mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}) = p - n$, le nombre recherché vaut $|\mathcal{P}(\mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A})| = \boxed{2^{p-n}.}$

Ex 5 **Principe des tiroirs**.

1) On place $n+1$ boules dans n tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir qui contient au moins 2 boules.
2) On place n boules dans k tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir qui contient au moins $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ boules où, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lceil a \rceil$ désigne l'unique entier tel que $\lceil p \rceil - 1 < a \leqslant \lceil a \rceil$ (c'est la partie entière **supérieure**).
3) **Applications :**
   a) Dans une classe de 25 élèves, il y a au moins 3 élèves qui ont le même mois d'anniversaire.
   b) C'est le début de l'année, les 25 élèves découvrent la liste de la classe. Montrer qu'il y a au moins 2 élèves qui connaissent le même nombre de camarades. (on suppose que si l'élève a connaît l'élève b alors, symétriquement, b connaît a mais on ne se connaît pas soi-même, c'est bien connu).

Sol. 5) : 1) Raisonnons par l'absurde : si chaque tiroir contient au plus 1 boule alors les n tiroirs contiennent au total au plus n boules (en faisant la somme), ce qui est absurde puisqu'ils en contiennent $n+1$...

2) Pour bien comprendre la définition de la partie entière supérieure, on vérifie que $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil 2,5 \rceil = 3$, $\lceil -2,7 \rceil = -2$.
Raisonnons encore une fois par l'absurde, si chaque tiroir contient au plus $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$ boules, alors l'ensemble des tiroirs contient au plus $k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right)$ boules mais :
$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 < \frac{n}{k} \leqslant \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ donc $k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right) < n$ ce qui est absurde !

3) Application.

a) Dans une année, il y a 12 mois. Les élèves jouent le rôle des boules et les mois de l'année celui des tiroirs : $n = 25$ et $k = 12$. Comme $\left\lceil \dfrac{25}{12} \right\rceil = \left\lceil 2 + \dfrac{1}{12} \right\rceil = 3$, il y a au moins un mois qui « comportent » 3 élèves !

b) S'il y a au moins 2 élèves qui ne connaissent personne, alors c'est qu'il connaissent le même nombre (0) de camarades et on a répondu à la question.
Supposons qu'il n'y a qu'un ou aucun élève qui ne connaisse personne : nous sommes ramenés au cas de n élèves ($n \in \{24, 25\}$) où chaque élève connaît au moins une personne.
Regroupons les élèves suivant le nombre de connaissances de chacun. Il y a $n-1$ groupes (de 1 à $n-1$ connaissances, l'équivalent des tiroirs) pour n élèves (l'équivalent des boules). Le principe des tiroirs nous dit qu'avec n boules et $n-1$ tiroirs, il existe au moins un tiroir contenant 2 boules. Donc il existe bien un groupe contenant au moins deux élèves c'est-à-dire qu'il existe au moins 2 élèves qui le même nombre de connaissances.

Ex 6 Démontrer que, pour $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Sol. 6) : On peut effectuer une récurrence en utilisant la relation :
pour $0 \leqslant k < n$, $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

Pour tout $n \geqslant 0$, soit $\mathcal{P}_n$: « pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ »

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = 1 = \binom{1}{1} = \binom{0+1}{0+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n+1$ alors

$$\begin{aligned}
\text{si } p \leqslant n,\quad \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \binom{n+2}{p+1} = \binom{n+1+1}{p+1} \\
\text{si } p = n+1,\quad \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2} = \binom{n+1+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1+1}{p+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Nous avons donc montré par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leqslant p \leqslant n$.

Ex 7 Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a + b \geqslant 1$ et $k \in [\![1, a+b]\!]$.
On considère un ensemble E à $a+b$ éléments comportant a éléments du type « **A** » et b éléments du type « **B** ».

1) Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{k-i} = \binom{a+b}{k}$ en interprétant de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments dans E.

2) En déduire une expression sans symbole $\sum$ de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Sol. 7) : **1)** Le nombre de parties à k éléments dans E est $\dbinom{a+b}{k}$. Effectuons une partition de cet ensemble de parties suivant le nombre i d'éléments de type « **A** » dans une partie à k éléments, i variant de 0 à k. Pour un i fixé, le nombre de parties à k éléments contenant i éléments de type « **A** » est $\dbinom{a}{i}\dbinom{b}{k-i}$: on choisit i éléments parmi a, $\dbinom{a}{i}$ (si $i > a$, bien sûr il n'y en a pas, $\dbinom{a}{i}$ reste valable avec la généralisation) et on complète la partie avec $k-i$ éléments de type « **B** », $\dbinom{b}{k-i}$ possibilités pour chacun des $\dbinom{a}{i}$ début de parties choisies, soit au total $\dbinom{a}{i}\dbinom{b}{k-i}$.

En dénombrant le nombre total de partie avec cette partition, on obtient alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{a}{i}\binom{b}{k-i}=\binom{a+b}{k}$.

2) C'est une application de la question 1), en prenant $a=b=n=k$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$.

Ex 8 Soit $n\in\mathbb{N}$.

1) Déterminer le nombre de couples $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ tel que $x+y=n$.

2) Déterminer le nombre de couples $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ tel que $x+y\leqslant n$.

3) Déterminer le nombre de triplets $(x,y,z)\in\mathbb{N}^2$ tel que $x+y+z=n$.

4) Déterminer le nombre de triplets $(x,y,z)\in\mathbb{N}^2$ tel que $x+y+z\leqslant n$.

Sol. 8) : **1)** Les couples en question s'écrivent : $(x,n-x)$ avec $x\in[\![0,n]\!]$, il y en a donc $\boxed{n+1.}$

2) L'ensembles des couples vérifiant $x+y\leqslant n$ est la réunion des ensembles disjoints suivants :

$\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x+y=k\}$ pour k variant de 0 à n, donc le nombre total de couples vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)=1+2+\cdots+(n+1)=\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}.}$

3) Remarquons que $\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^2 \mid x+y+z=n\}=\{(x,y,n-x-y),\ (x,y)\in\mathbb{N}^2, x+y\leqslant n\}$, cet ensemble est donc en bijection « naturelle » avec $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x+y\leqslant n\}$ dont le cardinal a été évalué à la question précédente : il y a également $\boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$ triplets.

4) De la même manière qu'à la question 2), l'ensembles des triplets vérifiant $x+y+z\leqslant n$ est la réunion des ensembles disjoints suivants :
Pour k variant de 0 à n, $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x+y+z=k\}$ donc le nombre total de ces triplets vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+2}{2}=\sum_{k=2}^{n+2}\binom{k}{2}\underset{\text{cf exercice 6}}{=}\binom{n+3}{3}=\boxed{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}.}$$

$$\text{ou bien}\quad \begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[k^2+3k+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+2(n+1)\right]\\&=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Le lecteur est invité à traiter dans l'ordre les trois exercices suivants.

Ex 9 **Nombre d'applications strictement croissantes**.
Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

1) Déterminer le nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

2) Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Sol. 9) : Remarquons tout d'abord qu'une application strictement croissante est une application injective particulière. Si $p>n$, il n'existe pas d'application injective de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et *a fortiori* pas d'application strictement croissante. On supposera dans la suite du corrigé que $p\leqslant n$.

1) Une injection f est entièrement caractérisée par le p-uplet $(f(1),f(2),\cdots,f(p))$ où tous les éléments sont distincts. Le nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ vaut donc le nombre d'arrangements de p éléments parmi n :

$$\boxed{\mathrm{A}_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1).}$$

2) Une application f strictement croissante est entièrement caractérisée par son image $\{f(1), f(2), \cdots, f(p)\}$: $f(1)$ est le plus petit élément de l'image etc... Si A est une partie à p éléments $\mathrm{A} = \{a_1, \cdots, a_p\}$ avec $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leqslant n$ alors A est l'inage de f si et seulement si $f(i) = a_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$: il y a une bijection naturelle entre les applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et les parties à p élément parmi n. Le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ vaut donc : $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}.}$

Nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$

Ex 10 Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Soit f une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
Montrer que l'application g de $[\![1, p]\!]$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $g(k) = f(k) + k - 1$ est une application strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$.

2) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$.

3) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Sol. 10) : **1)** Commençons par montrer que g est à valeurs dans $[\![1, n + p - 1]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $g(k) = f(k) + k - 1 \underset{f(k) \in [\![1,n]\!]}{\leqslant} n + k - 1 \leqslant n + p - 1$.
De plus $g(k) \geqslant 1 + k - 1 \geqslant 1$ donc $g(k) \in [\![1, n + p - 1]\!]$.
Montrons que g est strictement croissante.
Soit $1 \leqslant k < k' \leqslant p$ (pour $p \geqslant 2$)
$g(k) = f(k) + k - 1 \leqslant f(k') + k - 1 < f(k') + k' - 1 = g(k')$.
Donc g est une applications strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$.

2) Soit φ l'application qui à f associe g. D'après la question précédente, c'est une application de l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$. Il nous reste à montrer que toute application g strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$ admet un et un seul antécédent par φ.
Si f est un *antécédent*, nécessairement pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $g(k) = f(k) + k - 1$ d'où $f(k) = g(k) - k + 1$ donc si elle existe, f est *unique*. Posons donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f(k) = g(k) - k + 1$ et vérifions qu'elle est bien une application de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et qu'elle est croissante.
$f(1) = g(1) \geqslant 1$ et $f(p) = g(p) - p + 1 \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$ donc f est une application de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Montrons qu'elle est croissante.
Montrons d'abord la propriété suivante sur g :
si k et k' sont tels que $1 \leqslant k < k' \leqslant p$, pour $p \geqslant 2$, alors $1 \leqslant k' - k \leqslant g(k') - g(k)$.
On a $1 \leqslant g(1) < g(2) < \cdots < g(p) \leqslant n + p - 1$ donc il y a au moins autant d'entiers entre $g(k)$ et $g(k')$ qu'entre k et k' donc $1 \leqslant k' - k \leqslant g(k') - g(k)$.
f est croissante car $f(k') - f(k) = g(k') - g(k) + k' - k \geqslant 0$.
En conclusion, f est bien une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Donc cet antécédent f, unique, existe bien. L'application φ qui à f associe g est donc une bijection.

3) Les deux ensembles ont même cardinal et nous savons que le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$ vaut $\binom{n+p-1}{p}$ d'après l'exercice 9. Donc le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ vaut $\boxed{\binom{n+p-1}{p}.}$

Ex 11 Les nombres p et n étant deux entiers naturels non nuls, quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p \ ?$$

Sol. 11) : Si l'on pose $y_i = x_i + 1$, l'équation équivaut à

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = n + p\ ,$$

avec $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $(\mathbb{N}^*)^n$.
Le nombre cherché est aussi le nombre de solutions de l'équation

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = n + p\ ,$$

avec $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $(\mathbb{N}^*)^n$.
En écrivant $n+p$ comme la somme de $n+p$ nombres 1,

$$n+p = 1+1+1+\cdots+1 \ ,$$

trouver une solution de l'équation revient à choisir $n-1$ signes + parmi les $n+p-1$ signe + figurant dans la relation ci-dessus.

$$n+p = \underbrace{1+\cdots+1}_{y_1} \oplus \underbrace{1+\cdots+1}_{y_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{1+\cdots+1}_{y_n} \ ,$$

Le nombre cherché est donc

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p} .$$

Remarque : les deux exercices précédents étudient le nombre de combinaisons de p éléments parmi n *avec répétitions*, c'est le nombre de rangements possibles de p boules dans n cases (ou tiroirs). Pour l'exercice 10, on peut remarquer que définir une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminé par un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ où x_i est le nombre d'antécédents de i.

Ex 12 **Nombre de répartitions en groupes de colles dans une classe**.

1) De combien de façon peut-on répartir 6 élèves d'une classe de 6 élèves en groupes de 3 élèves (groupes de colles) ?

2) Même question pour une classe de 9 élèves puis pour une classe de 36 élèves.

3) Généraliser le résultat : déterminer le nombre de groupements de p éléments dans un ensemble à np éléments avec $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Sol. 12) : **1)** Il y a 2 groupes à constituer. Commençons par numéroter ces groupes en un groupe n°1 et un groupe n°2. Pour constituer le groupe n°1, on choisit 3 élèves parmi 6, le groupe 2 sera alors constitué des autres élèves. On a ainsi $\binom{6}{3} = 20$ façons de répartir les élèves en un groupe n°1 et un groupe n°2. Pour chaque répartition en deux groupes, il y a exactement deux numérotations de groupes possibles. Le nombre total de répartitions est donc la moitié du nombre de répartition en groupes numérotés : $\dfrac{1}{2}\binom{6}{3} = \boxed{10}$ possibilités.

2) Raisonnons de la même manière. Comptons d'abord le nombre de répartitions en groupes numérotés (n°1, 2 et 3). On choisit 3 élèves parmi 9 pour le groupe n°1 puis 3 parmi 6 pour le groupe n°2 et le groupe n°3 est constitué des 3 élèves restants. Au total, cela nous fait $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3}$ possibilités. Le nombre de façons de numéroter 3 groupes est 3!, donc le nombre de répartition de groupes de colles pour une classe de 9 élèves vaut : $\dfrac{1}{3!}\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 280$.

Généralisons et notons G_3^{3n} le nombre de répartitions de groupes de 3 élèves possibles dans une classe à $3n$ élèves. On dispose de n groupes que l'on commence par numéroter. Le nombres de répartitions en groupes numérotés est : $\binom{3n}{3} \times \binom{3n-3}{3} \times \cdots \times \binom{6}{3}$. Le nombre de façons de numéroter les n groupes est $n!$. Donc, au total,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_3^{3n} &= \frac{1}{n!}\binom{3n}{3} \times \binom{3n-3}{3} \times \cdots \times \binom{6}{3} \\
&= \frac{1}{n!} \frac{3n \times (3n-1) \times \cdots \times 6 \times 5 \times 4}{(3!)^{n-1}} \times \frac{3!}{3!} = \boxed{\frac{(3n)!}{n! 6^n}}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 12$, on trouve $\mathrm{G}_3^{36} = 3567657710220123520000000$, ce qui laisse une certaine marge de manuvre.

3) Notons G_p^{np} le nombre de groupements de p éléments dans un ensemble à np éléments.
On fait le même raisonnement avec n « groupes » de p « élèves », on obtient :

$$\mathrm{G}_p^{np} = \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{n}\binom{kp}{p} = \frac{1}{n!}\binom{np}{p} \times \binom{(n-1)p}{p} \times \cdots \times \binom{2p}{p} \times \underbrace{\binom{p}{p}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{np \times (np-1) \times \cdots \times 1}{(p!)^n} = \boxed{\frac{(np)!}{n!(p!)^n}}.$$

Centrale MP 2005, nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$

Ex 13 **Nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Sol. 13) : Soit f une telle surjection. Il existe une unique paire d'entiers (distincts) $\{p, q\}$ dans $[\![1, n+1]\!]$ tel que $f(p) = f(q)$. Pour dénombrer le nombre de surjections, on peut déjà classer les surjections suivant l'emplacement de ces deux entiers dans $[\![1, n+1]\!]$: il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ choix possibles. Une fois fixé ce choix, le nombre de surjections tel que $f(p) = f(q)$ est le même que le nombre de bijections (= permutations) de $[\![1, n]\!]$: tout se passe comme si l'ensemble de départ avait n éléments (p et q ont fusionné en un seul élément), on trouve donc $n!$ surjections pour chacun des choix des paires $\{p, q\}$.

Conclusion : Il y a $\boxed{\binom{n}{2} n!}$ surjections.

Ex 14 **1)** De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble E de $n \geqslant 2$ éléments, un couple de sous-ensembles disjoints ?

2) De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble E de $n \geqslant 2$ éléments, une paire de sous-ensembles disjoints non vides ?

Sol. 14) : **1)** Notons $\mathcal{A} = \{(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2 \mid \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing\}$. Reprenons l'idée menant à la définition d'une fonction caractéristique pour les couples de sous-ensembles. Soit φ l'application suivante

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathrm{E}, \{1,2,3\}) \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) & \longmapsto & \chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathrm{A} \\ 2 \text{ si } x \in \mathrm{B} \\ 3 \text{ si } x \in \mathrm{E} \setminus (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

φ réalise une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \{1,2,3\})$. L'application réciproque étant :

$$\varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathrm{E}, \{1,2,3\}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \chi & \longmapsto & (\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \left(\chi^{-1}(\{1\}), \chi^{-1}(\{2\})\right) \end{array} \right.$$

Donc $\operatorname{card} \mathcal{A} = \operatorname{card}\left(\mathcal{F}(\mathrm{E}, \{1,2,3\})\right) = \boxed{3^n.}$

2) Commençons par compter le nombre de couples de sous-ensembles disjoints non vides. Il faut retirer aux 3^n couples précédents les couples :
$(\varnothing, \varnothing)$, $(\varnothing, \mathrm{B})$ avec $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ et $(\mathrm{A}, \varnothing)$ avec $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$. Au total le nombre de couples à retirer vaut $1 + 2 \times (2^n - 1)$. Le nombre de couples de sous-ensembles disjoints non vides vaut donc $3^n - (1 + 2 \times (2^n - 1))$. Pour compter le nombre de paires, on doit diviser le nombre précédent par deux car, pour dénombrer les paires, on regroupe les couples (A, B) et (B, A) qui sont toujours disjoints (on remarque que l'on a toujours $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$). On trouve

$$\frac{1}{2}\left(3^n - (1 + 2 \times (2^n - 1))\right) = \boxed{\frac{1}{2}(3^n + 1) - 2^n\ .}$$

L'exercice suivant nécessite la connaissance de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour une démonstration, voir le chapitre « ensembles de réels » dans le tome d'Analyse.

Ex 15 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$, et $\mathcal{P}$ une partition de E. On note k le nombre d'éléments de la partition $\mathcal{P}$ et p le cardinal de l'ensemble $\mathrm{G} = \{(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mid \exists \mathrm{A} \in \mathcal{P}, (x, y) \in \mathrm{A}^2\}$. Montrer que $n^2 \leqslant kp$.

Sol. 15) : On pose $\mathcal{P} = \{\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_k\}$, et p_i le cardinal de A_i. Comme $\{\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_k\}$ est une partition de E, on a

$$p_1 + \cdots + p_k = n\ .$$

Par ailleurs dire que (x, y) appartient à G signifie qu'il existe i tel que (x, y) appartienne à A_i^2. Donc G est la réunion des A_i^2 et cette réunion est disjointe. Alors

$$p = p_1^2 + \cdots + p_k^2\ ,$$

et l'inégalité demandée s'écrit

$$k(p_1^2 + \cdots + p_k^2) \geqslant (p_1 + \cdots + p_k)^2\ .$$

Cette inégalité est alors une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ avec pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = p_k$ et $y_k = 1$.

Ex 16 On note $|X|$ le nombre d'éléments d'un ensemble X supposé fini. Soit E un ensemble fini. On pose $n = |E|$.
1) Calculer $S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X|$.
2) Calculer $S_1 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y|$ et $S_2 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cup Y|$.

Sol. 16) : 1) Lorsque une partie X décrit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, le complémentaire X^C décrit également tout l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ donc :

$$\begin{aligned} S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| &= \frac{1}{2}\left(\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| + \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X^C|\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \big(|X| + |X^C|\big) = \frac{1}{2}\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |E| \\ &= \frac{n}{2}|\mathcal{P}(E)| = \frac{n}{2} \times 2^n = \boxed{n2^{n-1}.} \end{aligned}$$

2) Avec la même idée, on écrit avec $S_1 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y|$,

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{4}\Bigg(&\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y| + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X^C \cap Y| \\ &+ \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y^C| + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X^C \cap Y^C|\Bigg). \end{aligned}$$

Donc $S_1 = \frac{1}{4}\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |E| = \frac{n}{4}\left|\mathcal{P}(E)^2\right| = \frac{n}{4}(2^n)^2 = \boxed{n4^{n-1}.}$

• En utilisant la relation $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, on obtient :

$$S_2 = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X| + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |Y| - S_1 .$$

Mais $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X| = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |Y| = 2^n S = n2^{2n-1}$,

donc $S_2 = n2^{2n} - n4^{n-1} = n(4^n - 4^{n-1}) = \boxed{3n4^{n-1} .}$

Ex 17 ☕
(Avec Python)
Soient p et e des entiers.
Problème : *p personnes entrent dans un ascenseur et appuient chacun (indépendamment et avec une probabilité uniforme) sur le bouton d'un étage, compris entre 1 et e. Combien d'arrêts sont à prévoir ?*
... Entre 1 et $\min(p, e)$, certainement... mais encore ?
Formalisons un peu ce problème. On définit l'univers Ω comme l'ensemble des applications $f : [\![1\,, p]\!] \longrightarrow [\![1\,, e]\!]$, que l'on munit de la probabilité uniforme [1]. Pour toute réalisation f du hasard [2], on note $X(f)$ le cardinal de l'image de f, c'est-à-dire le nombre d'éléments dans $\{f(1), f(2), \dots, f(p)\}$.

1) Écrire en Python une fonction prenant en entrée p et e, calculant une application aléatoire $f : [\![1\,, p]\!] \longrightarrow [\![1\,, e]\!]$ et retournant $X(f)$.

2) Pour $k \in [\![1\,, 6]\!]$, effectuer 10^k expériences avec $p = 5$ et $c = 8$; calculer (pour chaque valeur de k), la moyenne des résultats obtenus.

3) Écrire X comme la somme $X = X_1 + \cdots + X_e$ de variables de Bernoulli que l'on définira et dont on précisera le paramètre.

4) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

5) Comparer aux résultats numériques et commenter.

6) Évaluer $\mathbf{V}(X)$.

1. Dite aussi : **probabilité de dénombrement**.
2. Oui, je sais, d'habitude on la note ω, mais finalement, f ça paraît bien adapté ici...

Sol. 17) : **1)**

2)

3) $X_j(f) = 1$ si $j \in \operatorname{Im} f$ et $X(f) = 0$ sinon. $X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)^p\right)$.

4) $\mathbb{E}(X) = e\left(1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)^p\right)$.

5) OK.

6) ...

Ex 18 Centrale 2014

Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n points distincts. On appelle *droite déterminée par* E toute droite passant par deux points de E.

1) Calculer, en fonction de n, le nombre de droites maximum déterminées par E. Quelle est la condition sur E pour être dans ce cas ?

2) Mêmes questions pour le cas minimal.

3) Donner un exemple d'ensemble E n'étant pas inclus dans une droite tel que, pour n points, il y ait exactement n droites.

4) On suppose $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ non inclus dans une droite, et on note $D_1, D_2, \ldots, D_p$ les droites déterminées par E. On définit la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1\,,\,n]\!] \\ j \in [\![1\,,\,p]\!]}}$ par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in D_j \\ 0 & \text{si } x_i \notin D_j. \end{cases}$$

Montrer que $A^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

5) Montrer que $n \leqslant p$.

Sol. 18) : ***Cf. exercice ?? page ??***

Cf. exercice ?? page ??

1)

2)

3)

4)

5) A^tA est une matrice $n \times n$. Or, son rang est, au maximum, celui de A, lui-même au maximum égal à $\max(n, p)$. Ainsi, si $p < n$, on a $\operatorname{rg}(A^tA) \leqslant p < n$ et donc A^tA n'est pas inversible : contradiction.