

## VARIABLES ALÉATOIRES

## Exercices d'application

**Ex 1 Étude d'une loi conjointe**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont la loi est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e \cdot 2^{i+1} \cdot j!}$$

- 1) Déterminer les lois (marginales) de  $X$  et de  $Y$ .
- 2) a) Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire l'espérance de  $X$ .  
b) Déterminer l'espérance de  $Y$ .
- 3) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 4) Calculer  $\mathbb{P}(X = Y)$ .

**Sol. 1) :** 1) •  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .

La série  $\sum \frac{1}{j!}$  converge, donc la série  $\sum \mathbb{P}(X = i, Y = j)$  converge pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

$$\text{De plus, } \forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e \cdot 2^{i+1} j!} = \frac{1}{e \cdot 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} =$$

$$\frac{1}{2^{i+1}} \text{ (série exp)}$$

•  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ .

La série  $\sum \frac{1}{2^{i+1}}$  converge, donc la série  $\sum \mathbb{P}(X = i, Y = j)$  converge pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

$$\text{De plus, } \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e \cdot j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{e \cdot j!}$$

$$\text{(série géométrique } \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1)$$

- 2) a) On pose  $Z = 1 + X$ ;  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ , donc  $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(1 + X = n) = \mathbb{P}(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2},$$

on reconnaît que  $Z = 1 + X$  suit la **loi géométrique de paramètre  $p = \frac{1}{2}$** .

Par le cours,  $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = 2$  (et  $V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2$ )

Donc  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z - 1) = \mathbb{E}(Z) - 1 = 1$  (et  $V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2$ )

- b) On reconnaît que  $Y$  suit une **loi de Poisson de paramètre 1**, donc  $\mathbb{E}(Y) = 1$  (=  $V(Y)$ )

$$3) \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}} \frac{1}{e j!} = \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j)$$

donc  **$X$  et  $Y$  sont indépendantes**

$$4) \{X = Y\} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{X = i, Y = i\} \text{ réunion disjointe, donc}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e \cdot 2^{i+1} \cdot i!} \\ &= \frac{1}{2e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!} = \frac{1}{2e} e^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

**Ex 2** X 2017 RMS

Soit  $X$  une variable aléatoire strictement positive. Montrer que  $\mathbb{E}(X + 1/X) \geq 2$ .

**Sol. 2) :** On a  $\sqrt{X} \times \frac{1}{\sqrt{X}} \leq \frac{1}{2} \left(X + \frac{1}{X}\right)$  donc  $X + \frac{1}{X} \geq 2$  puis on passe à l'espérance.

**Ex 3** MINES 2017 RMS

On suppose que  $X \sim \mathcal{G}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ . Calculer  $\mathbb{E}(1/X)$ .

$$\text{Sol. 3) : } \mathbb{E}(1/X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (1-p)^{n-1} p = \frac{p \ln p}{1-p}$$

$$\text{Car } \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ pour } |x| < 1.$$

**Ex 4** X 2017 RMS

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi. Montrer que  $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$ .

**Sol. 4) :** Si les espérances sont finies, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}(\sqrt{XZ})^2 \leq \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Z) \text{ avec } Z = \frac{1}{Y}.$$

Il vient  $1^2 = \mathbb{E}\left(\sqrt{X} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}}\right) \leq \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \stackrel{\text{même loi}}{=} \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$  par indépendance.

Si par exemple  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ .

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^n p_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Comme  $\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i}{x_j} p_i \cdot p_j$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i}{x_j} p_i \cdot p_j = \mathbb{E}(X/Y)$

(ou bien diverge vers  $+\infty$  et dans ce cas  $\frac{X}{Y}$  n'a pas d'espérance),  $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$ .

**Ex 5** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes possédant une variance.

Déterminer un couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  qui minimise  $\mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$  (on cherche la meilleure approximation affine de  $Y$  par  $X$ ).

Que vaut pour un tel couple  $\frac{V(aX + b)}{V(Y)}$  ?

**Sol. 5) :**  $\varphi(a, b) = \mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ .

On sait que  $\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, b) = 0$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial b}(a, b) = 0$ .

À  $a$  fixé,  $b \mapsto \varphi(\cdot, b)$  un polynôme de degré 2 convexe donc  $b$  dépendant de  $a$  vérifiant

$\frac{\partial \varphi}{\partial b}(a, b) = 0$  minimise  $\varphi(a, b)$  à  $a$  fixé.

$\frac{\partial \varphi}{\partial b}(a, b) = 0$  donne

$$\mathbb{E}(-(Y - (aX + b))) = 0 \text{ donc } \boxed{b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)}.$$

En posant  $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}(Y)$  et  $\tilde{X} = X - \mathbb{E}(X)$ , il vient

$$\psi(a) = \mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right) = \mathbb{E}\left((\tilde{Y} - a\tilde{X})^2\right).$$

On a encore un polynôme de degré 2 convexe, qui est minimale en  $\psi'(a) = -\mathbb{E}\left(\tilde{X}(\tilde{Y} - a\tilde{X})\right) = 0$

donc  $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$ .

Puis

$$\begin{aligned} \frac{V(aX + b)}{V(Y)} &= \frac{a^2 V(X)}{V(Y)} = \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{V(X)V(Y)} \\ &= (\text{cor}(X, Y))^2. \end{aligned}$$

**Ex 6** MINES 2017 RMS

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ . Trouver la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $X + Y = n$ .

**Sol. 6) :** On sait que  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$   
Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k \wedge Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda-\mu} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

C'est la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$ .

**Ex 7** Une secrétaire effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de  $X$ . Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Y = k | X = i)$ .  
 b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.  
 c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Sol. 7) :** 1)  $X$  est le nombre de succès à des expériences indépendantes qui ont toutes la même probabilité de succès : on reconnaît que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- 2) a) Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{P}(Y = k | X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n - i \\ \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

- b)  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = j) &= \mathbb{P}(X + Y = j) = \sum_{i=0}^j \mathbb{P}(X = i, Y = j - i) \\ &= \sum_{i=0}^j \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j - i | X = i) \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{n-i-(j-i)} \\ &= \sum_{i=0}^j \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} p^j (1-p)^{2n-i-j} \\ &= \frac{n! p^j (1-p)^{2n-j}}{(n-j)! j!} \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i!(j-i)!} (1-p)^{-i} \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \left( \frac{1}{1-p} \right)^i \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-j} \left( \frac{1}{1-p} + 1 \right)^j \\ &= \binom{n}{j} p^j (2-p)^j (1-p)^{2n-2j} \\ &= \binom{n}{j} [p(2-p)]^j [(1-p)^2]^{n-j} \end{aligned}$$

et on remarque que  $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$ , donc  $Z$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p(2-p))$ .

- c) Par le cours,  $\mathbb{E}(Z) = np(2-p)$  et  $VZ) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(1-p)^2$

**Ex 8** MINES 2017 RMS

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(n, 1/2)$ . Déterminer la probabilité pour que la matrice  $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**Sol. 8) :**  $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$  est diagonalisable ssi  $X \neq Y$ .

La probabilité vaut donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \neq Y) &= 1 - \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}(X = k))^2 = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{1}{4^n} \\ &= 1 - \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \text{coeff en } X^n \text{ de } (1+X)^n (1+X)^n \text{ donc } \binom{2n}{n}.$$

$$\text{CONCLUSION } \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

**Ex 9** MINES 2017 G. Hovan

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre  $p$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ X & 2\sqrt{Y} \end{pmatrix}$ . Déterminer la probabilité pour que  $A$  soit diagonalisable (dans  $\mathbb{R}$ ).

**Sol. 9) :** Déjà  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 2\sqrt{y} \end{pmatrix}$  avec  $y \geq 0$  est diagonalisable ssi  $y > x$ .

En effet,  $\chi_A = X^2 - 2\sqrt{y}X + x$ .  $\Delta = 4(y - x)$ .

Il faut  $\Delta \geq 0$ . Et si  $\Delta = 0$ , alors  $A$  devrait être une homothétie pour être diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

On doit donc calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k \wedge X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k) \cdot \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k \cdot (1-p)^{k-1} p \\ &= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}\end{aligned}$$

**Ex 10** CCP 2018 Y. Aiouch

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre  $p_1$  et  $p_2$ . On pose  $Z = \min(X, Y)$ .

- 1) Soit  $n \geq 1$ , exprimer  $\mathbb{P}(X \geq n)$ .
- 2) Soit  $n \geq 1$ , exprimer  $\mathbb{P}(Z \geq n)$ .
- 3) Déterminer la loi de  $Z$ .

**Sol. 10) :**

- 1)  $\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p_1)^{k-1} p_1 = (1-p_1)^{n-1}$ .
- 2)  $\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n, Y \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n) \cdot \mathbb{P}(Y \geq n) = (1-p_1)^{n-1} (1-p_2)^{n-1} = q^{n-1}$  avec  $q = (1-p_1)(1-p_2)$ .
- 3) Déjà,  $Z$  prend ses valeurs (presque sûrement) dans  $\mathbb{N}^*$ .  
Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geq n) - \mathbb{P}(Z \geq n+1) = q^{n-1}(1-q)$ .  
On a donc  $Z \sim \mathcal{G}(1-q)$  avec  $1-q = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ .

## Exercices d'entraînement

**Ex 11** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  une infinité de variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes de même loi,  $N$  une variable aléatoire sur le même espace, à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , et  $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , où les  $X_n$  et  $N$  sont mutuellement indépendantes.

On suppose que  $X_1$  et  $N$  ont une espérance et une variance finies. Montrer qu'il en est de même de  $S_N$  et calculer l'espérance de  $S_N$  en fonction de celles de  $X_1$  et  $N$ . (on prendra quelques libertés sur les sommes doubles)  
Calculer la variance de  $S_N$  en fonction de l'espérance et la variance de  $X_1$  et l'espérance et la variance de  $N$ .

**Remarque** on pourra aller beaucoup plus en connaissant les séries génératrices.

**Sol. 11) :**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(S_k = n, N = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(S_k = n) \cdot \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \times \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(S_k = n) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \times (\mathbb{E}(S_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \times (k \cdot \mathbb{E}(X_1)) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N).\end{aligned}$$

Plus long, on trouve  $V(S_N) = V(X_1) \cdot \mathbb{E}(N) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \cdot V(N)$

**Ex 12** MINES 2018 A. Bakkoury

On dispose de  $T_1, \dots, T_n$  tiroirs et  $B_1, \dots, B_p$  boules.

On place les boules dans les tiroirs.

On désigne par  $X_k$  le nombre de boules dans le tiroir  $T_k$  et par  $Y$  le nombre de tiroirs vides.

- 1) Donner la loi de  $X_k$ .
- 2) Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont-elles mutuellement indépendantes ?
- 3) Déterminer l'espérance de  $Y$ .

**Sol. 12) :**

- 1) Toutes les v.a.  $X_k$  ont même loi (mais ne sont pas mutuellement indépendantes). On a  $X_k \sim \mathcal{B}\left(p, \frac{1}{n}\right)$ .

(succès = un boule avec proba  $\frac{1}{n}$  de la mettre dans le tiroir  $k$ ).

2) Non, par exemple  $\mathbb{P}(X_1 = p \text{ et } X_2 = p) = 0$ .

$$\text{Or } \mathbb{P}(X_1 = p)\mathbb{P}(X_2 = p) = \mathbb{P}(X_1 = p)^2 = \left(\frac{1}{n^p}\right)^2 \neq 0.$$

$$3) Y = \sum_{k=1}^n 1_{X_k=0} \text{ or } 1_{X_k=0} \sim \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right).$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}Y = n\mathbb{E}(1_{X_1=0}) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

**Ex 13** PETITES MINES 2017 R. Tran

On effectue un tirage avec remise dans une urne contenant en proportion  $p \in ]0, 1[$  boules noires et  $q = 1 - p$  boules blanches.

On note

$N_k$  tirage d'une boule noire au  $k^e$  tirage,

$B_k$  tirage d'une boule blanche au  $k^e$  tirage,

$X$  la longueur de la première série de boules de la même couleur

$Y \dots$  deuxième série  $\dots$

Par exemple  $X = 1$  et  $Y = 2$  pour  $N_1, B_2, B_3, N_4$  ou bien pour  $B_1, N_2, N_3, B_4$ .

1) Donner la loi conjointe de  $(X, Y)$ .

2) Donner la loi de  $X$  et l'espérance de  $X$ . Montrer que  $\mathbb{E}X \geq 2$ .

3) Donner l'espérance de  $Y$ .

**Sol. 13) :**

1) Pour  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ ,  $\mathbb{P}((X, Y) = (a, b)) = p^a q^b p + q^a p^b q$

$$2) \mathbb{P}(X = a) = \sum_{b=1}^{+\infty} (p^a q^b p + q^a p^b q) = p^a q + q^a p = pq (p^{a-1} + q^{a-1}).$$

On a bien

$$\sum_{a=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = a) = pq \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 1$$

Pour l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{a=1}^{+\infty} pq (ap^{a-1} + aq^{a-1}) \\ &= pq \left( \frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2} \right) \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{\frac{q}{p}} = 2 \end{aligned}$$

$$3) \mathbb{P}(Y = b) = \sum_{a=1}^{+\infty} (p^a q^b p + q^a p^b q) = p^2 q^{b-1} + q^2 p^{b-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{b=1}^{+\infty} (p^2 b q^{b-1} + q^2 b p^{b-1}) \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Un peu de PYTHON pour tester ?

```
from numpy.random import binomial

# L = binomial(1, p, N) # pour un array
def renvoi(p):

    deb = binomial(1, p) # couleur de départ
    X = 1
    while deb == binomial(1, p):
        X += 1

    Y = 1
    deb = 1 - deb # autre couleur
    while deb == binomial(1, p):
        Y += 1

    return X, Y

p = 0.25

nb = 50000
espX, espY = 0, 0

for i in range(nb):
    X, Y = renvoi(p)
    espX += X
    espY += Y

espX = espX / nb
espY = espY / nb

print("Espérance théorique de X {:.4} / statistique {:.4}".format\
      (p/(1-p)+(1-p)/p, espX))
print("Espérance théorique de Y {:.4} / statistique {:.4}".format(2., espY))
```

**Ex 14** MINES 2017 E. Baguet

Soit  $T$  le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention du premier motif pile-face (PF) lors de lancers d'une pièce équilibrée.  
Donner la loi de  $T$  et son espérance.

**Sol. 14) :** On a FFFFPPPPPPPF avec  $a$  F puis  $b$  P puis PF

Donc pour  $k \geq 2$ ,  $\mathbb{P}(T = k) = \sum_{a+b=k-2} \frac{1}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$ .

Remarque  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1$  donc presque sûrement on obtient PF (la proba que  $T = +\infty$  est nulle).

On a  $\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)x^k = \frac{x^2}{(x-1)^2}$  et  $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^k = 2\frac{x^2}{(1-x)^3}$  pour  $|x| < 1$ .

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \boxed{4}$$

**Ex 15** MINES 2018 G. His

On considère 6 dés identiques à 6 faces

On jette simultanément les 6 dés et on enlève les dés avec lesquels on a obtenu des 6. Puis on recommence avec les dés restants jusqu'à n'obtenir que des 6.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre total de lancers pour n'obtenir que des 6.

- 1) Trouver la loi de  $X$ . On pourra d'abord calculer  $\mathbb{P}(X \leq k)$ .
- 2)  $X$  a-t-elle une espérance, une variance ?

**Sol. 15) :**

- 1) Soit  $k \geq 1$ .

On imagine relancer tous les dés (même si on a obtenu des 6).

$$\mathbb{P}(X \leq k) = (\mathbb{P}(\text{au moins un 6 sur } k \text{ lancers d'un dé}))^6$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq k) &= (\mathbb{P}(\text{au moins un 6 sur } k \text{ lancers d'un dé}))^6 \\ &= (1 - \mathbb{P}(\text{pas de 6 sur } k \text{ lancers d'un dé}))^6 \\ &= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^6. \end{aligned}$$

Il vient

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^6 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)^6$$

.

Remarque on a bien  $X$  fini presque sûrement car  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$

- 2) Posons  $q = \frac{5}{6} \in ]0, 1[$ .

On a  $p_k = (1 - q^k)^6 - (1 - q^{k-1})^6$ .

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k \text{ converge car}$$

$$k \cdot p_k = k \cdot 6 \left( q^{k-1}(1-q) + o_{k \rightarrow +\infty}(q^{k-1}) \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 6(1-q) \cdot k q^{k-1}$$

De même  $X$  a une variance car  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$  puisque

$$k^2 \cdot p_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 6(1-q) \cdot k^2 q^{k-1}.$$

**Ex 16** CENTRALE 2017 B. Dhote RMS

Une urne contient  $2n$  boules. La moitié des boules porte le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à  $n$ . On tire simultanément une poignée de  $n$  boules. Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on définit la variable aléatoire  $X_i$  telle que  $X_i = 1$  si la boule numéro  $i$  est dans la poignée,  $X_i = 0$  sinon.

- 1) Déterminer la loi de  $X_i$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- 2) Déterminer la covariance  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  pour  $0 \leq i < j \leq n$ .
- 3) Soit  $S$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules de la poignée. Calculer  $\mathbb{E}(S)$  et  $\text{V}(S)$ .

**Sol. 16) :**

- 1)  $X_0 \sim \mathcal{B}(p)$  avec  $p = 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}}$  ( $X = 0$  un seul cas favorable)

$$\text{Pour } i \geq 1, X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2}.$$

$$2) \text{ Pour } i \geq 1 \text{ et } j \geq 1, \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(X_i = X_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

$$\mathbb{E}((1 - X_0)X_i) = \mathbb{P}(X_0 = 0 \wedge X_i = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X_0 X_i) = \mathbb{E}X_i - \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

$$\text{Pour } i \geq 1 \text{ et } j \geq 1, \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4}$$

$$\text{et } \text{cov}(X_0, X_i) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \right) - \frac{1}{2\binom{2n}{n}}.$$

$$3) \text{ On a } S = \sum_{k=1}^n k X_k \text{ donc } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{4} n(n+1).$$

Rappelons que pour  $i \geq 1$ ,  $V(X_i) = \frac{1}{4}$  et

$$\text{pour } i \geq 1 \text{ et } j \geq 1, \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X_1) \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \left( \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \right) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \right) \end{aligned}$$

$$\text{Rappelons que } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

$$\text{On a } \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2 = \sum_{i,j} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) +$$

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

$$\text{Donc } \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right) = \frac{1}{24} n(n-1)(3n+2)(n-1).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V(S) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \left( \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{24} n(n-1)(3n+2)(n-1) \right) \\ &= \frac{1}{48} n^2(n+1) \frac{5n+1}{2n-1} \text{ (d'après mon logiciel de calcul formel)} \end{aligned}$$

**Ex 17** Soit  $X$  une variable aléatoire non presque sûrement nulle, de variance finie et d'espérance positive. Montrer que  $\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}(X^2)}$ .

**Sol. 17)** : On utilise Cauchy-Schwarz sur  $X \cdot \mathbb{1}_{X>0}$ .

Ainsi,  $[\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_{X>0})]^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X>0}^2) = \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{P}(X > 0)$ .

De plus,  $\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_{X>0}) \geq \mathbb{E}(X)$  car  $X = X \cdot \mathbb{1}_{X>0} + \underbrace{X \cdot \mathbb{1}_{X \leq 0}}_{\leq 0}$ .

De plus on sait que  $\mathbb{E}(X) \geq 0$  donc  $[\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_{X>0})]^2 \geq [\mathbb{E}(X)]^2$ .

**Ex 18** X 2015 RMS

1) Soient  $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$  et  $(p, q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  tel que  $1/p + 1/q = 1$ .

Montrer :  $x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$  avec la convention que  $0^{1/p} = 0^{1/q} = 0$ .

2) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires positives.

Montrer :  $\mathbb{E}(XY) \leq \mathbb{E}(X^p)^{1/p} \mathbb{E}(Y^q)^{1/q}$  (inégalité de Hölder).

**Sol. 18) : 1)** Le résultat est immédiat lorsque l'une des variables  $x$  ou  $y$  est nulle. Pour  $x > 0$  et  $y > 0$ , nous devons démontrer que

$$\exp\left(\frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y\right) \leq \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y.$$

Pour cela montrons le lemme suivant (convexité hors programme de l'exponentielle) avec  $t = \frac{1}{p}$ ,  $a = \ln x$  et  $b = \ln y$ .

**Lemme** Pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\exp(ta + (1-t)b) \leq t \exp(a) + (1-t) \exp(b).$$

*Démonstration.* Posons  $\varphi(t) = \exp(ta + (1-t)b) - (t\exp(a) + (1-t)\exp(b))$ . Comme  $\varphi''(t) = (a-b)^2 \exp(ta + (1-t)b) \geq 0$  et  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $\varphi'(t) = 0$  (théorème de Rolle) et  $\varphi$  est décroissante sur  $[0, c]$  puis croissante sur  $[c, 1]$ . Donc, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(t) \leq 0$ .  $\square$

2) On suppose  $\mathbb{E}(X^p) > 0$  et  $\mathbb{E}(Y^q) > 0$  sinon le résultat est évident car alors la variable aléatoire  $X$  ou  $Y$  est presque sûrement nulle.

Posons  $X' = \frac{X^p}{\mathbb{E}(X^p)}$  et  $Y' = \frac{Y^q}{\mathbb{E}(Y^q)}$  d'espérances égales à 1. D'après la question précédente,

$$(X')^{1/p} (Y')^{1/q} \leq \frac{X'}{p} + \frac{Y'}{q}.$$

En passant à l'espérance, on obtient  $\frac{\mathbb{E}(XY)}{(\mathbb{E}(X^p))^{1/p} (\mathbb{E}(Y^q))^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , d'où le résultat.

## Exercices d'approfondissement

**Ex 19** MINES 2018 B. Dhote

Soit  $T$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(T > n) > 0.$$

( $T$  est presque sûrement non bornée)

On appelle taux de panne associé à  $T$  la suite  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n).$$

(par exemple  $\theta_n$  donne la probabilité qu'une machine tombe en panne sachant qu'elle fonctionnait).

- 1) Montrer que  $\theta_n \in [0, 1[$ .
- 2) Exprimer  $\mathbb{P}(T \geq n)$  en fonction de  $\theta_n$ .
- 3) Reconnaître la loi de  $T$  lorsque la suite  $(\theta_n)$  est constante.
- 4) Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \theta_n$  diverge.
- 5) Réciproquement, on se donne une suite  $(\theta_n)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_n \in [0, 1[$  et que  $\sum_{n \geq 0} \theta_n$  diverge.

Montrer que la suite  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut être considérée comme un taux de panne associé à une variable aléatoire  $T$ .

**Sol. 19) :**

- 1) Il est clair que  $\theta_n \in [0, 1]$ .  
 $\theta_n = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n)$ , ce qui est exclu avec l'hypothèse  $\mathbb{P}(T > n) > 0$ .
- 2) On a pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \theta_n \cdot \mathbb{P}(T \geq n) &= \mathbb{P}(T = n) \\ &= \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(T \geq n+1) = (1 - \theta_n) \cdot \mathbb{P}(T \geq n).$$

Puisque  $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$ , il vient par récurrence immédiate pour  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

- 3) Si la suite  $(\theta_n)$  est constante  $\theta$ , alors

$$\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \cdot \mathbb{P}(T \geq n) = \theta \cdot (1 - \theta)^n.$$

On reconnaît que  $T+1$  (petit décalage) suit une **loi géométrique** de paramètre  $\theta$ .

- 4) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \{T \geq n\}\right) = 0$  par continuité décroissante, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) = \ln \mathbb{P}(T \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Donc  $\sum_{k \geq 0} \ln(1 - \theta_k)$  diverge.

Si  $(\theta_n)$  ne tend pas vers 0, la série  $\sum_{k \geq 0} \theta_k$  diverge grossièrement.

Si  $(\theta_n)$  tend vers 0, la série  $\sum_{k \geq 0} \theta_k$  est de même nature que la série  $\sum_{k \geq 0} \ln(1 - \theta_k)$  et donc diverge.

- 5) On veut construire  $T$  (donc on raisonne par analyse-synthèse)

$$\text{On doit avoir } \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

$$\text{On pose donc } p_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \geq 0.$$

Montrons que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ .

$\ln \left( \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$  car la série est à termes tous négatifs et diverge (même raisonnement qu'avant).

Donc pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Comme  $p_n = P_n - P_{n+1}$  avec  $P_0 = 1$  (rajout cohérent)

On a  $\sum_{k=0}^n p_k = P_0 - P_{n+1} = 1 - P_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

On définit donc bien une variable aléatoire  $T$  en posant pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(T = n) = p_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

On a alors  $\mathbb{P}(T \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$ , donc

$$\mathbb{P}(T = n \mid T \geq n) = \frac{\theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)} = \theta_n.$$

#### Ex 20 Loi binomiale négative.

Montrer que la somme  $S$  de  $r$  variables aléatoires, de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  indépendantes, a une loi binomiale négative définie par

$$\mathbb{P}(S = n) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} & \text{si } n \geq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Sol. 20) :** La loi de  $X_1$  est bien la loi binomiale négative  $\mathcal{BN}(1, p)$ . Supposons par récurrence que la loi de  $S_{r-1}$  soit  $\mathcal{BN}(r-1, p)$ . Notons que, pour tout  $k$ , la loi de  $X_k$  est celle de  $X_1$ . Alors, pour  $n \geq r \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}(S_r = n) = \sum_{k=r-1}^n \mathbb{P}(S_{r-1} = k, X_r = n - k).$$

Or  $S_{r-1}$  et  $X_r$  sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_r = n) &= \sum_{k=r-1}^n \mathbb{P}(S_{r-1} = k) \cdot \mathbb{P}(X_r = n - k) \\ &= \sum_{k=r-1}^n \binom{k-1}{r-2} p^{r-1} (1-p)^{k-r+1} p (1-p)^{n-k-1} \\ &= \left( \sum_{k=r-1}^n \binom{k-1}{r-2} \right) p^r (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer alors que  $\sum_{k=r-1}^n \binom{k-1}{r-2} = \binom{n-1}{r-1}$ , ce qui est une conséquence classique du triangle de Pascal.

#### Ex 21 ☛

##### Loi binomiale négative

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .

- 1) Pour  $k \geq 1$ , on pose  $G = k$  ssi  $X_1 = \dots = X_{k-1} = 0$  et  $X_k = 1$ .  
(cas particulier  $G = 1$  ssi  $X_1 = 1$ ).  
Quel est la loi de  $G$  ?

- 2) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Quel est la loi de  $S_n$  ?

- 3) La loi du  $n^e$  succès de paramètres  $n$  et  $p$  est la loi de la variable aléatoire  $Y_n$  donnant le nombre d'échecs qui précèdent le  $n^e$  succès.

Traduction : pour  $k \geq 0$ ,  $Y_n = k$  ssi  $X_{n+k}$  est le  $n^e$  terme de la suite  $(X_i)$  valant 1. Montrer que l'on peut écrire  $Y_n$  comme la somme de  $n$  variables aléatoires  $(E_i)_{i \in [1, n]}$  mutuellement indépendantes et telles que  $1 + E_i$  soit de loi géométrique.

- 4) (série gén.) Calculer la série génératrice de  $Y_n$ .
- 5) (série gén.) Calculer  $\mathbb{P}(Y_n = k)$  soit grâce à la question précédente, soit directement.

**Sol. 21) :**

- 1)  $G$  est géométrique de paramètre  $p$ .
- 2)  $S_n$  est la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .

- 3) Ecrivons  $Y_n = \sum_{k=1}^n E_k$  où  $E_k$  est le nombre d'échecs consécutifs (juste) avant le  $k^e$  succès.

On peut se convaincre intuitivement que les  $(E_k)$  sont mutuellement indépendants.  
On peut le montrer directement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 = n_1, \dots, E_k = n_k) &= q^{n_1 + \dots + n_k} \times p^k \\ &= \mathbb{P}(E_1 = n_1) \times \dots \times \mathbb{P}(E_k = n_k) \\ &= q^{n_1} p \times \dots \times q^{n_k} p.\end{aligned}$$

Les  $E_k$  suivent tous la même loi que  $G - 1$ .

$$4) \text{ Ainsi } G_{Y_n} = (G_{G-1})^n = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} t^k q^k p \right)^n = \left( \frac{p}{1-tq} \right)^n \dots$$

5) Le coefficient en  $t^k$  de  $\left( \frac{p}{1-tq} \right)^n$  est par dérivation successive en 0 divisé par  $k!$ ,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{G_{Y_n}^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!} q^k p^n = \boxed{\binom{n+k-1}{k} p^n q^k}$$

Plus directement : on choisit les  $k$  échecs à placer parmi les  $n+k-1$  places (on réserve la  $(n+k)^e$  place pour un succès, proba  $p$ ), d'où

$$\binom{n+k-1}{k} \times q^k \times p^{n-1} \times p.$$

#### Ex 22 ENS 2016 RMS

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que  $\lambda$  est une valeur médiane si  $\mathbb{P}(X \leq \lambda) \geq 1/2$  et  $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \geq 1/2$ .

- 1) Montrer qu'il existe une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
- 2) Trouver  $t$  minimisant  $t \mapsto \mathbb{E}((X-t)^2)$ .
- 3) Trouver  $t$  minimisant  $t \mapsto \mathbb{E}(|X-t|)$ .

**Sol. 22) : 1)** La fonction de répartition de  $\mathbb{P}$  (au programme) définie par  $F(\lambda) = \mathbb{P}(X \leq \lambda)$  est croissante et continue à droite

(car  $\mathbb{P}(X \leq \lambda) = \lim_{u \rightarrow \lambda} \mathbb{P}(X \leq u)$  par continuité décroissante).

Comme  $X$  prend un nombre fini de valeurs, il existe  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  tels que  $F$  vaille 0 sur  $]-\infty, \alpha_1[$ , vaille 1 sur  $[\alpha_n, +\infty[$  et (si  $n \geq 2$ ) soit constante sur les intervalles  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  avec des valeurs distinctes (et distinctes de 0 et 1).

Notons que  $\mathbb{P}(X \geq \lambda) = 1 - \mathbb{P}(X < \lambda)$ , de sorte qu'on nous demande de montrer qu'il existe  $\lambda$  tel que

$$F(\lambda) \geq 1/2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X < \lambda) = \lim_{t \rightarrow \lambda} \mathbb{P}(X \leq t) = \lim_{t \rightarrow \lambda} F(t) = F(\lambda_-) \leq 1/2.$$

Si  $1/2$  est une valeur prise par  $F$ , elle est prise sur tout un intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  sur lequel  $F$  est constante. Les *médianes* possibles sont les réels de l'intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ .

Si  $1/2$  n'est pas une valeur prise par  $\lambda$ , pour deux valeurs *successives*  $a$  et  $b$  prises par  $F$ ,  $a < 1/2 < b$ . La valeur  $b$  est prise sur l'intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  (ou  $[\alpha_i, +\infty[$  si  $i = n$ ), et la seule valeur possible de  $\lambda$  est  $\lambda = \alpha_i$ , qui est aussi la seule *médiane* possible.

2) On développe l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-t)^2) &= t^2 - 2t\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) = (t - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= (t - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbf{V}(X).\end{aligned}$$

Donc le minimum est atteint en  $t = \mathbb{E}(X)$  et lui seul.

3) Nous allons montrer que les  $t$  qui minimisent  $\mathbb{E}(|X-t|)$  sont les médianes de  $X$ . Soit  $A$  l'ensemble des points de  $X(\Omega)$  dont la probabilité est non nulle, et, pour  $x \in A$ , notons  $p_x = \mathbb{P}(X = x) > 0$ . D'après le théorème de transfert,

$$f(t) = \mathbb{E}(|X-t|) = \sum_{x \in A} |x-t| p_x.$$

La fonction  $f$  est combinaison linéaire de fonctions continues affines par morceaux, et elle est donc continue affine par morceaux, avec un nombre fini de points où sa dérivée à gauche est différente de sa dérivée à droite, qui sont exactement les points de  $A$ . Comme elle est de la forme  $(t + \text{constante})$  pour  $t$  assez grand, et  $(-t + \text{constante})$  pour  $t$  négatif assez grand, elle est minorée et atteint sa borne inférieure.

Pour tout  $\lambda \in ]\min A, \max A[$ , la dérivée de  $f$  en tout point assez près de  $\lambda$  strictement à gauche de  $\lambda$  est :  $f'_g(\lambda) = \sum_{x < \lambda} p_x - \sum_{y \geq \lambda} p_y$ .

De même, la dérivée à droite de  $f$  en  $\lambda$  est :  $f'_d(\lambda) = \sum_{x \leq \lambda} p_x - \sum_{y > \lambda} p_y$ .

Comme la fonction  $f$  est continue, affine par morceaux, vérifie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'_g(t) \leq f'_d(t)$  et que donc la succession des pentes passe de  $-1$  à  $1$  en croissant, le point  $\lambda$  est un minimum de  $f$  si et seulement si  $f'_g(\lambda) \leq 0 \leq f'_d(\lambda)$ .

Cela équivaut à

$$\sum_{x < \lambda} p_x - \sum_{y \geq \lambda} p_y \leq 0 \leq \sum_{x \leq \lambda} p_x - \sum_{y > \lambda} p_y.$$

Comme  $\sum_{x < \lambda} p_x = 1 - \sum_{y \geq \lambda} p_y$ , l'inégalité de gauche équivaut à  $2 \sum_{y \geq \lambda} p_y \geq 1$ .

De même,  $\sum_{y > \lambda} p_y = 1 - \sum_{x \leq \lambda} p_x$  entraîne que l'inégalité de droite équivaut à  $2 \sum_{x \leq \lambda} p_x \geq 1$ .

On reconnaît précisément les deux conditions qui caractérisent une médiane  $\lambda$  de  $X$ .

**Ex 23** **Temps d'attente** (pour une loi de Poisson)Soient  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $N = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n > 0\}$ .Pour  $n \geq 1$ , Calculer  $\mathbb{P}(N > n)$ . Montrer que  $N$  est une variable aléatoire.Quel est la loi de  $N$ ? Déterminer  $\mathbb{E}N$ .**Sol. 23) :**

$$1) \mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = 0) = e^{-n\lambda}.$$

Donc  $\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(N > n-1) - \mathbb{P}(N > n) = (e^{-\lambda})^{n-1} (1 - e^{-\lambda})$ . On a  $N \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$ . $N$  est bien une variable aléatoire : on peut interpréter cette question par  $\mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n > 0\} = \emptyset) = 0$ . $\{N = n\}$  est bien un événement et celui qui pose problème, est bien un événement mais en plus il est de probabilité nulle).

On a la même difficulté de définition avec la loi géométrique dans le cours... D'ailleurs il s'agit d'une loi géométrique.

$$\text{Donc } \mathbb{E}N = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}.$$

**Ex 24**  MINES 2017 RMSSoient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $N = n!$ ,  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$ ,  $p_1 < \dots < p_m$  les nombres premiers inférieurs à  $N$ .

$$1) \text{ Calculer } \mathbb{P}(p_k | X) \text{ pour } k \in \{1, \dots, m\}.$$

$$2) \text{ Montrer que les événements } (p_1 | X), (p_2 | X), \dots, (p_m | X) \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

$$3) \text{ Soient } X_1 \text{ et } X_2 \text{ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de } X. \text{ Déterminer } \mathbb{P}(X_1 \wedge X_2 = 1).$$

**Sol. 24) :**

$$1) \mathbb{P}(p_k | X) = \frac{p_k}{N} = \frac{1}{p_k}.$$

$$2) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{p_{i_j} | X\}\right) = \frac{\prod_{j \in J} p_{i_j}}{N} = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_{i_j}} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(p_{i_j} | X).$$

**3)**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \wedge X_2 = 1) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^m \{p_k | X_1 \text{ et } p_k | X_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m \{p_k \nmid X_1 \text{ ou } p_k \nmid X_2\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(\{p_k \nmid X_1 \text{ ou } p_k \nmid X_2\}) \text{ par indépendance des événements} \\ &= \prod_{k=1}^m (1 - \mathbb{P}(\{p_k | X_1 \text{ et } p_k | X_2\})) \\ &= \prod_{k=1}^m (1 - \mathbb{P}(\{p_k | X_1\})^2) \\ &= \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right) \end{aligned}$$

**Ex 25** **Marche aléatoire biaisée**Soit  $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  et  $X : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que  $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - p = q$  et  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  (variable aléatoire de Rademacher)

$$1) \text{ Donner l'espérance et la variance de } X.$$

$$2) \text{ On considère une suite de v.a.i.i.d } (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de même loi que } X \text{ et on pose } S_n = X_1 + \dots + X_n. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n < 0) = 0.$$

INDICATION utiliser une inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$3) \text{ Calculer } \mathbb{P}(S_{2k} = 0).$$

$$4) \text{ Retrouver que } \binom{2k}{k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}} \text{ puis étudier la nature de la série } \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0).$$

$$5) \text{ Montrer que presque sûrement } \{n \mid S_n = 0\} \text{ est fini.}$$

En d'autres termes, presque sûrement, le marcheur passe un nombre fini de fois par l'origine.

$$6) \text{ (🚶) Montrer que presque sûrement la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement positive à partir d'un certain rang.}$$

**Sol. 25) :**

$$1) \mathbb{E}X = p - q = 2p - 1 \in ]0, 1[ \text{ et } V(X) = 1 - (2p - 1)^2.$$

2) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X\right| \geq \mathbb{E}X\right) \leq \frac{1}{(\mathbb{E}X)^2} V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(X)}{n \times (\mathbb{E}X)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(rappelons que  $\mathbb{E}X > 0$ ).

Comme  $\{S_n < 0\} \subset \left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X\right| \geq \mathbb{E}X\right\}$ , on a  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n < 0) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X\right| \geq \mathbb{E}X\right) = 0$ .

$$3) \mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} p^k q^k.$$

$$4) \mathbb{P}(S_n = 0) = \begin{cases} \binom{2k}{k} p^k q^k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

On a  $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}$  t.g. d'une série convergente car  $pq = p(1-p) < \frac{1}{4}$ .

$$5) \text{ Notons } B = \{S_n \text{ s'annule une infinité de fois}\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{S_k = 0\}.$$

On (re)démontre Borel-Cantelli, en écrivant que

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} \{S_k = 0\}\right) \text{ par continuité décroissante}$$

$$\text{or } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} \{S_k = 0\}\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (question précédente) donc } \mathbb{P}(B) = 0.$$

Ainsi  $\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(S_n \text{ s'annule un nombre fini de fois}) = 1$ .

6) On en déduit que  $\mathbb{P}(\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est non nulle à partir d'un certain rang}) = 1$ .

puisque  $\{S_n \text{ s'annule un nombre fini de fois}\} = \{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est non nulle à partir d'un certain rang}\}$ .

Notons  $A^+ = \{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement positive à partir d'un certain rang}\}$

et  $A^- = \{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement négative à partir d'un certain rang}\}$ .

On remarque puisque  $S_{n+1} = S_n \pm 1$  que

$$A^+ \sqcup A^- = \{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est non nulle à partir d'un certain rang}\}$$

$\mathbb{P}(A^+ \sqcup A^-) = 1$ . Il nous reste à montrer que  $\mathbb{P}(A^-) = 0$ .

$$\text{On a } A^- = \bigcup_{n_0 \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq n_0} \{S_n < 0\}\right).$$

Donc pour tout  $k \geq n_0$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq n_0} \{S_n < 0\}\right) \leq \mathbb{P}\{S_k < 0\} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\bigcap_{n \geq n_0} \{S_n < 0\}$  est un ensemble négligeable.

Et donc, c'est le cas également de  $A^- = \bigcup_{n_0 \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq n_0} \{S_n < 0\}\right)$  (réunion dénombrable d'ensembles négligeables).

Ainsi  $\mathbb{P}(A^+) = 1$ , ce qu'il fallait démontrer.

#### Ex 26



#### Nombre de tentatives pour retrouver un même résultat

Soit  $n \geq 2$ .

Soient  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On pose  $T = \min\{k \geq 2 \mid X_k \in \{X_1, \dots, X_{k-1}\}\}$ .

$$1) \text{ Montrer que pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(T > k) = \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}.$$

(on a  $\mathbb{P}(T > 0) = \mathbb{P}(T > 1) = 1$ )

$$2) \text{ Montrer que } \mathbb{E}T = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx.$$

3) Montrer que pour  $n \geq 1$  et  $t \geq 0$ ,

$$\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} \leq (1+t)e^{-t}.$$

$$4) \text{ En déduire que } \mathbb{E}T \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

**Sol. 26) :**

$$1) \mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(X_1, X_2, \dots, X_k \text{ distincts}) = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n} = \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}.$$

Pour le prouver plus rigoureusement, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > k \mid T > k-1) &= \mathbb{P}(X_k \notin \{X_1, \dots, X_{k-1}\} \mid X_1, X_2, \dots, X_{k-1} \text{ distincts}) \\ &= \frac{n-k+1}{n}.\end{aligned}$$

Puis on effectue une récurrence grâce à  $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(T > k \mid T > k-1) \cdot \mathbb{P}(T > k-1)$

2) On sait que, puisque  $T$  est à valeurs entières,

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T > k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^k e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}.\end{aligned}$$

3) On étudie pour  $t \geq 0$  et  $n \geq 1$ ,  $\varphi(t) = -t + \ln(1+t) - n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \sqrt{nt}$

$$\text{On a } \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(t) = -1 + \frac{1}{1+t} + \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{\sqrt{n}}}\right) = t^2 \frac{\sqrt{n}-1}{(t+1)(t+\sqrt{n})} \geq 0.$$

Donc  $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$  pour  $t \geq 0$ , on a donc  $-t + \ln(1+t) \geq n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{nt}$  puis en composant par l'exponentielle,

$$\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{nt}} \leq (1+t)e^{-t}$$

4) Le changement de variable  $x = \sqrt{nt}$  donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{nt}} dt \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}\end{aligned}$$

car par le théorème de convergence dominée (voir ci-après), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{nt}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

En posant  $f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{nt}}$ . On a  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2/2}$  (expression d'une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ ).

On a vu que  $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{nt}} \leq (1+t)e^{-t}$ , la dernière fonction étant intégrable sur  $[0, +\infty[$  et on peut appliquer le théorème de convergence dominée car l'hypothèse de domination pour  $n \geq 1, t \geq 0, |f_n(t)| \leq (1+t)e^{-t}$  est établie.

#### Ex 27 ENS 2018 M. Giron

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

On définit  $d(X, Y) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A))$ .

Soit  $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$ .

1) Montrer que  $d$  est atteint en  $B$ .

2) Montrer que  $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$

3) Montrer que  $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$ .

**Sol. 27) :**

1) Soit  $A \subset \mathbb{Z}$ , on a

$$\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) \leq \mathbb{P}(X \in A \cap B) - \mathbb{P}(Y \in A \cap B)$$

(car on somme à gauche des différences négatives en plus)

Puis, sans difficulté,  $\mathbb{P}(X \in A \cap B) - \mathbb{P}(Y \in A \cap B) \leq \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$

(derrière il y a des séries à termes positifs de somme  $\leq 1$ ).

Ainsi, puisque  $B \subset \mathbb{Z}$ ,  $\sup_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)) = \max_{A \subset \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$ .

2) Posons

$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$$

$$\tilde{B} = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(Y = k) > \mathbb{P}(X = k)\}$$

$$B_0 = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)\}$$

On a  $\mathbb{Z} = B \sqcup \tilde{B} \sqcup B_0$  et

$$1 = \mathbb{P}(X \in B) + \mathbb{P}(X \in \tilde{B}) + \mathbb{P}(X \in B_0) = \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(Y \in \tilde{B}) + \mathbb{P}(Y \in B_0)$$

puisque  $\mathbb{P}(X \in B_0) = \mathbb{P}(Y \in B_0)$ ,

$$\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in \tilde{B}) - \mathbb{P}(X \in \tilde{B})$$

Donc  $d(X, Y) = d(Y, X)$  et

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(Y \in \tilde{B}) - \mathbb{P}(X \in \tilde{B}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \text{ en distinguant suivant } k \in B \sqcup \tilde{B} \sqcup B_0 \end{aligned}$$

### 3) Petit lemme plus général

On remarque que  $A \cup B$  est la réunion disjointe de  $A \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap B$  et  $A \cap B$ . On a donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Comme  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ , on en déduit que

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Comme  $\mathbb{P}(A \cap B)$  est plus petit que  $\mathbb{P}(A)$  et que  $\mathbb{P}(B)$  on a donc  $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$  et son opposé plus petits que  $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ .

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

En particulier, ici, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X = n \cap Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n \cap Y = n)$ . On somme les inégalités sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n \cap Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n \cap Y = n)) \\ &\leq \mathbb{P}(X \neq Y) + \mathbb{P}(X \neq Y) = 2\mathbb{P}(X \neq Y) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$$

### Ex 28 X 2019

Soit  $X_\lambda$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

On pose  $Z_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ .

Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(e^{itZ_\lambda})$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

INDICATION. Utiliser le théorème de transfert et un développement limité.

**Sol. 28) :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme la variable aléatoire  $e^{itZ_\lambda}$  est bornée, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{ixZ_\lambda}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp\left[ix\left(\frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\right] \lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-(ix\sqrt{\lambda}+\lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda \exp\left[\frac{ix}{\sqrt{\lambda}}\right]\right)^n}{n!} \\ &= \exp\left(-\left(ix\sqrt{\lambda} + \lambda\right) + \lambda \exp\left[\frac{ix}{\sqrt{\lambda}}\right]\right) \\ &= \exp\left(\lambda \left(-\left(\frac{ix}{\sqrt{\lambda}} + 1\right) + \exp\left[\frac{ix}{\sqrt{\lambda}}\right]\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda \left(-\left(\frac{ix}{\sqrt{\lambda}} + 1\right) + 1 + \frac{ix}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\left(\frac{ix}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + o_{\lambda \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o_{\lambda \rightarrow +\infty}(1)\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$