Algèbre bilinéaire

Exercices d'application

Ex 1 Montrer que $\varphi : (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \mathrm{P}(x) \cdot \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Ex 2 Soit $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Ex 3 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère $v = (0, 3, 1, -1)$ et $w = (1, 2, -1, 1)$. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v, w)$
Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{F}^{\perp}$

Ex 4

1) Montrer que l'application $\varphi : (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2) Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.

Ex 5 Montrer que $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB})$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1) La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormale vis-à-vis de ce produit scalaire ?
2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4) Déterminer $d(\mathrm{M}, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Ex 6 Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{U}{}^t\mathrm{U}$.
Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercices d'entraînement

Ex 7 ✍

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$. Montrer que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour le produit scalaire défini par $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x) \cdot \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$, et calculer $\|\mathrm{P}_n\|$.

Ex 8 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de E.

1) Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, est $\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U}$, où U est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ relativement à $\mathcal{B}$.
2) En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Ex 9 Soit A et B deux matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer : $\sqrt{\mathrm{tr}\left[(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2\right]} \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)} + \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{B}^2)}$, et : $(\mathrm{tr}(\mathrm{AB}))^2 \leqslant \mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^2\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{B}^2\right)$.
Cas d'égalités ?

Ex 10 ✍
Classique.
Calculer $m = \displaystyle\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$.

Indication : On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$ et on pourra considérer l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On doit trouver $m = 36$.

Ex 11 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Ex 12 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, avec le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$, soit

$$f : P \longmapsto 2XP' + \left(X^2 - 1\right) P''.$$

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner ses éléments propres quand $n = 3$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n, tel qu'il existe un entier naturel k vérifiant $f^k = \mathrm{id}$. Montrer alors que f est une symétrie orthogonale.

Ex 14 Soit $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Ex 15 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que ${}^t\!AA = 0$ si et seulement si $A = 0$.

2) Montrer que $A\,{}^t\!AA = A$ implique $({}^t\!AA)^2 = {}^t\!AA$. Montrer la réciproque, en simplifiant ${}^t\!BB$ où $B = A\,{}^t\!AA - A$.

Ex 16 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = A\,{}^t\!A - {}^t\!A\,A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Ex 17 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Ex 18 ✍
Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, calculer :

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Ex 19 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive, et non nulle.
Montrer que la matrice $M = \left(\int_a^b t^{i+j} f(t)\,dt\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive, c'est-à-dire : pour tout $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ${}^t\!XMX > 0$.

Ex 20 ✍
Soit E un espace euclidien. Soit v un endomorphisme symétrique positif de E c'est-à-dire tel que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ (en plus d'être symétrique).

1) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif w tel que $w^2 = v$.

2) Soit λ un réel positif et h un endomorphisme symétrique positif de E. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(h - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\,(h^2 - \lambda^2\,\mathrm{id}_E)$.

3) En déduire que w est unique.

Ex 21 ✍
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices symétriques réelles commutant deux à deux

1) Montrer qu'elles sont diagonalisables au moyen de la même matrice orthogonale. (Etudier successivement les cas : $I = \{1, 2\}$, $I = [\![1, n]\!]$, I quelconque)

2) Montrer qu'il existe B , matrice symétrique réelle, telle que $\forall i \in I, A_i \in \mathbb{R}[B]$

Ex 22 ✍
Diagonaliser les matrices réelles suivantes au moyen d'une matrice orthogonale :

a *) $\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$. b ***) $\begin{bmatrix} a & b & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & b & a \end{bmatrix}$.

c *) $\begin{bmatrix} a & & (0) & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ (0) & & & & (0) \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & (0) & & a \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$

Ex 23 ✍
Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques

Exercices d'approfondissement

Ex 24 ✍
Déterminant de Gram
Soit E un espace préhilbertien et $(x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E. Nous noterons $G(x_1, ..., x_p)$ le *déterminant de Gram* :

$$G(x_1, ..., x_p) = \det\left(< x_i, x_j >\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$$

1) Montrer que $G(x_1, ..., x_p)$ est nul si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est liée.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $(e_1, ..., e_p)$ une base de F. Montrer que l'on a

$$\forall x \in E,\ d^2(x, F) = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, ..., e_p)}$$

Ex 25 ✍

Soit u un endomorphisme symétrique tel que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$ (endomorphisme symétrique défini positif) d'un espace euclidien E. Calculer

$$\min_{\|x\|=1} < u(x), x >< u^{-1}(x), x >$$

Ex 26 ✍

Racine carrée d'une matrice symétrique positive, décomposition OS

On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geqslant 0$

On dit qu'elle est définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0$.

1) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que S est positive [resp. définie positive] si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives [resp. strictement positives].

2) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positive. Montrer qu'il existe une unique matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tMM$ est symétrique définie positive

En déduire qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice symétrique positive S telles que $M = OS$.

Ex 27 ✍

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$${}^tA = A^{-1} + I_n.$$

1) Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable.

2) En déduire que A est diagonalisable.

3) Déterminer un polynôme annulateur de A (un polynôme P tel que $P(A) = 0$).

4) On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A.

Ex 28 ✍

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On note λ et μ la plus petite et la plus grande valeur propre en valeur absolue de u.

Montrer que $\forall x \in E \quad |\lambda| \|x\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant |\mu| \|x\|$.

Ex 29 ✍

Soit $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Ex 30 ✍

Soient A et B sont deux matrices symétriques (réelles), est-il vrai que

$$\mathrm{Sp}(A + B) \subset [\min \mathrm{Sp}\, A + \min \mathrm{Sp}\, B, \max \mathrm{Sp}\, A + \max \mathrm{Sp}\, B]\ ?$$

Indication : montrer que $\displaystyle\sup_{\|X\|=1} {}^tXSX = \max \mathrm{Sp}(S)$ et $\displaystyle\inf_{\|X\|=1} {}^tXSX = \min \mathrm{Sp}(S)$ pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Ex 31 ✍

☕ **Un classique**

On appelle **rayon spectral** d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ le réel positif $\rho(M) = \displaystyle\max_{\lambda \in sp(M)} |\lambda|$

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^n$ et muni de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$

Montrer : $\displaystyle\sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} = \sqrt{\rho({}^tMM)}$

Ex 32 ✍

Décomposition $QR (= OT)$

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que $M = OT$.

Ex 33 ☕ Centrale 2015

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f(x)^2 e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On munit $\mathcal{E}$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2,\ \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\, dx$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit L_n la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

1) Justifier que $\mathcal{E}$ contient les fonctions polynomiales et que L_n est une fonction polynomiale de degré n dont on indiquera le coefficient dominant et le terme constant.

2) Montrer que $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{E}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\mathrm{XL}_n = a_n\mathrm{L}_{n+1} + b_n\mathrm{L}_n + c_n\mathrm{L}_{n-1}. \text{ Déterminer } a_n$$

4) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto e^{-ax}$. À quelle condition a-t-on $f_a \in \mathcal{E}$? Cette condition étant supposée réalisée, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_a, \mathrm{L}_n\rangle^2 - \langle f_a, f_a\rangle.$$

Que peut-on en conclure ?