

ALGÈBRE BILINÉAIRE

Exercices d'application

Ex 1 Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot P(x) \cdot Q(x) dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Sol. 1) : Ne pas oublier la continuité pour montrer le caractère défini positif.

Ex 2 Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.

Sol. 2) : C'est du Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

Ex 3 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère $v = (0, 3, 1, -1)$ et $w = (1, 2, -1, 1)$. Soit $F = \text{Vect}(v, w)$

Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$

Sol. 3) : $(x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow (3y + z - t = 0 \text{ et } x + 2y - z + t = 0)$
d'où une base $(0, 0, 1, 1)$ et $(-5, 1, 0, 3)$

par le procédé de Schmidt : $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{61}}(-5, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ forment un bon de $F^\perp$.

Ex 4

1) Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

Sol. 4) : 1) La bilinéarité, la symétrie et la positivité se prouvent de façon simple. Soit

$P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^2(k) = 0$. Puisque P^2 est à valeurs réelles, cela donne $P(k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Le polynôme P admet donc au moins $n + 1$ racines. Or il est de degré au plus n , il est donc nul.

L'application φ est bien un produit scalaire.

2) Attention, le produit scalaire change avec n .

On applique la méthode de Gram-Schmidt à la base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée par les polynômes $P_0 = 1, P_1 = X$ et $P_2 = X^2$.

- On a $F_0 = P_0$ avec $\|F_0\|^2 = \sum_{k=0}^2 P_0^2(k) = 3$, d'où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (le polynôme P_0 est le polynôme constant 1, mais il est normé pour le produit scalaire considéré).
- On obtient ensuite $Q_1 = \frac{P'_1}{\|P'_1\|}$ où $F_1 = P_1 - \frac{\varphi(F_0, P_1)}{\|F_0\|^2} F_0 = X - 1$

Calculons $\|F_1\|^2 = (0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 2$, ce qui donne $Q_1 = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$

- On a enfin $Q_2 = \frac{P'_2}{\|P'_2\|}$ où $F_2 = P_2 - \frac{\varphi(F_0, P_2)}{\|F_0\|^2} F_0 - \frac{\varphi(F_1, P_2)}{\|F_1\|^2} F_1$. On obtient $F_2 = X^2 - 2X + \frac{1}{3}$.

Par calcul, $\|F_2\|^2 = \frac{2}{3}$ et donc $Q_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right)$

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right) \right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire considéré.

Ex 5 Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

- La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormale vis-à-vis de ce produit scalaire ?
- Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
- Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer $d(M, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Sol. 5) : trivial, résultat du cours. $\text{tr}({}^t\text{AB}) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} a_{ij}b_{ij}$ et la base canonique est

bien une bon.

la suite est immédiate

en particulier $p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(\text{M}) = \frac{1}{2}(\text{M} - {}^t\text{M})$.

Pour la dernière question, c'est le principe des moindres carrés

$$\begin{aligned} d(\text{M}, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) &= \inf_{\text{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \|\text{M} - \text{A}\| = \|\text{M} - p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(\text{M})\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}(\text{M} + {}^t\text{M}) \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i,j} (m_{i,j} + m_{j,i})^2}. \end{aligned}$$

Ex 6 Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $\text{A} = \text{I}_n - 2\text{U}{}^t\text{U}$.

Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Sol. 6) : La matrice A est symétrique car ${}^t\text{A} = \text{I}_n - 2({}^t\text{U}{}^t\text{U}) = \text{A}$. On a donc ${}^t\text{AA} = \text{A}^2$. Par ailleurs, on a $\text{A}^2 = (\text{I}_n - 2\text{U}{}^t\text{U})^2 = \text{I}_n - 4\text{U}{}^t\text{U} + 4\text{U}{}^t\text{U}{}^t\text{U}{}^t\text{U}$. Or ${}^t\text{U}{}^t\text{U} = 1$, si bien que $\text{U}{}^t\text{U}{}^t\text{U} = \text{U}({}^t\text{U}{}^t\text{U}){}^t\text{U} = \text{U}{}^t\text{U}$.

Finalement ${}^t\text{AA} = \text{I}_n$. La matrice A est donc orthogonale, mais également symétrique. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Il reste à déterminer les vecteurs invariants par A .

Soit $\text{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\text{AX} = \text{X}$. Cela équivaut à l'équation (E) : $2\text{U}{}^t\text{UX} = 0 \Leftrightarrow \langle \text{U}, \text{X} \rangle = 0$. Si U est le vecteur ${}^t(u_1, \dots, u_n)$ et S le vecteur ${}^t(x_1, \dots, x_n)$, l'équation (E) est

équivalente à $\left(\sum_{i=1}^n u_i x_i \right) u = 0$.

Comme le vecteur u est non nul, l'espace invariant est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$.

La matrice A est donc une réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur u .

Exercices d'entraînement

Ex 7 

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\text{P}_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$. Montrer que $(\text{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[\text{X}]$ pour le produit scalaire défini par $(\text{P} | \text{Q}) = \int_{-1}^1 \text{P}(x) \cdot \text{Q}(x) dx$, et calculer $\|\text{P}_n\|$.

Sol. 7) : Soit $\text{R}_n = (x^2 - 1)^n$

Pour calculer $\int_{-1}^1 \frac{d^n \text{R}_n}{dx^n} \cdot \frac{d^p \text{R}_p}{dx^p} dx$ avec $n \geq p$, on effectue des intégrations par partie successives.

Au début les crochets sont nuls car 1 et -1 sont racines d'ordres $p - k$ pour $\frac{d^k \text{R}_p}{dx^k}$ ($k \in \llbracket 1, p \rrbracket$).

On a ainsi,

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n \text{R}_n}{dx^n} \cdot \frac{d^p \text{R}_p}{dx^p} dx = - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1} \text{R}_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d^{p+1} \text{R}_p}{dx^{p+1}} dx = \dots = (-1)^p \int_{-1}^1 \frac{d^{n-p} \text{R}_n}{dx^{n-p}} \cdot \frac{d^{2p} \text{R}_p}{dx^{2p}} dx$$

Si $n > p$, on continue une fois de plus l'intégration par partie et on obtient

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n \text{R}_n}{dx^n} \cdot \frac{d^p \text{R}_p}{dx^p} dx = (-1)^{p+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-p} \text{R}_n}{dx^{n-p}} \cdot \underbrace{\frac{d^{2p+1} \text{R}_p}{dx^{2p+1}}}_{=0} dx = 0.$$

Si $n = p$, alors

$$\|\text{P}_n\|^2 = \int_{-1}^1 \frac{d^n \text{R}_n}{dx^n} \cdot \frac{d^n \text{R}_n}{dx^n} dx = (-1)^n \int_{-1}^1 \text{R}_n \cdot \frac{d^{2n} \text{R}_n}{dx^{2n}} dx = (-1)^n (2n)! 2 \int_0^1 \text{R}_n dx$$

Calcul de $\text{I}_n = \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx$.

(c'est presque une intégrale de Wallis : $u = \sin x$ donne $\text{I}_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) dx$)

On peut éviter le changement de variable et écrire :

$(x^2 - 1)^n = x \times x(x^2 - 1)^{n-1} - (x^2 - 1)^{n-1}$ et avec une intégration par partie sur $x \times x(x^2 - 1)^{n-1}$,

$x \rightarrow 1$ et $x(x^2 - 1)^{n-1} \leftarrow \frac{1}{2n}(x^2 - 1)^n$, il vient $\int_0^1 x \times x(x^2 - 1)^{n-1} dx = -\frac{1}{2n} \text{I}_n$.

Finalement, $\text{I}_n = -\frac{1}{2n} \text{I}_n - \text{I}_{n-1}$ d'où $\text{I}_n = -\frac{2n}{2n+1} \text{I}_{n-1} = \dots = (-1)^n \frac{(2n) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times \dots \times 3 \times 1} \text{I}_0 = (-1)^n \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.

CONCLUSION : $\|\text{P}_n\|^2 = (-1)^n (2n)! \times 2 \times (-1)^n \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}$.

Ex 8 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E .

- 1) Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, est $U^t U$, où U est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ relativement à $\mathcal{B}$.
- 2) En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Sol. 8) :

- 1) $p(x) = \langle \vec{u}, x \rangle$ ce qui s'écrit : $MX = ({}^t U X) U = U ({}^t U X) = (U^t U) X$.
Donc $M = U^t U$.
- 2) On prend $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $p_{\mathcal{P}} = \text{id} - p_U$ d'où la matrice $M = I - U^t U$.

Ex 9 Soit A et B deux matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $\sqrt{\text{tr}[(A+B)^2]} \leq \sqrt{\text{tr}(A^2)} + \sqrt{\text{tr}(B^2)}$, et : $(\text{tr}(AB))^2 \leq \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2)$.

Cas d'égalités ?

Sol. 9) : $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$ donc c'est Minkowski et Cauchy-Schwarz, cas d'égalité : $A = 0$ ou $A = \lambda B$ avec $\lambda \geq 0$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}$)

Ex 10  **Classique.**

Calculer $m = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt$.

INDICATION : On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ et on pourra considérer

l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$. On doit trouver $m = 36$.

Sol. 10) : On interprète ce minimum comme une distance entre un vecteur fixe et un sous-espace vectoriel, pour un bon produit scalaire.

Considérons, sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$.

Cette application est bien définie car $h : t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{1}{t^2}$.

La fonction h est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui garantit l'existence de $\varphi(f, g)$.

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates, la positivité également.

Si $f \in E$ vérifie $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt = 0$ alors, puisque $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $t \geq 0$, on a $f^2(t)e^{-t} = 0$.

La fonction polynômiale f est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$ donc $f = 0$.

Ainsi φ définit un produit scalaire sur E , que l'on notera $(\cdot | \cdot)$. On pose alors $P_0 = X^3$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$.

On peut interpréter m comme $m = \min_{P \in F} \|P_0 - P\|^2 = d(P_0, F)^2$.

Cette distance est atteinte pour le projeté orthogonal Q de P_0 sur F .

Pour déterminer ce projeté orthogonal, on peut déterminer une base orthonormée de F et utiliser la formule donnant le projeté orthogonal.

Plus rapidement, on écrit les conditions que doit vérifier le polynôme Q , c'est-à-dire $Q \in F$ et $P_0 - Q \perp F$.

La première condition se traduit par l'existence d'un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q = aX^2 + bX + c$.

Pour la seconde condition, il suffit que $P_0 - Q$ soit orthogonal à une base de F , par exemple aux polynômes $1, X$ et X^2 , ce qui donne trois conditions $(P_0 - Q | X^i) = 0$ pour $i = 0, 1$ et 2 , qui se réécrivent en $(Q | X^i) = (X^3 | X^i)$. On obtient finalement le système

$$\begin{cases} 2!a + 1!b + 0!c = 3! \\ 3!a + 2!b + 1!c = 4! \\ 4!a + 3!b + 2!c = 5! \end{cases},$$

ce qui donne $a = 9, b = -18$ et $c = 6$, c'est-à-dire $Q = 9X^2 - 19X + 6$.

On calcule enfin $\|Q - P_0\|^2 = 36$ qui est le minimum recherché.

Ex 11 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et

$$A = \begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Sol. 11) : A est symétrique et orthogonale donc c'est une symétrie orthogonale (à réexpliquer en détail)

$\text{tr } A = -1$ donc c'est un retournement (symétrie orthogonale par rapport à une droite)

on cherche l'axe, c'est-à-dire E_1 , mais sans calcul on voit que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1$ donc :

A est le retournement par rapport à $\text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ex 12 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, avec le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$, soit

$$f : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''.$$

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner ses éléments propres quand $n = 3$.

Sol. 12) : Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, écrivons

$$(f(P)|Q) = \int_{-1}^1 (2tP'(t) + (t^2 - 1)P''(t))Q(t)dt.$$

Une intégration par partie sur $\int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t)dt$ donne :

$P'' \leftarrow P'$ et $(t^2 - 1)Q(t) \rightarrow 2tQ(t) + (t^2 - 1)Q'$ donc

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 1)P''(t)Q(t)dt = - \int_{-1}^1 [2tP'(t)Q(t) + (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)]dt.$$

Il vient

$$\int_{-1}^1 (2tP'(t) + (t^2 - 1)P''(t))Q(t)dt = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt.$$

Le caractère symétrique est alors immédiat en échangeant le rôle de P et de Q . Pour $n = 3$, on peut faire tous les calculs, voici le résultat avec Maple.

```
> restart;with(linalg):n:=3;
```

```
n := 3
```

```
> phi:=P->2*X*diff(P,X)+(X^2-1)*diff(P,X,X);
```

$$\varphi := P \rightarrow 2X \left(\frac{\partial}{\partial X} P \right) + (X^2 - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} P \right)$$

```
> M:=matrix(n+1,n+1,(i,j)->coeff(phi(X^(j-1)),X,i-1));
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M);
```

```
[6, 1, {[1, 0, -3, 0]}], [12, 1, {[0, 1, 0, -5/3]}], [2, 1, {[0, 1, 0, 0]}], [0, 1, {[1, 0, 0, 0]}]
```

```
> jordan(M,P);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Ex 13 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n , tel qu'il existe un entier naturel k vérifiant $f^k = \text{id}$. Montrer alors que f est une symétrie orthogonale.

Sol. 13) : f est diagonalisable en base orthonormale et ses valeurs propres vérifient $\lambda^k = 1$ donc $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Un endomorphisme diagonalisable avec des valeurs propres parmi -1 et 1 est une symétrie. Comme l'endomorphisme est symétrique, la symétrie est orthogonale (résultat de cours, tout simplement les sous-espaces propres E_{-1} et E_1 sont orthogonaux, $f \in \{-\text{id}, \text{id}\}$, cas marginal).

Ex 14 Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Sol. 14) : $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \langle u(X), X \rangle$ avec $X = \sum_{i=1}^n e_i$

$$\text{d'où } \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq \|u(X)\| \|X\| = \|X\|^2 = n.$$

Ex 15 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que ${}^tAA = 0$ si et seulement si $A = 0$.

2) Montrer que $A {}^tAA = A$ implique $({}^tAA)^2 = {}^tAA$. Montrer la réciproque, en simplifiant tBB où $B = A {}^tAA - A$.

Sol. 15) : 1) Si $A = 0$, alors on a directement $A {}^tA = 0$.

Supposons que ${}^tAA = 0$. Considérons un vecteur X quelconque dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Afin de faire apparaître une norme, on calcule ${}^tX {}^tAA X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 = 0$.

Ainsi, pour tout vecteur colonne X , on a $AX = 0$ et la matrice A est donc nulle.

2) Pour le sens direct, on a $({}^tAA)^2 = {}^tA (A{}^tAA) = {}^tAA$. Pour la réciproque, on calcule comme demandé tBB et on obtient

$${}^tBB = ({}^tAA{}^tA - {}^tA)(A{}^tAA - A) = ({}^tAA{}^tAA{}^tAA) - 2{}^tAA{}^tAA + {}^tAA = 0,$$

en utilisant $({}^tAA)^2 = {}^tAA$. La matrice $C = {}^tBB$ est nulle. D'après la question précédente, cela implique que B est nulle.

On a donc l'équivalence entre $A{}^tAA = A$ et $({}^tAA)^2 = {}^tAA$.

Ex 16 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = A{}^tA - {}^tA A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Sol. 16) Comme ${}^tB = A{}^tA - {}^tA A = B$, la matrice B est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée avec, d'après l'énoncé, des valeurs propres toutes positives.

Or $\text{tr } B = \text{tr}(A{}^tA) - \text{tr}({}^tA A) = 0$ est la somme des valeurs propres.

Les valeurs propres sont donc toutes nulles et B est semblable à la matrice nulle donc B est nulle.

Ex 17 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Sol. 17) La matrice A est symétrique réelle donc A est diagonalisable.

Il existe donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit la matrice diagonale D , de diagonale les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On a $B = A^3 = QD^3Q^{-1}$ et si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $P(B) = QP(D^3)Q^{-1}$.

La question revient à chercher un polynôme P tel que $P(D^3) = D$, c'est-à-dire tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_i^3) = \lambda_i$.

Notons $\mu_1, \dots, \mu_m$ les valeurs propres distinctes de A .

On cherche donc un polynôme P tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $P(\mu_i^3) = \mu_i$.

Les réels $\mu_1, \dots, \mu_m$ sont deux à deux distincts, donc les réels $\mu_1^3, \dots, \mu_m^3$ le sont également ($x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).

On peut alors considérer les polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $\mu_1^3, \dots, \mu_m^3$.

Il existe un unique polynôme P de degré au plus $m - 1$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$P(\mu_i^3) = \mu_i.$$

Ce polynôme donne alors $P(B) = A$.

Ex 18 

Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n . Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, calculer :

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Sol. 18) : On considère $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ alors $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{AS}_n$ donc

$$\begin{aligned} \inf_{M \in \mathcal{S}_n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2 &= \min_{M \in \mathcal{S}_n} \|A - M\|^2 = d(A, \mathcal{S}_n)^2 \\ &= \|p_{\mathcal{AS}_n}(A)\|^2 = \left\| \frac{A - {}^tA}{2} \right\|^2 = \boxed{\frac{1}{4} \sum_{i \neq j} (a_{ij} - a_{ji})^2} \end{aligned}$$

Ex 19 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, et non nulle.

Montrer que la matrice $M = \left(\int_a^b t^{i+j} f(t) dt \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique définie positive,

c'est-à-dire : pour tout $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ${}^tXMX > 0$.

Sol. 19) : c'est une matrice symétrique, c'est $\langle X^i, X^j \rangle$ dans le produit scalaire adapté dans $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$

Montrons que les valeurs propres de la matrice M sont strictement positifs, ou ce qui revient au même :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad {}^tXMX > 0 :$$

$$\text{si } X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \text{ alors } {}^tXMX = \sum_{i,j} x_i x_j \int_a^b t^{i+j} f(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i \right)^2 f(t) dt > 0$$

donc si X est un vecteur propre : ${}^tXMX = \lambda \|X\|_{can}^2$ et c'est fini !

Ex 20 

Soit E un espace euclidien. Soit v un endomorphisme symétrique positif de E c'est-à-dire tel que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ (en plus d'être symétrique).

- 1) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif w tel que $w^2 = v$.
- 2) Soit λ un réel positif et h un endomorphisme symétrique positif de E . Montrer que $\text{Ker}(h - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(h^2 - \lambda^2 \text{id}_E)$.
- 3) En déduire que w est unique.

Sol. 20) : 1) Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.

Comme v est positif, on a $\forall i, \lambda_i \geq 0$. On définit l'endomorphisme w par $w(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par construction, $w^2 = v$ et w est symétrique positif car il admet une base orthonormale de vecteurs propres et ses valeurs propres sont positives.

- 2) • L'inclusion $\text{Ker}(h - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker}(h^2 - \lambda^2 \text{id}_E)$ est évidente.
- Posons $F = \text{Ker}(h^2 - \lambda^2 \text{id}_E)$. Comme h commute avec $h^2 - \lambda^2 \text{id}_E$, F est stable par h , et $h|_F$ est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de F .
- Il existe des réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que la matrice de $h|_F$ dans $\mathcal{B}$ soit égale à $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$.
- Or $(h|_F)^2 = \lambda^2 \text{id}_F$, donc $\forall i, \alpha_i^2 = \lambda^2$, d'où $\alpha_i = \lambda$ car ils sont positifs. Il en résulte que $h|_F = \lambda \text{id}_F$, donc que $F \subset \text{Ker}(h - \lambda \text{id}_E)$.
- 3) Soit h un endomorphisme symétrique positif tel que $h^2 = v$. Soit λ une valeur propre de v .
- D'après 2), $\text{Ker}(h - \sqrt{\lambda} \text{id}_E) = \text{Ker}(v - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(w - \sqrt{\lambda} \text{id}_E)$.
- On en déduit que h et w coïncident sur chaque sous-espace propre de v , or v est diagonalisable, donc E est la somme directe des sous-espaces propres de v , d'où $h = w$, ce qui démontre bien l'unicité de w .

Ex 21

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices symétriques réelles commutant deux à deux

- 1) Montrer qu'elles sont diagonalisables au moyen de la même matrice orthogonale.
(Etudier successivement les cas : $I = \{1, 2\}$, $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, I quelconque)
- 2) Montrer qu'il existe B , matrice symétrique réelle, telle que $\forall i \in I, A_i \in \mathbb{R}[B]$

Sol. 21) : 1) si $n = 2$

Notons u_1 et u_2 respectivement les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ de matrices A_1 et A_2 dans la base canonique. A_1 étant symétrique réelle, u_1 est un endomorphisme symétrique, donc u_1 est diagonalisable, et ses espaces propres sont en somme directe orthogonale.

De plus, comme u_2 et u_1 commutent, ces espaces propres sont u_2 -stables.

Soit F un de ces espaces propres, et $u_{2,F}$ l'endomorphisme induit, $u_{2,F}$ est un endomorphisme symétrique de F

(pour tout $(x, y) \in F^2$, on a $(u_{2,F}(x)|y) = (u_2(x)|y) = (x|u_2(y)) = (x|u_{2,F}(y))$.)

on en déduit que $u_{2,F}$ est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F , et la base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_F$ pour tous les espaces propres de u_1 diagonalise simultanément u_1 et u_2 . A_1 et A_2 sont donc diagonalisables au moyen de la même matrice orthogonale.

Deuxième cas : $I = \llbracket 1, n \rrbracket$. On raisonne par récurrence sur n , c'est immédiat pour $n = 1$ si c'est vrai pour n , on le montre pour $n + 1$:

les endomorphismes u_i étant définis comme ci-dessus, u_{n+1} est diagonalisable, et ses espaces propres sont en somme directe orthogonale

De plus, comme u_i et u_{n+1} commutent ($1 \leq i \leq n$), ces espaces propres sont u_i -stables. Soit F un de ces espaces propres, et $u_{i,F}$ les endomorphismes induits, ce sont des endomorphismes symétriques de F , et il commutent deux à deux, donc

d'après l'hypothèse de récurrence ils sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F

la base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_F$ pour tous les espaces propres de u_{n+1} diagonalise alors simultanément tous les u_i ($1 \leq i \leq n + 1$) : les A_i sont donc diagonalisables au moyen de la même matrice orthogonale

Troisième cas : I quelconque. Comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \in \mathbb{N}$, il existe une base $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$ de $\text{Vect}((A_i)_{i \in I})$, sous-famille des A_i (de toute famille génératrice d'un espace vectoriel on peut extraire une base), d'après ce qui précède il existe alors une matrice orthogonale diagonalisant simultanément les B_i , et il est immédiat que cette base diagonalise tous les A_i , par combinaison linéaire.

2) Notons $Q \in O_n(\mathbb{R})$ diagonalisant simultanément les A_i , et, pour $i \in I$, $Q^{-1}A_iQ = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,p})$

Notons $\Delta = \text{diag}(1, \dots, p)$. Soit $i \in I$, d'après le théorème d'interpolation de Lagrange il existe $P_i \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \lambda_{i,k} = P_i(k)$, et on a alors :

$P_i(\Delta) = \text{diag}(P_i(1), \dots, P_i(p)) = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,p})$, ce qui montre qu'avec $B = P\Delta P^{-1}$, on a pour tout $i \in I$, $P_i(B) = A_i$

Ex 22

Diagonaliser les matrices réelles suivantes au moyen d'une matrice orthogonale :

$$\begin{aligned} \text{a *) } & \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \cdot \text{b ***) } & \begin{bmatrix} a & b & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & b & a \end{bmatrix} \\ \text{c *) } & \begin{bmatrix} a & & (0) & b \\ & \ddots & & \\ (0) & & (0) & \\ b & & (0) & a \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Sol. 22) : On remarque que dans les trois cas il s'agit d'une matrice symétrique réelle, qui est donc diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

a) Posons $J_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, de sorte que $M = (a - b)I_n + bJ_n$. J_n est de rang 1.

Son noyau, c'est-à-dire l'espace propre de la valeur propre 0 est de dimension $n - 1$, c'est l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

On trouve sans trop de difficulté une base orthonormale de cet hyperplan

$e_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 0, \dots, 0)$, $\dots$,

$$e_{n-1} = \left(1/\sqrt{n^2-n}, \dots, 1/\sqrt{n^2-n}, (-n+1)/\sqrt{n^2-n}\right)$$

On complète cette base en une base orthonormale en déterminant un vecteur unitaire directeur de $(\text{Ker}(J_n))^\perp$

(les sous-espaces propres de J_n sont en somme directe orthogonale), par exemple $e_n = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$,

c'est effectivement un vecteur propre de J_n , associé à la valeur propre n

$$\text{On pose donc } P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \cdots & 1/\sqrt{n^2-n} & 1/\sqrt{n} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \cdots & 1/\sqrt{n^2-n} & 1/\sqrt{n} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/\sqrt{n^2-n} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-n+1)/\sqrt{n^2-n} & 1/\sqrt{n} \end{bmatrix}, \text{ et on a}$$

$$P^{-1}J_nP = {}^tPJ_nP = \begin{bmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 & n \end{bmatrix}$$

et donc

$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{bmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a-b & n(a-b)+b \end{bmatrix}$$

$$\text{b) On pose } J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de sorte que } M = aI_n + J_n$$

Soit $e = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e est un vecteur propre de J_n si et seulement si c'est un vecteur non nul et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \forall k \in 2, n-1, x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

Posons arbitrairement $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, ce dernier système est alors équivalent à

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0$$

On sait résoudre ce type de suite récurrente : son équation caractéristique est $r^2 - \lambda r + 1 = 0$,

examinons d'abord le cas où cette équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2 . On a alors $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$

De $x_0 = 0$ on déduit $\beta = -\alpha$, de $e \neq 0$ on déduit $\alpha \neq 0$,

et de $x_{n+1} = 0$ on déduit alors $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$, et donc $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$,

et donc qu'il existe $p \in 0, n$ tel que $\frac{r_1}{r_2} = \exp\left(\frac{2ip\pi}{n+1}\right)$.

De l'équation caractéristique on déduit que $r_1 r_2 = 1$, et donc $r_1^2 = \exp\left(\frac{2ip\pi}{n+1}\right)$

D'où $r_1 = \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)$ et $r_2 = \exp\left(-\frac{ip\pi}{n+1}\right)$ (ou l'inverse, mais ça revient au même)

On a alors pour $k \in 0, n$: $x_k = \alpha \left(\exp\left(\frac{ipk\pi}{n+1}\right) - \exp\left(-\frac{ipk\pi}{n+1}\right) \right) = 2i\alpha \sin\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right)$

Il faut alors exclure le cas $p = 0$ car on trouve alors $e = 0$.

On déduit aussi $\lambda = r_1 + r_2 = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$

Réciproquement, on vérifie aisément que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur

$$\left(\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2p\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right) \right)$$

est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre $2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$

On a trouvé n valeurs propres deux à deux distinctes (la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$), il est donc inutile d'en chercher d'autres, et nous n'envisagerons pas le cas où l'équation caractéristique a une racine double. J_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes, ses espaces propres sont des droites vectorielles, et, comme J_n est une matrice symétrique réelle, ces droites vectorielles sont en somme directe orthogonale, on a donc trouvé une base orthogonale de vecteurs propres. Il ne reste plus qu'à normaliser ces vecteurs.

Pour cela on calcule

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right) = \sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2pk\pi}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2pk\pi}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme on a pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$

$$2 \sin(\theta) \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sum_{k=0}^n [\sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta)] = \sin((2n+1)\theta) + \sin(\theta),$$

on déduit

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2pk\pi}{n+1}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)p\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)}{2\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)} = \frac{\sin\left(2p\pi - \frac{p\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)}{2\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)} = 0,$$

et enfin $\|e\|^2 = \frac{n+1}{2}$

En résumé, si, pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$e_p = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2p\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right) \right),$$

la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de J_n , e_p étant associé à la valeur propre $2\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$.

C'est-à-dire que $P = \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right) \right]_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$ est une matrice orthogonale (et symé-

trique)
et on a

$$P^{-1}J_nP = {}^tPJ_nP = PJ_nP = \begin{bmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \end{bmatrix}$$

et donc

$$P^{-1}MP = {}^tPMP = PMP = \begin{bmatrix} a + 2b\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a + 2b\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \end{bmatrix}$$

c) On pose $J_{2n} = \begin{bmatrix} (0) & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & (0) \end{bmatrix}$ de sorte que $M = aI_{2n} + bJ_{2n}$

On remarque que $J_{2n}^2 = I_{2n}$, J_{2n} est une symétrie, ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble $\{-1, 1\}$

Comme J_n est diagonalisable et n'est pas la matrice d'une homothétie, ces deux valeurs sont valeurs propres de J_n

Espace propre de la valeur propre 1

il admet pour équations : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = x_{2n-k}$, il est donc de dimension n , et on en trouve sans difficulté une base orthonormale :

$$e_1 = \left(1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}\right), e_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}, 0\right), \dots,$$

$$e_n = \left(0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0\right)$$

Espace propre de la valeur propre -1

il admet pour équations : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = -x_{2n-k}$, il est donc de dimension n , et on en trouve sans difficulté une base orthonormale :

$$e_{n+1} = \left(1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, -1/\sqrt{2}\right), e_{n+2} = \left(0, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, -1/\sqrt{2}, 0\right), \dots,$$

$$e_{2n} = \left(0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0\right)$$

Donc en posant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & \frac{1}{\sqrt{2}}J_n \\ \frac{1}{\sqrt{2}}J_n & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_n \end{bmatrix}$, P est une matrice orthogonale et on a

$$P^{-1}J_{2n}P = {}^tPJ_{2n}P = \begin{bmatrix} I_n & (0) \\ (0) & -I_n \end{bmatrix},$$

$$\text{et donc } P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{bmatrix} (a+b)I_n & (0) \\ (0) & (a-b)I_n \end{bmatrix}.$$

Ex 23

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques

Sol. 23) : on prend M diagonale à valeurs propres distinctes d'où A est diagonale,

puis avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on montre que toutes les valeurs propres de A sont égales : A est donc une homothétie.

Exercices d'approfondissement

Ex 24

Déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . Nous noterons $G(x_1, \dots, x_p)$ le *déterminant de Gram* :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det(<x_i, x_j>)_{1 \leq i, j \leq p}$$

- 1) Montrer que $G(x_1, \dots, x_p)$ est nul si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.
 2) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .
 Montrer que l'on a

$$\forall x \in E, d^2(x, F) = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}$$

Sol. 24) :

- 1) si la famille (x_i) est liée alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et une colonne de la matrice de Gram est combinaison des autres donc le déterminant est nul.

Réciproquement, si la famille (x_i) est libre alors elle forme une base. D'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe une b.o.n. (e_i) telle que

$P_{(x_i)}^{(e_i)}$ est triangulaire supérieure avec éléments diagonaux > 0 .

Etudions plutôt $M = \left(P_{(x_i)}^{(e_i)}\right)^{-1} = P_{(e_i)}^{(x_i)} = (< x_j, e_i >)_{1 \leq i, j \leq p} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$. On remarque comme dans le cours que $G = (< x_i, x_j >)_{1 \leq i, j \leq p} = {}^t M M$

Finalement $\det G = (\det M)^2 > 0$, en particulier non nul.

Ainsi (et dans tous les cas), $\det G = ([x_1, \dots, x_n])^2$ ($[\dots]$ = produit mixte)

- 2) $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$ mais

$$\begin{aligned} G(e_1, \dots, e_p, x) &\stackrel{\text{d'après a)}}{=} G(e_1, \dots, e_p, x - p_F(x)) \\ &= \begin{vmatrix} < e_i, e_j >_{1 \leq i, j \leq p} & 0 \\ 0 & \|x - p_F(x)\|^2 \end{vmatrix} = \|x - p_F(x)\|^2 \times G(e_1, \dots, e_p) \end{aligned}$$

Ex 25 ✎

Soit u un endomorphisme symétrique tel que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$ (endomorphisme symétrique défini positif) d'un espace euclidien E . Calculer

$$\min_{\|x\|=1} < u(x), x > < u^{-1}(x), x >$$

Sol. 25) : Soit (e_k) un b.o.n. de diagonalisation de u (valeurs propres associées (λ_k)). On a

$$\text{si } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ alors } u(x) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k e_k \text{ donc } < u(x), x > = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k^2$$

u est défini positif, c'est-à-dire que $\forall k \lambda_k > 0$, en particulier u est inversible et $u^{-1}(e_k) = \frac{1}{\lambda_k} e_k$

$$\text{Donc } < u^{-1}(x), x > = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} x_k^2.$$

Ecrivons pour $\|x\| = 1$,

$$< u(x), x > < u^{-1}(x), x > = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} x_i^2 \right) \underset{\text{C-Schwarz}}{\geq} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{\lambda_k^{-1}} x_k \right) \left(\sqrt{\lambda_k} x_k \right) \right)^2 =$$

Le minorant 1 étant "trivialement" atteint pour x égal à l'un des e_k , on conclut

$$\min_{\|x\|=1} < u(x), x > < u^{-1}(x), x > = 1$$

Ex 26 ✎

Racine carrée d'une matrice symétrique positive, décomposition OS

On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S X \geq 0$.
 On dit qu'elle est définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X S X > 0$.

- 1) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que S est positive [resp. définie positive] si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives [resp. strictement positives].
- 2) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positive. Montrer qu'il existe une unique matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
- 3) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^t M M$ est symétrique définie positive.
 En déduire qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice symétrique positive S telles que $M = OS$.

Sol. 26) : 1) Supposons S positive, soit X un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ

on a alors ${}^t X S X = {}^t X \lambda X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$.

Supposons S strictement positive, soit X un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ .

on a alors ${}^t X S X = {}^t X \lambda X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2 > 0$, d'où $\lambda > 0$, puisque X étant un vecteur propre est un vecteur non nul.

Supposons que toutes les valeurs propres de S soient ≥ 0 , notons $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positives.

Soit $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$, décomposé selon la base orthonormée de vecteurs propres, on a alors

$${}^t X S X = (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n | \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n X_n) = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n \geq 0$$

Supposons que toutes les valeurs propres de S soient > 0 , notons $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positives

Soit $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n \neq 0$, décomposé selon la base orthonormée de vecteurs propres, on a alors

$${}^t X S X = (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n | \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n X_n) = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n > 0,$$

puisque les λ_i sont strictement positives, et que l'un au moins des α_i est non nul.

2) *Unicité* Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice S dans la base canonique, et v un endomorphisme symétrique positif tel que $v^2 = u$.

Alors u et v commutent, donc les espaces propres de u sont v -stables

Soit $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale d'espaces propres, F_k étant associé à la valeur propre λ_k .

On a alors v_{F_k} est un endomorphisme symétrique positif (immédiat), donc est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres

Dans cette base on a $\text{mat}_{\mathcal{B}_k}(v_{F_k}) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{n_k})$, avec $\mu_i \geq 0$, et $\mu_i^2 = \lambda_k$, d'où $\mu_i = \sqrt{\lambda_k}$

et ce pour tout $i \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$, ce qui montre que v_{F_k} est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_k}$, ce qui montre l'unicité des v_{F_k} et par suite celle de v .

Existence cet endomorphisme v convient.

3) On a pour tout X non nul, ${}^t X {}^t M M X = \|MX\|^2 > 0$ puisque M est inversible.

Unicité Si $M = OS$, alors ${}^t M M = {}^t S {}^t O O S = {}^t S S = S^2$ (${}^t O O = I_n$ et ${}^t S = S$), ce qui montre l'unicité de S .

Comme $M = OS$ est inversible, S l'est aussi, d'où l'unicité de $O = M S^{-1}$.

Existence ${}^t M M$ étant symétrique positive admet une « racine carrée » symétrique positive d'après le 2), notons-la S , comme M est inversible, ${}^t M M$ l'est aussi, et comme ${}^t M M = S^2$, S est aussi inversible.

Notons alors $O = M S^{-1}$. On a ${}^t O O = {}^t S^{-1} {}^t M M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$, ce qui montre que $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et le résultat.

Ex 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$${}^t A = A^{-1} + I_n.$$

- 1) Montrer que ${}^t A A$ est diagonalisable.
- 2) En déduire que A est diagonalisable.
- 3) Déterminer un polynôme annulateur de A (un polynôme P tel que $P(A) = 0$).
- 4) On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A .

Sol. 27) :

- 1) ${}^t A A$ est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable.
- 2) On a ${}^t A A - I_n = A$ donc A est diagonalisable mais, mieux, elle est aussi symétrique réelle.
- 3) On a donc $A = A^{-1} + I_n$ d'où

$$A^2 - A - I_n = 0.$$

- 4) Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$$\text{Donc } \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

Conclusion : comme $\text{Sp}(A)$ n'est pas un singleton,

$$\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \right\}.$$

Ex 28

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . On note λ et μ la plus petite et la plus grande valeur propre en valeur absolue de u .

Montrer que $\forall x \in E \quad |\lambda| \|x\| \leq \|u(x)\| \leq |\mu| \|x\|$.

Sol. 28) : u diagonalise dans une b.o.n. (e_k) .

$$\text{Soit } x \in E, x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \cdot e_k$$

$$\langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot x_i^2 \text{ donc}$$

$$\min(\lambda_i^2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \leq \|u(x)\|^2 \leq \max(\lambda_i^2) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

$$\text{donc } \lambda \|x\| \leq \|u(x)\| \leq \mu \|x\|.$$

Ex 29

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique réelle d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

$$\text{Sol. 29) : } \text{tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

Ex 30

Soient A et B sont deux matrices symétriques (réelles), est-il vrai que

$$\text{Sp}(A + B) \subset [\min \text{Sp } A + \min \text{Sp } B, \max \text{Sp } A + \max \text{Sp } B] ?$$

INDICATION : montrer que $\sup_{\|X\|=1} {}^tXSX = \max \text{Sp}(S)$ et $\inf_{\|X\|=1} {}^tXSX = \min \text{Sp}(S)$ pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Sol. 30) : Vrai car pour X de norme 1, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \in [\min \text{Sp } A + \min \text{Sp } B, \max \text{Sp } A + \max \text{Sp } B]$ et on sait que $\text{Sp}(A + B) \subset \{{}^tX(A + B)X, \|X\| = 1\}$, donc c'est bon !

Ex 31

 **Un classique**

On appelle **rayon spectral** d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ le réel positif $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{sp}(M)} |\lambda|$

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^n$ et muni de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$

Montrer : $\sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} = \sqrt{\rho({}^tMM)}$

Sol. 31) : Il est immédiat que tMM est une matrice symétrique, notons donc $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de tMM , c'est-à-dire : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, {}^tMMX_k = \lambda_k X_k$ où $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

D'une part on a : $\|MX_k\|^2 = {}^t(MX_k)MX_k = {}^tX_k {}^tMMX_k = {}^tX_k(\lambda_k X_k) = \lambda_k \|X_k\|^2 = \lambda_k$ ce qui montre que λ_k est un réel positif, et donc que $\rho({}^tMM)$ est la plus grande de ces valeurs propres.

D'autre part on a pour tout $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \|MX\|^2 &= {}^tX {}^tMMX = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k X_k \right| \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^2 \leq \rho({}^tMM) \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \rho({}^tMM) \|X\|^2 \end{aligned}$$

Enfin on a si X est un vecteur propre de la valeur propre $\rho({}^tMM)$:

$$\|MX\|^2 = (X | \rho({}^tMM) X) = \rho({}^tMM) \|X\|^2$$

On a montré : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|MX\|}{\|X\|} \leq \sqrt{\rho({}^tMM)}$ et

$$\exists X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|MX\|}{\|X\|} = \sqrt{\rho({}^tMM)},$$

d'où :

$$\sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} = \sqrt{\rho({}^tMM)}.$$

Ex 32

Décomposition QR (= OT)

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que $M = OT$.

Sol. 32) : Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_O$ [resp. $\mathcal{B}_M$] la base des vecteurs colonnes de O [resp. de M]

On a alors en notant $T = O^{-1}M$, et donc $T = \text{mat}_{\mathcal{B}_O}(\mathcal{B}_M)$.

Le problème revient donc à chercher, étant donnée une base $\mathcal{B}_M = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormale $\mathcal{B}_O = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}_O}(\mathcal{B}_M)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls

c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ et ces coefficients diagonaux sont positifs, c'est-à-dire que la k -ième coordonnée de e_k dans la base $\mathcal{B}_O = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est positive, c'est-à-dire : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\varepsilon_k | e_k) \geq 0$

On sait que ce problème admet une solution unique : c'est le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Ex 33 CENTRALE 2015

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f(x)^2 e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On munit $\mathcal{E}$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit L_n la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

- 1) Justifier que $\mathcal{E}$ contient les fonctions polynomiales et que L_n est une fonction polynomiale de degré n dont on indiquera le coefficient dominant et le terme constant.

- 2) Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$.
 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}. \text{ Déterminer } a_n$$

- 4) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto e^{-ax}$. À quelle condition a-t-on $f_a \in \mathcal{E}$? Cette condition étant supposée réalisée, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_a, L_n \rangle^2 - \langle f_a, f_a \rangle.$$

Que peut-on en conclure ?

Sol. 33) : 1) Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 P(x)^2 e^{-x} = 0$, donc $x \mapsto P^2(x) e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} n(n-1) \cdots (k+1) x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!} x^k.$$

On en déduit que L_n est une fonction polynomiale de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n/n!$ et de terme constant égal à 1.

- 2) On remarque que pour $p \leq n$, $\langle L_n, X^p \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^p \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) dx$.

Posons pour k et j entiers naturels tels que $j \leq k \leq n$, $I_{kj} = \int_0^{+\infty} x^j \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^n) dx$.

En intégrant par parties, on obtient $I_{kj} = \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (e^{-x} x^n) x^j \right]_0^{+\infty} - j I_{k-1, j-1}$.

Le crochet a pour limite 0 en $+\infty$ et est nul en 0 car il reste une puissance de x quand on dérive $k-1$ fois $e^{-x} x^n$.

On en déduit que $I_{k,j} = -j I_{k-1, j-1}$, donc par récurrence,

$$I_{n,p} = (-1)^p p! I_{n-p,0} = (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}} (e^{-x} x^n) dx.$$

Si $p < n$, alors $I_{n,p} = 0$ car la dérivée $(n-p-1)^{\text{ème}}$ de $e^{-x} x^n$ s'annule en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

Si $p = n$, alors $I_{n,n} = (-1)^n n! J_n$, où $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$.

En intégrant par parties, on obtient $J_n = [-e^{-x} x^n]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n J_{n-1}$.

On en déduit par récurrence $J_n = n! J_0 = n!$, d'où $I_{n,n} = (-1)^n (n!)^2$.

Cela entraîne que pour tout $p < n$, $\langle L_n | X^p \rangle = 0$, donc par linéarité, L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc en particulier à L_p pour tout $p < n$.

Comme le coefficient dominant de L_n est $\frac{(-1)^n}{n!}$, on a $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \langle L_n, X^n \rangle = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} I_{n,n} = 1$.

On a bien montré que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$.

- 3) Comme XL_n est de degré $n+1$ et que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$,

$$\text{on a } XL_n = \sum_{k=0}^{n+1} \langle XL_n, L_k \rangle L_k.$$

On remarque que $\langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle$, donc si $k \leq n-2$, alors $XL_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'où $\langle XL_n, L_k \rangle = 0$.

En remplaçant, on obtient $XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}$ avec $a_n = \langle XL_n, L_{n+1} \rangle$, $b_n = \langle XL_n, L_n \rangle$ et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1} \rangle$.

Comme le coefficient dominant de L_n est égal à $(-1)^n/n!$, le polynôme $n!XL_n + (n+1)!L_{n+1}$ est de degré inférieur ou égal à n , donc son produit scalaire par L_{n+1} est nul, d'où $n!a_n + (n+1)! = 0$, d'où $a_n = -(n+1)$.

- 4) La fonction f_a appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $x \mapsto e^{-(2a+1)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $a > -1/2$.

On a d'une part $\langle f_a, f_a \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-(2a+1)x} dx = \frac{1}{2a+1}$ et d'autre part

$$\begin{aligned} n! \langle f_a, L_n \rangle &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \\ &= \left[e^{-ax} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx \end{aligned}$$

en intégrant par parties. Le premier crochet est nul. En poursuivant les intégrations par parties, de la même façon qu'à la question 2), on obtient

$$n! \langle f_a, L_n \rangle = a^n \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^n e^{-x} dx$$

Après le changement de variables $t = (a+1)x$, on aboutit à $\frac{a^n}{(a+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Cette dernière intégrale a été calculée plus haut et vaut $n!$, d'où $\langle f_a, L_n \rangle = \frac{a^n}{(a+1)^{n+1}}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_a, L_n \rangle^2 - \langle f_a, f_a \rangle &= \frac{1}{(a+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^{2n} - \frac{1}{2a+1} \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{(a+1)^2}} - \frac{1}{2a+1} = 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $d(f_a, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, autrement dit f_a appartient à l'adhérence de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{E}$ muni de la norme préhilbertienne étudiée.