Suites et séries de fonctions

Exercices d'application

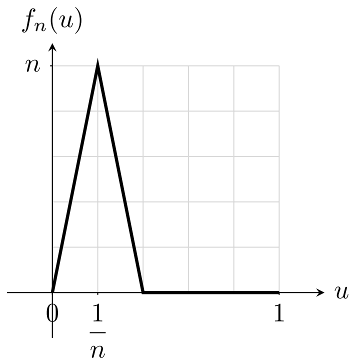
Ex 1 Étudier la convergence simple des fonctions suivantes.
En particulier regarder si le caractère $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, dérivable est conservé. Étudier s'il y a lieu $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n$

1) $f_n(x) = \ln\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$ sur $[1,+\infty[$

2) $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

3) $n \geqslant 2$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{n},1\right]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0,\dfrac{1}{n}[$ sur $[0,1]$

4) sur $[0,1]$:



5) $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $[0,+\infty[$

6) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ sur $[0,+\infty[$

7) $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ sur $[0,n]$ et 0 sur $[n,+\infty[$, étudier la suite sur $[0,+\infty[$

Ex 2 Soit α un réel positif donné. Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme locale des suites d'applications de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = e^{-nx}\sin(n\alpha x), \quad g_n(x) = e^{-nx}\cos(n\alpha x).$$

Ex 3 X 2019 B. Dhote
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{c.s.}{\to}} f$$
$$f_n \ k\text{-lipschitziennes.}$$

Montrer que f est k-lipschitzienne et que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Ex 4 Centrale 2013
Étudier la suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos^n x \sin x$, puis $g_n(x) = nf_n(x)$.

Ex 5 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x > 0\ f(x) < x$.
On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$
Donner $f(0)$ et montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Ex 6 On pose $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$ sur $[0,1]$

1) Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$. Remarque ?

2) Si g est continue, étudier à l'aide d'un changement de variable la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 g(t)f_n(t)\mathrm{d}t$

Ex 7 ☕ TPE 2015
Pour $n \geqslant 2$, on définit une fonction f_n sur $\mathrm{I} = [0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}.$$

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On notera f la somme de cette série de fonctions.

2) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a > 0$ mais pas sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

4) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5) Montrer que f n'est pas dérivable en 0 à droite.

6) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

Ex 8 ☕ CENTRALE 2015
Montrer que la fonction f définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 9 **Théorème de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$.**
Soit $f\in\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, que penser de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$, de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x$? démonstration ?

Exercices d'entraînement

Ex 10 TPE 2018 C. Li
On pose $u_n:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x}\end{array}\right.$

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n(x)$ converge.
2) Soit $f(x)$ la somme, montrer que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}-\ln x$ grâce à une comparaison série-intégrale.

Ex 11

1) Convergence simple, uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)=4^n\left(x^{2^n}-x^{2^{n+1}}\right)$, $x\in[0,1]$.
2) Même question avec $g_n(x)=n(x^n-x^{n+1})$, $x\in[0,1]$.

Ex 12 Existe-t-il des intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la suite de fonctions

$$f_n(x)=\frac{1}{\sin^2x+(1+x^2)^n}$$

converge uniformément ?

Ex 13 Soit $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$
Donner les variations de f
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f'.
Montrer que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$
Étudier $\lim\limits_{+\infty}f$ puis montrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2x}$
INDICATION : penser à une comparaison avec une intégrale.

Ex 14 ✍ AIR 2015

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Ex 15 ☕

1) Soit $r\in]-1,1[$. On pose pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$. Vérifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose pour $r\in]-1,1[$, $g(r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, déterminer une expression simple de $g'(r)$ et calculer $g(r)$ pour $r\in]-1,1[$.
3) En déduire $\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x=-2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{r^n\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right)$ ainsi que la valeur de l'intégrale.

Ex 16 Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^ne^{-\sqrt{n}x}}{n}$
Donner l'ensemble de définition de f.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
Étudier $\lim\limits_{+\infty}f$ puis montrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-e^{-x}$

Ex 17 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(1) \neq 0$

1) Calculer la limite de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

2) On suppose de plus f de classe $\mathscr{C}^1$, donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

3) On suppose seulement f continue mais on admet le résultat suivant :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe P polynôme tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (théorème de Weïerstrass).
Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai.

Ex 18 Soit $\theta \in]0,\pi[$ et $f : [0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(n\theta x)}{n}$

1) Montrer que f est définie et dérivable sur $[0,1[$

2) Montrer : $\forall x \in [0,1[\,, f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x\sin(\theta x)}{1 - x\cos(\theta x)}\right)$

Exercices d'approfondissement

Ex 19

On définit $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \end{array}\right.$

Étudier la convergence simple, normale de $\sum f_n$.
Montrer que la somme f est continue, décroissante et chercher un équivalent en 0 et $+\infty$.

Ex 20 Centrale 2017 rms

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.

2) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Ex 21 ENS 2011

Soit f une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$ telle que, pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| < |x|$. On pose $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f, \cdots, f_n = f \circ f_{n-1}, \cdots$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ pour tout $\mathrm{A} > 0$.
Indication on admettra le résultat suivant : de toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels dans $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, on peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$.

Ex 22

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

3) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Ex 23

Un grand classique

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3) f est-elle dérivable en 0 ?

Indication on pourra montrer et utiliser que pour $t \geqslant 0$, $1 - e^{-t} \geqslant \dfrac{t}{1+t}$.

Ex 24 CCP 2012 rms

(TPE) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier la dérivabilité de f. Donner une expression de f'.

3) Donner une expression simple de f.

Ex 25 ENS 2015

Soit $\mathscr{D}$ une partie bornée de $\mathbb{C}$. Montrer que la suite de fonctions $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur $\mathscr{D}$ vers la fonction $z \mapsto e^z$.

Indication on pourra montrer que $n^k - n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \leqslant n^{k-1} \cdot \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\right)$

Ex 26 Mines 2017 rms

L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est-elle dérivable en 0 ?

Ex 27 Mines 2013

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos\frac{x}{2^n}.$$

Ex 28 ENS 2011

1) Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f ($a<b$). Montrer que f est une fonction polynômiale sur $[a,b]$.

2) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions dans V convergeant simplement, elle converge uniformément, et la limite est dans V.

Indication on utilisera le résultat classique (mais pas trivial !)

Si $(g_1,\dots,g_p)$ est une base de V, alors il existe $x_1,\dots,x_p$ tels que $\det\left(g_i(x_j)\right)_{i,j} \neq 0$.

Ex 29 Centrale 2010

Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes telle que $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, et

$$\forall n, \quad \mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(\mathrm{X}).$$

1) Trouver le degré et le coefficient dominant de T_n.

2) Trouver avec Python l'expression des dix premiers polynômes T_n et tracer leur graphe sur $[-1,1]$.

3) Montrer que, pour tout n, et tout $t\in[0,\pi]$, $\mathrm{T}_n(\cos t) = \cos(nt)$.

4) Pour tout n on définit le polynôme τ_n par $\tau_n(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$. On considère la norme $\mathrm{P} \mapsto \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\mathrm{P}(x)| = \|\mathrm{P}\|$. Calculer $\|\tau_n\|$.

5) Soit P un polynôme réels de degré n et de coefficient dominant 1. Montrer que $\|\mathrm{P}\| \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Indication On raisonnera par l'absurde en considérant $\mathrm{P} - \tau_n$.

6) Soit Δ l'ensemble des polynômes réels de la forme $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_i)$. Montrer que l'application $\mathrm{P} \mapsto \|\mathrm{P}\|$ admet un minimum sur Δ.

Les indications

Ind. 2 : Pour la convergence uniforme de g, aucun calcul. Pour f, on peut déterminer la limite de $\max f_n$.

Ind. 19 : On pourra remarquer que $xf(x) = 1 + f(x+1)$.

Ind. 23 : On pourra montrer que $\forall x>0$, $\dfrac{f(0)-f(x)}{x} \geqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{(1+n^2)(1+nx)}$.

Ind. 27 : Pour la convergence uniforme, utiliser que $\varphi : t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc bornée.