Séries entières et application aux probabilités

Exercices d'application

Ex 1 Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

$$\text{a) } a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \quad \text{b) } a_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$$

$$\text{c) } a_{2n} = 2^n \text{ et } a_{2n+1} = 0 \quad \text{d) } a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

$$\text{e) } a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{f) } a_n \text{ est la somme des diviseurs premiers de } n.$$

Sol. 1) : a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ donc $\boxed{\mathrm{R}=1}$ b) $a_n \sim \frac{e^n/2}{(e^n/2)^2} \sim \frac{2}{e^n}$ donc $\boxed{\mathrm{R}=e}$ c) $\mathrm{R} = \sup\{|z| \mid \left((2z^2)^n\right) \text{ bornée }\}$ donc $\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

d) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ =bornée $\times \frac{1}{1+\sqrt{n+1}} \to 0$ donc $\boxed{\mathrm{R}=+\infty}$ e) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$ $\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{e}}$

f) $1 \leqslant a_n \leqslant 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{R}=1}$

Ex 2

1) Montrer que si la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence $\mathrm{R}>0$, alors la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{\mathrm{R}}$.

2) Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vaut $\min(\sqrt{\mathrm{R}_1}, \sqrt{\mathrm{R}_2})$, et que, si $|z|<\mathrm{R}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Sol. 2) : 1) La série de terme général $a_n z^n$ converge si $|z|<\mathrm{R}$ et diverge si $|z|>\mathrm{R}$.
Donc la série de terme général $a_n(z^2)^n$ converge si $|z|^2 < \mathrm{R}$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt{\mathrm{R}}$ et diverge si $|z|^2 > \mathrm{R}$, c'est-à-dire si $|z| > \sqrt{\mathrm{R}}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est donc $\sqrt{\mathrm{R}}$.

2) D'après 1), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{\mathrm{R}_1}$, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{\mathrm{R}_2}$, donc la série $z\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n}$ est aussi de rayon de convergence $\sqrt{\mathrm{R}_2}$.

Alors, lorsque $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ qui est la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ et $z\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\min(\sqrt{\mathrm{R}_1}, \sqrt{\mathrm{R}_2})$.
Lorsque $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$, on sait déjà que $\mathrm{R} \geqslant \sqrt{\mathrm{R}_1}$.
Soit alors $|z| > \sqrt{\mathrm{R}_1}$. La suite $(a_{2n} z^{2n})$ ne converge pas vers 0.
Alors la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas non plus vers 0, et il en résulte que $\mathrm{R} \leqslant \sqrt{\mathrm{R}_1}$.
On a donc encore égalité dans ce cas, et pour tout $|z|<\mathrm{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$.

Ex 3 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Sol. 3) : $\dfrac{e^{x^2}-1}{x} = \boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!} \qquad \mathrm{R} = +\infty}$

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$.

Sol. 4) : (c'est du cours)

• On peut utiliser le développement en série entière $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour $x \in]-1,1[$.

On peut utiliser le produit de Cauchy pour expliquer que $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$ **admet** un développement en série entière sur $]-1,1[$ mais l'**expression** des coefficients sera compliquée ($a_k = \displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_n=k} 1$).

• **Le plus simple est de dériver** $(n-1)$ **fois** $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x \in]-1,1[$, car

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(x \mapsto \frac{1}{1-x}\right) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

On obtient pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} &= \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-(n-2))x^{k-(n-1)}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)x^k \text{ avec } k \leftarrow k-n+1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^n} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k.\end{aligned}$$

Variante moins élégante :

Sacahnt l'existence par produit de Cauchy, on peut calculer $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$, avec

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{(1-x)^n}\right) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\frac{1}{(1-x)^{n+k}}$$

d'où en 0,

$$\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{(1-x)^n}\right)(0) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

et on retrouve $\boxed{\dfrac{1}{(1-x)^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k \text{ pour } x \in]-1,1[}$

On vérifie/sait (suivant le raisonnement utilisé) que $\mathrm{R} = 1$.

Remarque si on revient au produit de Cauchy, on voit que

$$\begin{aligned}a_n &= \operatorname{card}\{(i_1,\cdots,i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1+\cdots+i_n = k\}\\ &= \text{ nombre de façons de ranger } k \text{ boules dans } n \text{ tiroirs.}\end{aligned}$$

En codant le rangement sous la forme $\circ\circ\circ\circ \mid \circ\circ\circ\circ \mid \cdots$ avec $n-1$ séparateurs $\mid$ et k boules $\circ$, d'où le nombre $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Application (exercice rab)
Montrer que dans le DSE de

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

a_n représente le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et 2 euros et un billet de 5 euros.

Ex 5 Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Sol. 5) : Pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$
donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1)+n]\, x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$.
Pour $x = \frac{1}{2}$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 2 \times \frac{1}{2^2} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 = \boxed{6.}$

Ex 6 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Sol. 6) : On sait que $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \cos x$ sont développable en séries entières sur $\mathbb{R}$ donc par produit de Cauchy, la fonction est développable en série entière **mais** c'est une très mauvaise idée de calculer ses coefficients comme cela, il vaut mieux tout décomposer en exponentielle.
On écrit donc $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) &= \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{-(1+i)x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n\right] \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left[2^{n/2}\left(e^{in\pi/4} + e^{-in\pi/4} + e^{i3n\pi/4} + e^{-i3n\pi/4}\right)\right] \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left[2^{n/2} \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\right] \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} \ \text{(formule } 2coco\text{)} \\
&\underset{n=2p}{=} \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty} 2^p \cdot 4 \cdot (-1)^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{x^{2p}}{(2p)!} \\
&\underset{p=2k}{=} \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty} 2^{2k} \cdot 4 \cdot (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 4^k (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!}.
\end{aligned}$$

Ex 7 **1)** Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Sol. 7) : 1) Nous savons (ou nous retrouvons rapidement) que $\forall x \in [-1,1]$ $\text{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Donc $\frac{\text{Arctan}\, x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$. La rayon de cette série vaut 1.

Sur l'intervalle ouvert de convergence, on peut primitiver terme à terme notre série, la primitive s'annulant en 0 vaut alors :

$\forall x \in]-1,1[$ $\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

2) On sait que $\lim_{a \to 1} \int_0^a \frac{\text{Arctan}\, x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\text{Arctan}\, x}{x} \mathrm{d}x$. Il reste à démontrer que

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

(résultat automatique par le théorème d'Abel radial aujourd'hui hors-programme).

Mais c'est facile car la série de fonction $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ **converge normalement** sur $[0,1]$.

On utilise alors le théorème de continuité (en 1) pour les séries de fonctions.

Remarque

On peut également utiliser le théorème d'intégration terme à terme du programme (pour l'intervalle d'intégration $[0,1[$).

On vérifie en effet que la série $\sum_{n \geqslant 0} \int_0^1 \left| (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right| \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge (hypothèse principale du théorème).

Ex 8 On veut développer en série entière la fonction $x \mapsto f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ où $\alpha \in \,]0, \pi[$.

1) Justifier et établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} + \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right)$.
2) Développer f' en série entière et préciser le rayon de convergence.
3) En déduire le développement de f en série entière.

Sol. 8) : 1) En remarquant que, pour tout x réel, on a $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$
et puisque $\sin\alpha \neq 0$, on en déduit que $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 > 0$.
Alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables.
On obtient $f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ et l'on vérifie, en réduisant au même dénominateur que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} + \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) = f'(x)\,.$$

2) Pour tout x réel, on a donc $f'(x) = \text{Re}\left(\frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) = -\,\text{Re}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x}\right)$.
Si $x \in \,]-1, 1[$, on a $|e^{i\alpha}x| < 1$, et donc on peut utiliser la série géométrique pour obtenir

$$\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} = e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n\,.$$

En prenant la partie réelle de cette expression, on en déduit que
$f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(n+1)\alpha) x^n$, et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(n+1)\alpha) x^n$ est de rayon au moins 1.
Mais en utilisant la relation $\cos 2(n+1)\alpha = 2\cos^2(n+1)\alpha - 1$,
on en déduit que la suite $(\cos(n+1)\alpha)$ ne peut pas converger vers 0.
Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(n+1)\alpha) x^n$ est de rayon 1.

Alors, en prenant la primitive qui vaut 0 en 0, on en déduit que si $x \in \,]-1, 1[$ $f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n$, et la série entière obtenue est encore de rayon 1.

Ex 9 MINES 2016 RMS

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

1) Nature de la série de terme général a_n ? de la série de terme général $(-1)^n a_n$?

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Sol. 9) :

1) $\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2}(-1)^n a_n$ divergent.

2) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\mathrm{R} = 1$.

Exercices d'entraînement

Ex 10 X 2016 RMS

Trouver $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite (u_n) ne converge pas, la série entière $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1 et $f(x)$ possède une limite quand $x \to 1^-$.

Sol. 10) : Il suffit de prendre $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Ex 11 **Calcul d'un développement en série entière.**

Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

a) $f(x) = \dfrac{1}{4+x}$ b) $g(x) = \ln\left(2-x^2\right)$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ d) $g(x) = e^{-x}\sin x$.

Sol. 11) : a) $f(x) = \dfrac{1}{4+x} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\frac{x}{4}} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$ pour $x \in]-4, 4[$, $\boxed{\text{le rayon vaut } 4.}$

b) $f(x) = \ln\left(2-x^2\right) = \ln 2 + \ln(1 - \dfrac{x^2}{2}) = \ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{n2^n}$ pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $\boxed{\text{le rayon vaut } \sqrt{2}.}$

c) $x^2 - 5x + 6 = (3-x)(2-x)$ $f(x) = \ln(3-x) + \ln(2-x) = \ln 6 + \ln(1-\dfrac{x}{3}) + \ln(1-\dfrac{x}{2})$, $\boxed{\text{le rayon vaut } 2.}$

$$\boxed{f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]x^n}$$

d) $g(x) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{ix}) = \mathrm{Im}(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1+i)^n}{n!}x^n)$ $\boxed{\mathrm{R} = +\infty.}$

$g(x) = \mathrm{Im}(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}e^{in3\pi/4}x^n) = \boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\left(\dfrac{3\pi n}{4}\right)x^n}$

Ex 12 **Recherche de somme**

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{x^{3n}}{n+1}$ *b)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{x^n}{(2n)!}$ *c)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{x^{4n}}{4n+1}$ *d)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!\times(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}$.

INDICATION : on pourra utiliser la décomposition $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2}\right]$.

Sol. 12) : a) $\mathrm{R}=1$

si $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$ on dérive $x\mathrm{S}(x)$ qui nous donne $\frac{1}{1-x}$ et $x\mathrm{S}(x)$ vaut 0 en 0 donc $x\mathrm{S}(x)=-\ln(1-x)$ donc $\boxed{f(x)=-\frac{\ln(1-x^3)}{x^3}}$

b) $\mathrm{R}=+\infty$, $\boxed{\text{pour } x\geqslant 0,\ \mathrm{ch}(\sqrt{x}) \text{ et pour } x<0,\ \cos(\sqrt{|x|})}$

c) $\mathrm{R}=1$, $xf(x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}\right]$ et vaut 0 en 0 donc

$\boxed{f(x)=\frac{1}{4x}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+2\mathrm{Arctan}x\right]}$

d) $\mathrm{R}=+\infty$, $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{2}x)^{2n}$ d'où $(\sqrt{2}x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\sqrt{2}x)^{2n+1}=\sin(\sqrt{2}x)$ donc

$$\boxed{f(x)=\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}}$$

Ex 13 Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}>0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$ est infini.

Sol. 13) : Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $0<\alpha<\mathrm{R}$, et $z\in\mathbb{C}$. La suite $(|a_n|\alpha^n)$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors $\frac{|a_n|}{n!}|z|^n\leqslant \mathrm{M}\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$ Et comme la série de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$ est une série convergente (série de l'exponentielle), on en déduit que la série de terme général $a_nz^n/n!$ converge absolument.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$ a donc un rayon de convergence infini.

Ex 14

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f d'une variable réelle définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n+1)(2n+1)}$

2) Calculer la dérivée seconde de $x\mapsto x^2f(x^2)$ pour x appartenant à l'intérieur de $\mathcal{D}_f$.

3) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}_f$.

Sol. 14) : a) $\mathrm{R}=1$

en -1, il y a convergence ($\sim\frac{1}{2n^2}$)

en 1, série alternée mais de toute façon abs conv.

ainsi, $\mathcal{D}_f=[-1,1]$ avec continuité sur $[-1,1]$ par le théorème (admis) d'Abel radial.

b) pour $x\in]-1,1[$, $x^2f(x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}$

Cette dernière série entière a pour dérivée seconde $\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^nx^{2n}=2\frac{1}{1+x^2}$.

c) D'où $\left(x^2f(x^2)\right)'=2\mathrm{Arctan}x+\mathrm{K}$ avec $\mathrm{K}=0$ car dérivée en 0 nulle (pas de terme constant).

Puis : $x^2f(x^2)=2\int_0^x\mathrm{Arctan}t\,dt=x\mathrm{Arctan}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Ainsi $f(x^2)=\frac{\mathrm{Arctan}x}{x}-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

D'où, pour $x\geqslant 0$, $\boxed{f(x)=\frac{\mathrm{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(1+x)}{x}}$

On refait le même raisonnement avec $x^2f(-x^2)$

$x^2f(-x^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}$

Cette dernière série entière a pour dérivée seconde $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2x^{2n} = 2\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

D'où $\left(x^2 f(-x^2)\right)' = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \mathrm{K}$ avec $\mathrm{K} = 0$ car dérivée en 0 nulle (pas de terme constant)

Puis : $x^2 f(-x^2) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \mathrm{d}t = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$

Ainsi $f(-x^2) = \dfrac{(1-x)}{x^2}\ln(1-x) + \dfrac{(1+x)}{x^2}\ln(1+x)$

D'où, pour $x \leqslant 0$, $\boxed{f(x) = \dfrac{(1-\sqrt{|x|})}{|x|}\ln(1-\sqrt{|x|}) + \dfrac{(1+\sqrt{|x|})}{|x|}\ln(1+\sqrt{|x|})}$

Enfin, pour le valeur en -1 et 1, on prolonge par continuité.

Ex 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2) Établir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3) Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

Sol. 15) : 1) La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont développables en série entière de rayon infini.

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi comme primitive d'une fonction développable en série entière de rayon infini.

On admet f l'est également comme produit de deux fonctions développables en série entière de rayon infini.

2) La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - 2xf(x)$, avec de plus $f(0) = 0$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

On obtient

$$f'(x) + 2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}2a_n x^{n+1}.$$

En faisant le changement d'indice de sommation $n \mapsto n-1$ dans la deuxième somme, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}2a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

Comme cette série doit être égale à la série constante 1, l'égalité précédente implique l'égalité des coefficients des deux séries.
On a donc $a_1 = 1$, et, pour tout $n \geqslant 1$, on trouve

$$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0,$$

avec de plus la condition initiale $a_0 = f(0) = 0$.
Il résulte immédiatement par récurrence que les termes de rang pair sont nuls
(ce qui était prévisible puisque la fonction f est impaire).
Pour les termes de rang impair, on a la relation

$$a_{2p+1} = \frac{-2}{2p+1}\,a_{2p-1},$$

d'où l'on déduit, également par récurrence, que

$$a_{2p+1} = \frac{(-2)^p}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-2)^p x^{2p+1}}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}\,x^{2p+1}.$$

Ex 16 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la suite (a_n)

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

3) Quelle est la nature de la série pour $x = -\mathrm{R}$ et $x = \mathrm{R}$ (dans le second cas, on pourra étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$) ?

Sol. 16) :

1) $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour $x > -1$, conséquence : $(a_n) \searrow$ en plus $a_n > 0$ donc $a_n \to \ell \geqslant 0$,
de plus $\ell = \ln(1 + \ell)$ donc $\ell = 0$

2) $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ donc $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ donc $\mathrm{R} = 1$ (d'Alembert)

3) en $-\mathrm{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.

en R, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{a_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$. (technique Raabe-Duhamel)

$\ln(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a_n}{2}$ signe constant donc les séries $\sum a_n$ et $\sum \ln(\dfrac{a_{n+1}}{a_n})$ sont de même nature,

or $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ donc les séries divergent.

Ex 17 **1)** Déterminer les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle suivante

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

vérifiant $y'(0) = 0$. Donner une expression pour ces fonctions.

2) En déduire la solution générale de l'équation différentielle que l'on exprimera à l'aide de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3) En remarquant que pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x^2} \int_x^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t,$$

prouver que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-x^2\right)}{2x}$.

4) Déterminer les solutions de l'équation différentielle qui ont une limite finie en $+\infty$.

Sol. 17) :

1) On a arrive pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n + 1)(n + 2)a_{n+2} = 2(n + 1)a_n$, donc à

$$a_{n+2} = \frac{2}{n + 2} a_n.$$

On impose de plus que $a_1 = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
Puis

$$a_{2n} = \frac{2^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

On obtient donc $a_0 \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{n!}$. Cette série a un rayon infini et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = a_0 \exp\left(x^2\right)$$

On obtient donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{n!}$.

2) La fonction $y_0 : x \mapsto \exp\left(x^2\right)$ ne s'annule pas, on s'en sert pour trouver toutes les solutions.
On pose $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ et on obtient

$$\lambda''(x) + 2x\lambda'(x) = 0.$$

Donc $\lambda'(x) = \mathrm{K}\exp\left(-x^2\right)$ et $\lambda(x) = \mathrm{K}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t + \mathrm{C}$.

Finalement, $\boxed{y(x) = \mathrm{K}\exp\left(x^2\right) \displaystyle\int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t + \mathrm{C}\exp\left(x^2\right).}$

3) On a

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \underset{\text{IPP en passant à la limite}}{=} \cdots \\ = \frac{\exp\left(-x^2\right)}{2x} - \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t}_{\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\exp(-x^2)}{2x}\right)}.\end{aligned}$$

4) On a $y(x) = \left(\mathrm{K}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t + \mathrm{C}\right) \exp\left(x^2\right)$.

On doit nécessairement avoir $\mathrm{K}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t + \mathrm{C} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\mathrm{C} = -\mathrm{K}\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t.$$

Il vient $y(x) = -\mathrm{K}\exp\left(x^2\right) \displaystyle\int_x^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\mathrm{K}}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
Donc y a bien une limite (nulle) lorsque x tend vers $+\infty$.

Ex 18

1) Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\, x^{2n+1}$$

a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$.
Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\, x^{2n+1}$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle
(E) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$.

3) Déduire de ce qui précède une expression explicite de f.

Sol. 18) : 1) Si $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$, posons $a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$. On a
$\dfrac{|a_{n+1}x^{2n+3}|}{|a_n x^{2n+1}|} = \dfrac{n+1}{2n+3}|x|^2$, et la suite ainsi définie converge vers $|x|^2/2$.
Il résulte de la règle de d'Alembert pour les séries numériques que la série de terme général $a_n x^{2n+1}$ converge absolument si $|x|^2/2 < 1$,
c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, et ne converge pas absolument si $|x|^2/2 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \sqrt{2}$.
La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ est donc de rayon de convergence $\sqrt{2}$.

2) Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, on obtient $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}$

donc, si l'on pose $\mathrm{F}(x) = (x^2-2)f'(x) + xf(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_n x^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}2na_{n-1}x^{2n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}2(na_{n-1}-(2n+1)a_n)x^n - 2\,.
\end{aligned}$$

Et puisque $na_{n-1}-(2n+1)a_n$ est nul pour tout entier n, il en résulte que $(x^2-2)f'(x)+xf(x) = -2$.
Donc f est bien solution de l'équation (E).
3) Si $|x| < \sqrt{2}$, l'équation homogène $(x^2-2)y' + xy = 0$ s'écrit $y' = \dfrac{x}{2-x^2}\,y$, ce qui donne $y = \dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{2-x^2}}$.
En utilisant la méthode de variation de la constante, on obtient $\dfrac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{C}' = -2$, donc $\mathrm{C}' = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}}$, et finalement $\mathrm{C} = 2\mathrm{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \mathrm{A}$, où A est une constante.
Alors, compte-tenu du fait que $f(0)=0$, on obtient $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Ex 19 X 2016 RMS
Si $n\in\mathbb{N}$, on note f_n le cardinal de l'ensemble
$$\big\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3,\ a+2b+3c = n\big\}.$$
Montrer, pour $x\in\,]-1,1[$: $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n$.

Sol. 19) : Immédiat, produit de Cauchy.

Ex 20 ✍
Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R}>0$.

1) Déterminer les rayons de convergence de $\sum (a_n\ln n)x^n$ et $\displaystyle\sum\left(a_n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n$.

2) Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n x^n$ quand $x\to 1^-$.

Sol. 20) : 1) Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n\ln n)x^n$. Lorsque $|x|<\rho<\mathrm{R}$, on a $|(a_n\ln n)x^n| = |a_n|\rho^n\ln n\left(\dfrac{|x|}{\rho}\right)^n$.
La suite $(\ln n(|x|/\rho)^n)$ converge vers 0. Elle est donc bornée. Si M est un majorant on a alors $|(a_n\ln n)x^n|\leqslant \mathrm{M}|a_n|\rho^n$ et la série de terme général $a_n\ln nx^n$ converge. Il en résulte que $\mathrm{R}_1\geqslant\rho$, et donc que $\mathrm{R}_1\geqslant\mathrm{R}$.
Inversement, puisque, pour $n\geqslant 3$, on a $|a_n|\leqslant|a_n|\ln n$, on en déduit que $\mathrm{R}\geqslant\mathrm{R}_1$. Finalement $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}$.
En utilisant l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^n 1/k\sim\ln n$, on en déduit alors que la deuxième série proposée admet encore comme rayon de convergence R.
2) D'après la question 1) appliquée à la suite constante $(a_n)=(1)$, les séries entières $\sum\ln nx^n$ et $\displaystyle\sum\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n$ sont de rayon de convergence 1. La suite (ε_n) définie par $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n$, converge (sa limite est la constante d'Euler). Elle est donc majorée par une constante M. Alors
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n x^n\,.$$

Mais en effectuant le produit de Cauchy, on obtient, pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x}\left(-\ln(1-x)\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n .$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\left(1 + \frac{1-x}{\ln(1-x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right) .\end{aligned}$$

Lorsque $0 < x < 1$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \mathrm{M} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{\mathrm{M}x}{1-x} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{1-x} ,$$

donc

$$\left|\frac{1-x}{\ln(1-x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\ln(1-x)} ,$$

et il en résulte que cette expression tend vers 0 lorsque x tend vers 1. On en déduit que, lorsque x tend vers 1, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \cdot x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x} .$$

Faire les exercices de la fiche équations différentielles

Exercices d'approfondissement

Ex 21 X 2015 RMS

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série qui définit f.
2) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Sol. 21) : 2) Pour $\ln x = -u$, où $u > 0$ est appelé à tendre vers 0, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-un^2}$. L'intégrale $\mathrm{I}(u) = \int_1^{+\infty} e^{-u\tau^2} d\tau = \int_{1/\sqrt{u}}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma^2}}{\sqrt{u}} d\sigma$ est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{u}} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Cette intégrale est un infiniment grand devant le premier terme de la série, donc la technique de comparaison série-intégrale s'applique.

Ex 22 ✍ X 2019 RMS

1) Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$. Est-elle développable en série entière autour de 0 ?
2) Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que g est développable en série entière dans un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\mathrm{M} > 0$, $a > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on ait $|g^{(n)}(x)| \leqslant \mathrm{M} \cdot a^n \cdot n!$.
3) (je ne sais pas faire) On revient à la fonction f de la question **1)**.
Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{|x| \leqslant \eta} |f^{(n)}(x)| \geqslant (n!)^{\frac{3}{2}}$.

Sol. 22) :

1) Non car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et $f > 0$ en dehors de 0.

2) $\Leftarrow$ avec le reste intégral.

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \cdot a_{n+k} \cdot x^k$.

Soit $\alpha \in]0, \mathrm{R}[$. La suite $(a_n \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit K un borne.

Soit $\eta \in]0, \alpha[$.

On a pour tout $x \in]-\eta, \eta[$,

$$\begin{aligned}
\left|g^{(n)}(x)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \cdot |a_{n+k}| \cdot \alpha^{n+k} \cdot \frac{|x|^k}{\alpha^{n+k}} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{K}}{\alpha^n} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} \cdot \left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^k}_{\frac{n!}{(1-|x|/\alpha)^{n+1}}} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{K}}{\alpha^n} \frac{n!}{(1-|x|/\alpha)^{n+1}} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{K}}{\alpha^n} \frac{n!}{(1-\eta/\alpha)^{n+1}} = \frac{\mathrm{K}}{1-\eta/\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha-\eta}\right)^n \cdot n!
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

3) à faire, aucune idée.

Si $f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ alors $\mathrm{P}_{n+1} = -\mathrm{X}^2\mathrm{P}'_n + 2\mathrm{X}^3\mathrm{P}_n$.

Donc $\mathrm{P}_n = 2^n \mathrm{X}^{3n} + \cdots$

Ainsi, $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 2^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} e^{-1/x^2}$.

Maximum de $x \mapsto x^{3n} e^{-x^2}$ en $\sqrt{\frac{3n}{2}}$.

Donc je suppose qu'on peut regarder en $\sqrt{\frac{2}{3n}}$...

Ex 23 ☕ X 2017 RMS

Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0 = 1$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
2) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.
3) Exprimer $f(x)$.

Sol. 23) : 1) Pour tout n, $a_n \leqslant 2^n$, donc $\mathrm{R} \geqslant \frac{1}{2}$.

2) Pour $n \leqslant r-1$, $a_n = 2^n$ (même si $n = 0$).

Pour $n \geqslant r$, un mot s'écrit $0^k 1 m_{n-k-1}$, avec $k \in [\![0, r-1]\!]$ et m_{n-k-1} un mot vérifiant la contrainte de longueur $n-k-1$.

Donc $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} a_{n-k-1} = a_{n-r} + a_{n-r+1} + \cdots + a_{n-1}$.

3) Il sera avantageux de transformer cette relation de récurrence pour obtenir une relation valable pour tous les indices n entiers (en particuliers inférieurs à r), ce qui est possible comme ceci : on pose $a_k = 0$ pour $k < 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } n \geqslant r \\ 1 \text{ pour } n \leqslant r-1. \end{cases}$

Cela va entraîner que $a_n = a_{n-r} + a_{n-r+1} + \cdots + a_{n-1} + \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ de sorte que, pour $0 \leqslant n \leqslant r-1$,

$$a_n = a_0 + \cdots + a_{n-1} + 1 = 2^n.$$

Nous pouvons alors écrire (avec une sommation qui court sur $\mathbb{N}$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_{n-r} + a_{n-r+1} + \cdots + a_{n-1} + \varepsilon_n\big) x^n.$$

Autrement dit, pour tout x tel que $|x| < \mathrm{R}$,

$$f(x) = (x^r + \cdots + x)\, f(x) + \sum_{k=0}^{r-1} x^k,$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1}}{1 - x - \cdots - x^r}.$$

Remarque. Le rayon de convergence est alors le minimum des modules de racines de $1 - x - \cdots - x^r$. On peut voir tout de suite que $\dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{R} \leqslant 1$, et même $\mathrm{R} < 1$ car, par le théorème des valeurs intermédiaires (le dénominateur est négatif en $x = 1$ et positif en $x = 1/2$), il y a une racine sur $]0, 1[$ pour $r \geqslant 2$.
Remarque. Dans le cas général d'une série entière dont le terme général vérifie une relation de récurrence linéaire (à coefficients constants) d'ordre r, on peut expliciter sa somme sous forme de fraction lorsqu'on connaît les r premiers termes et la relation de récurrence. C'est ce que montre la proposition suivante.

Proposition Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+p} = \alpha_{p-1} a_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n$. Alors, pour tout z de module inférieur à la racine de plus petit module du polynôme $\mathrm{D}(z) = 1 - \alpha_{p-1} z - \cdots - \alpha_1 z^{p-1} - \alpha_0 z^p$,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{\mathrm{D}(z)} \big(a_0 &+ (a_1 - \alpha_{p-1} a_0) z \\ &+ (a_2 - \alpha_{p-1} a_1 - \alpha_{p-2} a_0) z^2 \\ &+ (a_3 - \alpha_{p-1} a_2 - \alpha_{p-2} a_1 - \alpha_{p-3} a_0) z^3 \\ &\cdots \\ &+ (a_{p-1} - \alpha_{p-1} a_{p-2} - \cdots - \alpha_1 a_0) z^{p-1}\big). \end{aligned}$$

Démonstration. On multiplie chaque relation $a_{n+p} = \alpha_{p-1} a_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n$ par x^{n+p} et on les additionne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{p-1} a_{n+p-1} x^{n+p} + \cdots + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_1 a_{n+1} x^{n+p} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_0 a_n x^{n+p}.$$

Cela est équivalent à

$$\begin{aligned} f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-1} x^{p-1} = {} \\ \alpha_{p-1} x \big(f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-2} x^{p-2}\big) \\ + \alpha_{p-2} x^2 \big(f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-3} x^{p-3}\big) \\ \cdots \\ + \alpha_1 x^{p-1} \big(f(x) - a_0\big) + \alpha_0 x^p f(x). \end{aligned}$$

En faisant passer à gauche les termes avec $f(x)$ en facteur, et en regroupant les autres à droite triés par degré de x, on trouve la formule proposée. □

Ex 24 ✍ ENS 2017 RMS

Soient $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$ et $\Omega = \{re^{i\theta}\,;\, 0 \leqslant r \leqslant 1, -\pi + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon\}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière qui définit f.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$. Montrer que (S_n) converge uniformément vers f sur Ω.

INDICATION. Majorer $\mathrm{T}_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} z^k$ sur Ω et écrire

$$\mathrm{S}_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{T}_{k-1}(z)-\mathrm{T}_k(z)}{k}.$$

3) On fixe $\theta\in]-\pi,\pi[$. Soit $\ell : x\in[0,1[\mapsto f(x\,e^{i\theta})$. Calculer ℓ'.
4) Montrer que $x\mapsto e^{\ell(x)}$ a une dérivée seconde nulle.
5) En déduire la valeur de $f(e^{i\theta})$ pour $\theta\in]-\pi,\pi[$.

Sol. 24) : 1) Le rayon de convergence est évidemment $\mathrm{R}=1$.

2) On pose $\mathrm{T}_0(z)=0$, et l'on écrit : $\mathrm{T}_n(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}z^k=\frac{z\,(1-(-z)^n)}{1+z}$.

Pour $z\in\Omega$, $|\mathrm{T}_n(z)|\leqslant\dfrac{1}{|1+z|}\leqslant\mathrm{M}=\dfrac{1}{\alpha}$ avec $\alpha=\displaystyle\min_{z\in\Omega}|1+z|>0$ (car Ω est fermé borné).
Une transformation d'Abel (voir l'exercice précédent) donne
$\mathrm{S}_n(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{T}_k(z)-\mathrm{T}_{k-1}(z)}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\mathrm{T}_k(z)+\frac{\mathrm{T}_n(z)}{n}$.
D'une part, $\displaystyle\left\|\frac{\mathrm{T}_n}{n}\right\|_\Omega\leqslant\frac{\mathrm{M}}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.
D'autre part, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\mathrm{T}_k(z)$ converge normalement (et donc uniformément) sur Ω car $\displaystyle\left\|\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\mathrm{T}_k(z)\right\|_\Omega\leqslant$
$\dfrac{\mathrm{M}}{k(k+1)}$, terme général d'une série convergente.

3) La dérivée de ℓ est $\ell'(x)=e^{i\theta}f'(x\,e^{i\theta})=e^{i\theta}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(x\,e^{i\theta}\right)^{k-1}=\frac{e^{i\theta}}{1+xe^{i\theta}}$.

4) Posons $\varphi(x)=e^{\ell(x)}$, de sorte que $\varphi'(x)=\ell'(x)e^{\ell(x)}$. Mais alors

$$\varphi''(x)=\left(\ell'^2(x)+\ell''(x)\right)e^{\ell(x)}=0\qquad\text{car }\ell''(x)=-\frac{\left(e^{i\theta}\right)^2}{\left(1+xe^{i\theta}\right)^2}=-\left(\ell'(x)\right)^2.$$

5) D'après la question précédente, $e^{\ell(x)}=\varphi'(0)\cdot x+\varphi(0)$. Or $\varphi(0)=e^0=1$ et $\varphi'(0)=1$ car $\ell(0)=0$ et $\ell'(0)=e^{i\theta}$.
Donc $e^{\ell(x)}=1+x\cdot e^{i\theta}$ et $\exp\left[f\left(x\,e^{i\theta}\right)\right]=1+x\cdot e^{i\theta}$.
En faisant tendre x vers 1,

$$\exp\left[f\left(e^{i\theta}\right)\right]=1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}=\exp\left(\ln\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]+i\frac{\theta}{2}\right).$$

Il en résulte que $f\left(e^{i\theta}\right)=\ln\left[2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]+i\dfrac{\theta}{2}+2i\pi k_\theta$ avec $k_0=0$, et, la fonction $\theta\mapsto k_\theta$ est continue sur $]-\pi+\varepsilon,\pi+\varepsilon[$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ donc est constante. Sa valeur est 0 car $f\left(e^0\right)=f(1)=\ln 2$.
Enfin on fait tendre ε vers 0, d'où $f\left(e^{i\theta}\right)=\ln\left[2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]+i\dfrac{\theta}{2}$ pour $\theta\in]-\pi,\pi[$.

Probabilités révision

Ex 25 Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ de lois respectives de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la fonction génératrice de X + Y. En déduire la loi de X + Y.

Sol. 25) : On a pour tout $t\in[-1,1]$, $\mathrm{G}_\mathrm{X}(t)=\exp(\lambda(t-1))$ et $\mathrm{G}_\mathrm{Y}(t)=\exp(\mu(t-1))$.
Donc, par indépendance, pour tout $t\in[-1,1]$,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}(t)=\mathrm{G}_\mathrm{X}(t)\cdot\mathrm{G}_\mathrm{Y}(t)=\exp((\lambda+\mu)\,(t-1)).$$

Comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi au voisinage de 0, on reconnait

$$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sim\mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

Ex 26 On considère une variable aléatoire $\mathrm{N}:\Omega\to\mathbb{N}^*$ et une famille de variables aléatoires $\mathrm{X}_n:\Omega\to\mathbb{N}$, on suppose que les variables N et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant1}$ sont indépendantes et que les variables aléatoires X_n ont même loi.

Pour $t\in[-1,1]$, on note $\mathrm{G}_\mathrm{N}(t)=\mathbb{E}\left(t^\mathrm{N}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{N}=n\right)t^n$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t)=\mathbb{E}\left(t^{\mathrm{X}_i}\right)$ les fonctions génératrices associées.

1) On définit la variable aléatoire discrète $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Déterminer la fonction génératrice $G_S(t) = \mathbb{E}\left(t^S\right)$ en fonction de G_N et G_{X_i} sur $]-1, 1[$.
(on s'autorisera sans justifier en filière PC l'interversion des signes somme).

2) **Application** On lance un dé de 6, on note le nombre obtenu sauf si on obtient un 6 auquel cas on relance le dé, on note alors la somme des deux nombres obtenus sauf si on a encore obtenu un 6 auquel cas on relance le dé etc. Une fois cette somme N notée (par exemple on a obtenu les lancers 6, 6 et 4 donc $N = 16$), on lance N fois le dé et on inscrit le score obtenu S. Quelle est l'espérance de S c'est-à-dire le score en moyenne ?

Sol. 26) :

1) On remarque que pour tout $n \geqslant 1$ et $t \in [-1, 1]$

$$G_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = (G_{X_1}(t))^n$$

car les $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendants et de même loi.
Pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le sytème complet d'événements $\{N = n\}_{n\geqslant 1}$,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \wedge N = n\right) \underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } t \in [-1,1], \quad G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k)\, t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\mathbb{P}(N = n) \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\right] t^k \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) t^k\right) \quad \text{par échange des signes sommes} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \left(G_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) (G_{X_1}(t))^n \\
&= G_N(G_{X_1}(t)) = (G_N \circ G_{X_1})(t).
\end{aligned}$$

(HP pour la filière PC : l'échange des sommes est justifiée par la sommabilité de la famille $\left(\mathbb{P}(N = n) \cdot \mathbb{P}(X_i = k)\, t^k\right)_{k\geqslant 0, n\geqslant 1}$, pour $t \in [-1, 1]$, $0 \leqslant |G_{X_1}(t)| \leqslant G_{X_1}(|t|) \leqslant G_{X_1}(1) = 1$ et que G_N est définie sur $[-1, 1]$).

2) On voit facilement que pour $p \in \mathbb{N}$, $k \in [\![1, 5]\!]$, $\mathbb{P}(N = 6p + k) = \dfrac{1}{6^{p+1}}$.

Donc pour $t \in]-1, 1[$, $G_N(t) = \displaystyle\sum_{p\geqslant 0, k\in[\![1,5]\!]} \frac{t^{6p+k}}{6^{p+1}} = \sum_{k=1}^{5} t^k \times \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{6p}}{6^{p+1}} = \frac{t}{6} \frac{1 - t^5}{1 - t} \frac{1}{1 - t/6}$.

Ensuite, $G_{X_i}(t) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{6} t^k = \frac{t\left(1 - t^6\right)}{6(1 - t)}$ d'où on en déduit la fraction rationnelle pour $t \in]-1, 1[$, $G_N(G_{X_1}(t)) = G_S(t)$.

On vérifie avec un logiciel de calcul formel ou bien avec le module sympy de Python (ou encore sage) ou si on est très courageux à la main, par limite que $G'(1) = \dfrac{56}{5} \simeq 11,2$ ce qui permet de dire que la variable aléatoire S admet une espérance finie de valeur $\dfrac{56}{5}$.

Voici un petit programme Python testant statistiquement la moyenne et effectuant le calcul symbolique de $G'(1)$.

```python
import random as r


def de():
    return r.randint(1, 6)

def nbtirage():
    S = de()
    boucle = S == 6
    while boucle:
        d = de()
        S += d
        boucle = d == 6
```

```
    return S

def somme(n):
    S = 0
    for i in range(n-1):
        S += de()
    return S


N = 1000000
L = [somme(nbtirage()) for i in range(N)]

print("Test statistique pour N = {}, moyenne = {}".format(N, sum(L)/len(L)))
```

La sortie est

```
Test statistique pour N = 1000000, moyenne = 11.210539
```

Ex 27 ☕

Marche aléatoire équilibrée, retour à l'origine

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec (X_n) v.a.i.i.d. de Rademacher.

On note pour $n \geqslant 1$, $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $f(n) = \mathbb{P}(S_n = 0, S_1 \neq 0, \cdots, S_{n-1} \neq 0)$ probabilité de premier retour en 0. On conviendra que $S_0 = 0$ et donc que $p_0 = 1$. En revanche on prendra $f(0) = 0$.

1) Montrer que pour $n = 2k$, $p_n = \binom{2k}{k}\frac{1}{4^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$.

2) Calculer $f(1)$, $f(2)$.

3) On pose $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ et $F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) t^n$ (séries entières de rayon $\geqslant 1$).

Vérifier que pour $|t| < 1$, $S(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

4) On note A_k « le premier retour en 0 se fait à l'étape k ».

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = 0 \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)$.

Que vaut $\mathbb{P}(S_n = 0 \mid A_k)$? (c'est le point-clé de l'exercice).

5) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} f(k)$.

En déduire que pour $|t| < 1$, $S(t) = 1 + S(t)F(t)$.

6) En déduire que $F(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$. Calculer $f(n)$.

7) Montrer que presque sûrement, on a un retour à l'origine.

Sol. 27) :

1) Sans difficulté puis Stirling.

2) $f(1) = \mathbb{P}(S_1 = 0) = 0$ et $f(2) = \mathbb{P}(S_2 = 0) = \frac{1}{2}(= \mathbb{P}(X_2 = -X_1))$.

3) On peut voir que le k^e coefficient, a_k, de $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ vaut

$$a_k = \binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}$$

Donc, en ne considérant que les pairs, $S(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

4) $\{S_n = 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ d'où l'égalité (attention, on n'a pas un système complet d'événements).

$\mathbb{P}(S_n = 0 \mid A_k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$ point clé de la démonstration.

5) On écrit l'égalité de la question précédente.

$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0 \mid \mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ se traduit pas

$p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k} f(k)$ (ceci pour $n \geqslant 1$).

On peut la prolonger en $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k} f(k)$ puisque $f(0) = 0$.

On reconnaît donc le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n t^n$ par $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)t^n$ (on a bien abs. conv. sur $]-1,1[$) mais avec la subtilité que l'on a l'égalité pour $n \geqslant 1$.
On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} f(k) \right) t^n \\
&= 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n \right) - p_0 f(0) \\
&= 1 + \mathrm{S}(t)\mathrm{F}(t).
\end{aligned}$$

6) On en déduit sans difficulté que $\mathrm{F}(t) = \sqrt{1-t^2}$.

On écrit que $\sqrt{1-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n} t^{2n}$ avec

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{1}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2n-1} p(n).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $\boxed{f(n) = \frac{1}{2n-1} p(n)}$

(remarque $p(1) = 0$, on retrouve $f(1) = 0$).

7) On cherche $\mathbb{P}\left(\bigsqcup\limits_{k\geqslant 1} \mathrm{A}_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(n) = \lim\limits_{t\to 1} \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(1) = 1$ par convergence normale sur $[0,1]$ (et théorème de continuité).
Ainsi presque sûrement, on a un retour à l'origine.
Remarque on peut montrer que le temps d'attente n'a pas d'espérance (espérance infinie).

Ex 28 ☕

Jeu de dés, Galton-Watson - `Python`

On considère une variable aléatoire $\mathrm{N} : \Omega \to \mathbf{N}^*$ et une famille de variables aléatoires $\mathrm{X}_n : \Omega \to \mathbf{N}$, on suppose que les variables N et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et que les variables aléatoires X_n ont même loi.

Pour $t \in [-1,1]$, on note $\mathrm{G_N}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\mathrm{N}}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{N} = n\right) t^n$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\mathrm{X}_i}\right)$ les fonctions génératrices associées.

1) On définit la fonction $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_n$. Montrer que la fonction S est une variable aléatoire discrète et déterminer la fonction génératrice $\mathrm{G_S}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\mathrm{S}}\right)$ en fonction de $\mathrm{G_N}$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}$ sur $]-1,1[$.
(on admettra que l'on peut échanger les sommes doubles dans cette question).

2) On suppose que les variables aléatoires X_1 et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

3) **Application I.** On lance un dé de 6, on note le nombre obtenu sauf si on obtient un 6 auquel cas on relance le dé, on note alors la somme des deux nombres obtenus sauf si on a encore obtenu un 6 auquel cas on relance le dé etc. Une fois cette somme N notée (par exemple on a obtenu les lancers 6, 6 et 4 donc N = 16), on lance N fois le dé et on inscrit le score obtenu S. Quelle est l'espérance de S c'est-à-dire le score en moyenne ? Vérifier votre calcul par un test statistique écrit en `Python`.

4) Prolongement et application II, processus de Galton-Watson

On étudie à la descendance d'un individu au cours des générations dans une société patriarcale [1]. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. On note S_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, S_n le nombre de descendants à la n^e génération. On suppose que $S_0 = 1$.

a) Écrire une fonction en `Python` renvoyant le nombre de descendants masculins à la n^e génération puis donner une valeur expérimentale de $\mathbb{E}(S_n)$ et de la variance $V(S_n)$ pour $\lambda = 2,2$ et $n = 8$.
Indication on pourra utiliser la fonction `poisson(lam)` du sous-module `numpy.random`.

b) On modélise de la façon suivante : on se donne une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$, de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on pose $S_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{S_{n-1}} X_{n-1,j}$.

Déterminer la fonction génératrice G_{S_n} de la variable aléatoire S_n.

c) Quelle est la valeur théorique de $\mathbb{E}(S_n)$?

d) Même question pour la variance de S_n.

Sol. 28) :

1) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\{S = k\} = \displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1}\left\{N = n \text{ et } \sum_{n=1}^{n} X_n = k\right\}$ est bien un événement donc S est bien une variable aléatoire discrète.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(N = n, \sum_{n=1}^{n} X_n = k\right) \underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)$$

Pour $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S = k)\,t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)t^k \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)t^k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\left(G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\,(G_{X_1}(t))^n \\ &= G_N(G_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

L'échange des sommes est justifiée par la sommabilité de la famille (notion HP en PC) $\left(\mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}(X_i = k)\,t^k\right)_{k\geqslant 0, n\geqslant 1}$, pour $t \in [-1,1]$, $0 \leqslant |G_{X_1}(t)| \leqslant G_{X_1}(|t|) \leqslant G_{X_1}(1) = 1$ et que G_N est définie sur $[-1,1]$.

2) Rappelons qu'une série génératrice G_X est continue sur $[0,1]$ et qu'elle est dérivable en 1 si et seulement si la variable aléatoire X possède une espérance et qu'alors la fonction G_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $G'_X(1) = \mathbb{E}X$.

Nous avons pour tout $t \in [0,1]$, $G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$, donc pour tout $t \in [0,1[$,

$$G'_S(t) = G'_{X_1}(t) \times G'_N(G_{X_1}(t)).$$

Comme $\lim_{t\to 1^-} G_{X_1}(t) = 1$, $\lim_{t\to 1^-} G'_{X_1}(t) = \mathbb{E}X_1$ et que $\lim_{t\to 1^-} G'_N(t) = \mathbb{E}N$, il vient, par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, que la fonction G_S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et en particulier $G'_S(1) = \boxed{\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 \times \mathbb{E}N}$

3) On voit facilement que pour $p \in \mathbf{N}$, $k \in [\![1,5]\!]$, $\mathbb{P}(N = 6p + k) = \dfrac{1}{6^{p+1}}$.

Donc pour $t \in]-1,1[$, $G_N(t) = \displaystyle\sum_{p\geqslant 0, k\in[\![1,5]\!]}\frac{t^{6p+k}}{6^{p+1}} = \sum_{k=1}^{5} t^k \times \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^{6p}}{6^{p+1}} = \frac{t}{6}\frac{1-t^5}{1-t}\frac{1}{1-t/6}$.

D'où $G'_N(t) = \dfrac{-4t^5 + 27t^4 + 22t^3 + 17t^2 + 12t + 6}{(t-6)^2}$, il vient $\mathbb{E}N = \lim_{t\to 1} G'_N(t) = \dfrac{16}{5}$

Ensuite, $\mathbb{E}X_1 = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}$ d'où $\boxed{\mathbb{E}S} = \mathbb{E}X_1 \times \mathbb{E}N = \dfrac{16}{5}\dfrac{7}{2} = \boxed{\dfrac{56}{5}}$

Voici un petit programme `Python` testant statistiquement la moyenne

1. Ce modèle date du XIX^e siècle...

```python
import random as r


def de():
    return r.randint(1, 6)

def nbtirage():
    S = de()
    boucle = S == 6
    while boucle:
        d = de()
        S += d
        boucle = d == 6
    return S

def somme(n):
    S = 0
    for i in range(n-1):
        S += de()
    return S


N = 1000000
L = [somme(nbtirage()) for i in range(N)]

print("Test statistique pour N = {}, moyenne = {}".format(N, sum(L)/len(L)))
```

La sortie est

```
Test statistique pour N = 1000000, moyenne = 11.210539
```

4) **a)** Voici le code Python

```python
import numpy as np
from numpy.random import poisson

def pop(n, lam=2.2):
    S = 1
    for k in range(n):
        # on sait qu'un somme de v.a. de Poisson indépendantes
        # est une loi de Poisson de paramètre la somme...
        S = poisson(S*lam)
    return S


lam = 2.2
n = 8
N = 10000
L = np.array([pop(n, lam) for i in range(N)])
temp = '''Test statistique ({} échantillons)
moyenne = {:.2f}\nvariance = {:.2f}'''
moy = sum(L)/len(L)
var = sum(L**2)/len(L) - moy**2
# si N = len(L) est petit, il serait préférable d'utiliser
varcorrigee = len(L)/(len(L)-1)*var
print(temp.format(N, moy, var))
print("Valeur théorique:\n{:.2f}\n{:.2f}"
       .format(lam**n, lam**n*(lam**n - 1)/(lam - 1)))
```

(on utilise que le somme indépendantes de variables aléatoires de Poisson est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres) et le résultat est

```
Test statistique (10000 échantillons)
moyenne = 547.52
variance = 249955.28
Valeur théorique:
548.76
250489.49
```

b) On reprend les idées de la question **1)** en adaptant un peu.

Soit F la fonction génératrice commune des variables aléatoires $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$.
Pour $n \geqslant 1$ et pour $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
G_{S_n}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{n-1} = n)\,\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{n-1,j} = k\right) t^k \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{n-1} = n) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{n-1,j} = k\right) t^k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{n-1} = n) \left(G_{\sum_{j=1}^{n} X_{n-1,j}}(t)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{n-1} = n)\,(F(t))^n \\
&= G_{S_{n-1}}(F(t)).
\end{aligned}$$

(l'échange des sommes est justifiée par la sommabilité de la famille comme précédemment)
Ainsi, avec $G_{S_0}(t) = t$ (car $S_0 = 1$), il vient pour $n \geqslant 1$,

$$\text{Pour } t \in [-1,1], \qquad G_{S_n}(t) = (\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}})(t).$$

avec, ici, $F(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

c) On montre par récurrence la dérivabilité de la fonction G_{S_n} en 1 et pour $n \geqslant 1$,

$$G'_{S_n}(1) = F'(1) \times G'_{S_{n-1}}(1)$$

Donc la variable aléatoire S_n possède une espérance et $\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}(X_{0,1}) \times \mathbb{E}S_{n-1} = \lambda\mathbb{E}S_{n-1}$,
comme $\mathbb{E}S_0 = 1$, il vient $\boxed{\mathbb{E}S_n = \lambda^n}$

d) On montre la dérivabilité seconde en 1 par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ de la fonction G_{S_n} (par récurrence sur n bien sûr).
On trouve en dérivant $G'_{S_n}(t) = F'(t) \times G'_{S_{n-1}}(F(t))$ et en passant à la limite, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
G''_{S_n}(1) &= F''(1) \times G'_{S_{n-1}}(1) + (F'(1))^2 \times G''_{S_{n-1}}(1) \\
&= \lambda^2 \times \lambda^{n-1} + \lambda^2 \times G''_{S_{n-1}}(1) = \lambda^{n+1} + \lambda^2 G''_{S_{n-1}}(1)
\end{aligned}$$

Avec $G''_{S_0}(1) = 0$, $F''(1) = \lambda^2$, et en supposant $\lambda \neq 1$, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
G''_{S_n}(1) &= \lambda^{n+1} + \lambda^2 \times \lambda^n + (\lambda^2)^2 \times \lambda^{n-1} + \cdots + (\lambda^2)^{n-1} \times \lambda^2 \\
&= \lambda^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{2k}\lambda^{n+1-k} = \lambda^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = \lambda^{n+1}\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)
\end{aligned}$$

(vrai aussi si $n = 1$).
G_{S_n} étant deux fois dérivable en 1, la variable aléatoire S_n possède une variance et

$$\begin{aligned}
V(S_n) &= G''_{S_n}(1) + G'_{S_n}(1) - \left(G'_{S_n}(1)\right)^2 \\
&= \lambda^{n+1}\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right) + \lambda^n - \lambda^{2n} \\
&= \boxed{\lambda^n\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)}
\end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera que dans le cas où $\lambda = 1$, on trouve $V(S_n) = n\lambda$.

Ex 29 ✍ Mines 2018 RMS

Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{1 + e - t}$.

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice G_X est égale à g.

2) Soient $n \geqslant 2$, $(\mathrm{X}_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X. Déterminer la probabilité que la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}_{1,2} & \cdots & \mathrm{X}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{X}_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ admette un nombre fini de sous-espaces stables.

Sol. 29) :

1) On a pour $|t| < 1+e$,

$$g(t) = \frac{1}{1+e} \cdot e^t \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{t}{1+e}} = \frac{1}{1+e} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(1+e)^n}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ avec } a_n \geqslant 0.$$

Comme les (a_n) sont positifs et que $g(1) = 1$, on a bien une loi de probabilités avec les (a_n).

2) **Lemme** M a un nombre fini de sous-espaces stables ssi $\operatorname{Ker} \mathrm{M}$ est une droite.
C'est nécessaire car sinon il y aurait une infinité de droites stables dans $\operatorname{Ker} \mathrm{M} = \mathrm{E}_0(\mathrm{M})$.
C'est suffisant car $\dim(\operatorname{Ker} \mathrm{M}) = 1 \Rightarrow$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dim\left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}^k\right) = k$.
Raisonnons avec u endomorphisme canoniquement associé à M.
En effet pour $k \geqslant 1$, $u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \subset \operatorname{Ker} u^k$ et
$\dim\left(u(\operatorname{Ker} u^{k+1})\right) = \dim\left(\operatorname{Ker} u^{k+1}\right) - \dim\underbrace{\left(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{k+1}\right)}_{=\operatorname{Ker} u} = \dim\left(\operatorname{Ker} u^{k+1}\right) - 1.$

Par récurrence, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Puis $\dim\left(\operatorname{Ker} u^{k+1}\right) = \dim\left(u(\operatorname{Ker} u^{k+1})\right) + 1 \leqslant k+1$ donc $=$ sinon ça stationne or u nilpoltente (classique).
Autrement dit, on a une endomorphisme nilpotent indice maximal.
Conclusion pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dim\left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}^k\right) = k$.
Soit F sous-espace stable de dimension k. On a $u_{\mathrm{F}}^{\dim \mathrm{F}} = u_{\mathrm{F}}^k = 0$ (prop. des nilpotents)
donc $\mathrm{F} \subset \operatorname{Ker} u^k$ donc égal pour raison de dimension.
• Répondons maintenant à la question.
M a un nombre fini de sous-espaces stables ssi $\operatorname{rg} \mathrm{M} = n-1$ ssi $\mathrm{X}_{1,2} \cdot \cdots \cdot \mathrm{X}_{n-1,n} \neq 0$.

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{1,2} \cdot \cdots \cdot \mathrm{X}_{n-1,n} \neq 0\right) = \left(\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{1,2} \neq 0\right)\right)^{n-1} = \left(1 - \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{1,2} = 0\right)\right)^{n-1}$$
$$= (1 - g(0))^{n-1} = \left(\frac{e}{1+e}\right)^{n-1}.$$