Séries entières et application aux probabilités

Exercices d'application

Ex 1 Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

a) $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ b) $a_n = \dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$

c) $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 0$ d) $a_n = \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$

e) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ f) a_n est la somme des diviseurs premiers de n.

Ex 2

1) Montrer que si la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, alors la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{\mathrm{R}}$.

2) Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vaut $\min(\sqrt{\mathrm{R}_1}, \sqrt{\mathrm{R}_2})$, et que, si $|z| < \mathrm{R}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Ex 3 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$.

Ex 5 Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

Ex 6 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Ex 7 **1)** Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Ex 8 On veut développer en série entière la fonction $x \mapsto f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ où $\alpha \in]\,0, \pi\,[$.

1) Justifier et établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x - e^{i\alpha}} + \dfrac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right)$.

2) Développer f' en série entière et préciser le rayon de convergence.

3) En déduire le développement de f en série entière.

Ex 9 Mines 2016 rms

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

1) Nature de la série de terme général a_n ? de la série de terme général $(-1)^n a_n$?

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercices d'entraînement

Ex 10 X 2016 RMS

Trouver $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite (u_n) ne converge pas, la série entière $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1 et $f(x)$ possède une limite quand $x \to 1^-$.

Ex 11 **Calcul d'un développement en série entière.**
Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \dfrac{1}{4+x} & \text{b) } g(x) = \ln\left(2-x^2\right) \\ \text{c) } f(x) = \ln(x^2-5x+6) & \text{d) } g(x) = e^{-x}\sin x. \end{array}$$

Ex 12 **Recherche de somme**
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{n+1} \quad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!} \quad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{4n}}{4n+1} \quad d)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n!\times(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}.$$

INDICATION : on pourra utiliser la décomposition $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2}\right]$.

Ex 13 Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R > 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Ex 14

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f d'une variable réelle définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}$

2) Calculer la dérivée seconde de $x \mapsto x^2 f(x^2)$ pour x appartenant à l'intérieur de $\mathcal{D}_f$.

3) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Ex 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2) Établir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3) Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

Ex 16 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la suite (a_n)

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

3) Quelle est la nature de la série pour $x = -\mathrm{R}$ et $x = \mathrm{R}$ (dans le second cas, on pourra étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$) ?

Ex 17 **1)** Déterminer les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle suivante

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

vérifiant $y'(0) = 0$. Donner une expression pour ces fonctions.

2) En déduire la solution générale de l'équation différentielle que l'on exprimera à l'aide de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

3) En remarquant que pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t,$$

prouver que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-x^2\right)}{2x}$.

4) Déterminer les solutions de l'équation différentielle qui ont une limite finie en $+\infty$.

Ex 18

1) Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$$

a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$.

Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle
(E) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$.

3) Déduire de ce qui précède une expression explicite de f.

Ex 19 X 2016 RMS

Si $n \in \mathbb{N}$, on note f_n le cardinal de l'ensemble

$$\left\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ a+2b+3c = n\right\}.$$

Montrer, pour $x \in]-1,1[$: $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n$.

Ex 20 ✍

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

1) Déterminer les rayons de convergence de $\sum(a_n \ln n)x^n$ et $\displaystyle\sum\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

2) Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n x^n$ quand $x \to 1^-$.

Faire les exercices de la fiche équations différentielles

Exercices d'approfondissement

Ex 21 X 2015 RMS

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série qui définit f.

2) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

Ex 22 ✍ X 2019 RMS

1) Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$. Est-elle développable en série entière autour de 0 ?

2) Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que g est développable en série entière dans un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\mathrm{M} > 0$, $a > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour tout $x \in]-\eta,\eta[$, on ait $|g^{(n)}(x)| \leqslant \mathrm{M}\cdot a^n \cdot n!$.

3) (je ne sais pas faire) On revient à la fonction f de la question **1)**.
Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{|x| \leqslant \eta} |f^{(n)}(x)| \geqslant (n!)^{\frac{3}{2}}$.

Ex 23 ☕ X 2017 RMS
Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0 = 1$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.
2) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.
3) Exprimer $f(x)$.

Ex 24 ✍ ENS 2017 RMS
Soient $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$ et $\Omega = \{re^{i\theta}\,;\, 0 \leqslant r \leqslant 1, -\pi + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon\}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière qui définit f.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n : z \mapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$. Montrer que (S_n) converge uniformément vers f sur Ω.

INDICATION. Majorer $T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} z^k$ sur Ω et écrire

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{k-1}(z) - T_k(z)}{k}.$$

3) On fixe $\theta \in]-\pi, \pi[$. Soit $\ell : x \in [0, 1[\mapsto f(x\, e^{i\theta})$. Calculer ℓ'.
4) Montrer que $x \mapsto e^{\ell(x)}$ a une dérivée seconde nulle.
5) En déduire la valeur de $f(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Probabilités révision

Ex 25 Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ de lois respectives de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la fonction génératrice de $X + Y$. En déduire la loi de $X + Y$.

Ex 26 On considère une variable aléatoire $N : \Omega \to \mathbb{N}^*$ et une famille de variables aléatoires $X_n : \Omega \to \mathbb{N}$, on suppose que les variables N et $(X_n)_{n \geqslant 1}$ sont indépendantes et que les variables aléatoires X_n ont même loi.

Pour $t \in [-1, 1]$, on note $G_N(t) = \mathbb{E}\left(t^N\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\, t^n$ et $G_{X_i}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X_i}\right)$ les fonctions génératrices associées.

1) On définit la variable aléatoire discrète $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Déterminer la fonction génératrice $G_S(t) = \mathbb{E}\left(t^S\right)$ en fonction de G_N et G_{X_i} sur $]-1, 1[$.
(on s'autorisera sans justifier en filière PC l'interversion des signes somme).

2) **Application** On lance un dé de 6, on note le nombre obtenu sauf si on obtient un 6 auquel cas on relance le dé, on note alors la somme des deux nombres obtenus sauf si on a encore obtenu un 6 auquel cas on relance le dé etc. Une fois cette somme N notée (par exemple on a obtenu les lancers 6, 6 et 4 donc $N = 16$), on lance N fois le dé et on inscrit le score obtenu S. Quelle est l'espérance de S c'est-à-dire le score en moyenne ?

Ex 27 ☕
Marche aléatoire équilibrée, retour à l'origine
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec (X_n) v.a.i.i.d. de Rademacher.
On note pour $n \geqslant 1$, $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $f(n) = \mathbb{P}(S_n = 0, S_1 \neq 0, \cdots, S_{n-1} \neq 0)$ probabilité de premier retour en 0. On conviendra que $S_0 = 0$ et donc que $p_0 = 1$. En revanche on prendra $f(0) = 0$.

1) Montrer que pour $n = 2k$, $p_n = \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$.

2) Calculer $f(1)$, $f(2)$.

3) On pose $S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n t^n$ et $F(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)t^n$ (séries entières de rayon $\geqslant 1$).

Vérifier que pour $|t|<1$, $S(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

4) On note A_k « le premier retour en 0 se fait à l'étape k ».

Montrer que pour $n\geqslant 1$, $\mathbb{P}(S_n=0)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S_n=0\mid A_k)\mathbb{P}(A_k)$.

Que vaut $\mathbb{P}(S_n=0\mid A_k)$? (c'est le point-clé de l'exercice).

5) Montrer que pour $n\geqslant 1$, $p_n=\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}f(k)$.

En déduire que pour $|t|<1$, $S(t)=1+S(t)F(t)$.

6) En déduire que $F(t)=1-\sqrt{1-t^2}$. Calculer $f(n)$.

7) Montrer que presque sûrement, on a un retour à l'origine.

Ex 28

Jeu de dés, Galton-Watson - `Python`

On considère une variable aléatoire $N:\Omega\to\mathbf{N}^*$ et une famille de variables aléatoires $X_n:\Omega\to\mathbf{N}$, on suppose que les variables N et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et que les variables aléatoires X_n ont même loi.

Pour $t\in[-1,1]$, on note $G_N(t)=\mathbb{E}\left(t^N\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\,t^n$ et $G_{X_i}(t)=\mathbb{E}\left(t^{X_i}\right)$ les fonctions génératrices associées.

1) On définit la fonction $S=\sum_{n=1}^{N}X_n$. Montrer que la fonction S est une variable aléatoire discrète et déterminer la fonction génératrice $G_S(t)=\mathbb{E}\left(t^S\right)$ en fonction de G_N et G_{X_i} sur $]-1,1[$.
(on admettra que l'on peut échanger les sommes doubles dans cette question).

2) On suppose que les variables aléatoires X_1 et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

3) **Application I.** On lance un dé de 6, on note le nombre obtenu sauf si on obtient un 6 auquel cas on relance le dé, on note alors la somme des deux nombres obtenus sauf si on a encore obtenu un 6 auquel cas on relance le dé etc. Une fois cette somme N notée (par exemple on a obtenu les lancers 6, 6 et 4 donc $N=16$), on lance N fois le dé et on inscrit le score obtenu S. Quelle est l'espérance de S c'est-à-dire le score en moyenne ? Vérifier votre calcul par un test statistique écrit en `Python`.

4) **Prolongement et application II, processus de Galton-Watson**

On étudie à la descendance d'un individu au cours des générations dans une société patriarcale [1]. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\in]0,+\infty[$. On note S_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, S_n le nombre de descendants à la n^e génération. On suppose que $S_0=1$.

a) Écrire une fonction en `Python` renvoyant le nombre de descendants masculins à la n^e génération puis donner une valeur expérimentale de $\mathbb{E}(S_n)$ et de la variance $V(S_n)$ pour $\lambda=2,2$ et $n=8$.
INDICATION on pourra utiliser la fonction `poisson(lam)` du sous-module `numpy.random`.

b) On modélise de la façon suivante : on se donne une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$, de même loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et on pose $S_0=1$ et pour $n\geqslant 1$, $S_n=\sum_{j=1}^{S_{n-1}}X_{n-1,j}$.

Déterminer la fonction génératrice G_{S_n} de la variable aléatoire S_n.

c) Quelle est la valeur théorique de $\mathbb{E}(S_n)$?

d) Même question pour la variance de S_n.

Ex 29 MINES 2018 RMS

Soit $g:t\mapsto\dfrac{e^t}{1+e-t}$.

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice G_X est égale à g.

2) Soient $n\geqslant 2$, $(X_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X. Déterminer la probabilité que la matrice

$$M=\begin{pmatrix}0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

admette un nombre fini de sous-espaces stables.

1. Ce modèle date du XIX^e siècle...