Variables aléatoires

Exercices d'application

Ex 1 **Étude d'une loi conjointe**
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j) = \frac{1}{e \cdot 2^{i+1} \cdot j!}$$

1) Déterminer les lois (marginales) de X et de Y.

2) **a)** Prouver que $1+\mathrm{X}$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance de X.

b) Déterminer l'espérance de Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$.

Ex 2 X 2017 RMS
Soit X une variable aléatoire strictement positive. Montrer que $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}+1/\mathrm{X}\right) \geqslant 2$.

Ex 3 Mines 2017 RMS
On suppose que $\mathrm{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})$.

Ex 4 X 2017 RMS
Soient X, Y deux variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi. Montrer que $\mathbb{E}\big(\mathrm{X}/\mathrm{Y}\big) \geqslant 1$.

Ex 5 Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes possédant une variance.
Déterminer un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\mathbb{E}\left((\mathrm{Y}-(a\mathrm{X}+b))^2\right)$ (on cherche la meilleur approximation affine de Y par X).
Que vaut pour un tel couple $\dfrac{\mathrm{V}\left(a\mathrm{X}+b\right)}{\mathrm{V}(\mathrm{Y})}$?

Ex 6 Mines 2017 RMS
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathrm{Y} \sim \mathcal{P}(\mu)$. Trouver la loi conditionnelle de X sachant $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n$.

Ex 7 Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-\mathrm{X}$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k|\mathrm{X}=i)$.

b) Prouver que $\mathrm{Z}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Ex 8 Mines 2017 RMS
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n,1/2)$. Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{X} & 1 \\ 0 & \mathrm{Y} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Ex 9 Mines 2017 G. Hovan
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mathrm{X} & 2\sqrt{\mathrm{Y}} \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable (dans $\mathbb{R}$).

Ex 10 CCP 2018 Y. Aïouch
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p_1 et p_2. On pose $\mathrm{Z}=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

1) Soit $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$.

2) Soit $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant n)$.

3) Déterminer la loi de Z.

Exercices d'entraînement

Ex 11 Soit $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ une infinités de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes de même loi, N une variable aléatoire sur le même espace, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\cdots+\mathrm{X}_\mathrm{N}$, où les X_n et N sont mutuellement indépendantes.

On suppose que X_1 et N ont une espérance et une variance finies. Montrer qu'il en est de même de S_N et calculer l'espérance de S_N en fonction de celles de X_1 et N. (on prendra quelques libertés sur les sommes doubles)
Calculer la variance de S_N en fonction de l'espérance et la variance de X_1 et l'espérance et la variance de N.
Remarque on pourra aller beaucoup plus en connaissant les séries génératrices.

Ex 12 Mines 2018 A. Bakkoury
On dispose de $T_1, \cdots, T_n$ tiroirs et $B_1, \cdots, B_p$ boules.
On place les boules dans les tiroirs.
On désigne par X_k le nombre de boules dans le tiroir T_k et par Y le nombre de tiroirs vides.

1) Donner la loi de X_k.

2) Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

3) Déterminer l'espérance de Y.

Ex 13 Petites Mines 2017 R. Tran
On effectue un tirage avec remise dans une urne contenant en proportion $p \in]0,1[$ boules noires et $q = 1-p$ boules blanches.
On note
N_k tirage d'une boule noire au k^e tirage,
B_k tirage d'une boule blanche au k^e tirage,
X la longueur de la première série de boules de la même couleur
Y $\cdots$ deuxième série $\cdots$.
Par exemple $X = 1$ et $Y = 2$ pour N_1, B_2, B_3, N_4 ou bien pour B_1, N_2, N_3, B_4.

1) Donner la loi conjointe de (X, Y).

2) Donner la loi de X et l'espérance de X. Montrer que $\mathbb{E}X \geqslant 2$.

3) Donner l'espérance de Y.

Ex 14 Mines 2017 E. Baguet
Soit T le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention du premier motif pile-face (PF) lors de lancers d'une pièce équilibrée.
Donner la loi de T et son espérance.

Ex 15 Mines 2018 G. His
On considère 6 dés identiques à 6 faces
On jette simultanément les 6 dés et on enlève les dés avec lesquels on a obtenu des 6. Puis on recommence avec les dés restants jusqu'à n'obtenir que des 6.
Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de lancers pour n'obtenir que des 6.

1) Trouver la loi de X. On pourra d'abord calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$.

2) X a-t-elle un espérance, une variance ?

Ex 16 ✍ Centrale 2017 B. Dhote rms
Une urne contient $2n$ boules. La moitié des boules porte le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à n. On tire simultanément une poignée de n boules. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit la variable aléatoire X_i telle que $X_i = 1$ si la boule numéro i est dans la poignée, $X_i = 0$ sinon.

1) Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.

2) Déterminer la covariance $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

3) Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules de la poignée. Calculer E(S) et V(S).

Ex 17 Soit X une variable aléatoire non presque sûrement nulle, de variance finie et d'espérance positive. Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) \geqslant \dfrac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}\left(X^2\right)}$.

Ex 18 X 2015 rms
1) Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $(p,q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $1/p + 1/q = 1$.
Montrer : $x^{1/p}y^{1/q} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$ avec la convention que $0^{1/p} = 0^{1/q} = 0$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires positives.
Montrer : $\mathbb{E}(XY) \leqslant \mathbb{E}(X^p)^{1/p}\,\mathbb{E}(Y^q)^{1/q}$ (inégalité de Hölder).

Exercices d'approfondissement

Ex 19 Mines 2018 B. Dhote
Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > n) > 0.$$

(T est presque sûrement non bornée)
On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n).$$

(par exemple θ_n donne la probabilité qu'une machine tombe en panne sachant qu'elle fonctionnait).

1) Montrer que $\theta_n \in [0,1[$.

2) Exprimer $\mathbb{P}(T \geqslant n)$ en fonction de θ_n.

3) Reconnaître la loi de T lorsque la suite (θ_n) est constante.

4) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}\theta_n$ diverge.

5) Réciproquement, on se donne une suite (θ_n) telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\theta_n\in[0,1[$ et que $\sum_{n\geqslant 0}\theta_n$ diverge.
Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être considérée comme un taux de panne associé à une variable aléatoire T.

Ex 20 **Loi binomiale négative.**
Montrer que la somme S de r variables aléatoires, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ indépendantes, a une loi binomiale négative définie par

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}=n)=\begin{cases}\dbinom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} & \text{si } n\geqslant r\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ex 21 ☕
Loi binomiale négative
On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

1) Pour $k\geqslant 1$, on pose $\mathrm{G}=k$ ssi $\mathrm{X}_1=\cdots=\mathrm{X}_{k-1}=0$ et $\mathrm{X}_k=1$.
(cas particulier $\mathrm{G}=1$ ssi $\mathrm{X}_1=1$).
Quel est la loi de G ?

2) Pour $n\geqslant 1$, on pose $\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k$. Quel est la loi de S_n ?

3) **La loi du n^e succès de paramètres n et p** est la loi de la variable aléatoire Y_n donnant le nombre d'échecs qui précèdent le n^e succès.
Traduction : pour $k\geqslant 0$, $\mathrm{Y}_n=k$ ssi X_{n+k} est le n^e terme de la suite (X_i) valant 1.
Montrer que l'on peut écrire Y_n comme la somme de n variables aléatoires $(\mathrm{E}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ mutuellement indépendantes et telles que $1+\mathrm{E}_i$ soit de loi géométrique.

4) (série gén.) Calculer la série génératrice de Y_n.

5) (série gén.) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n=k)$ soit grâce à la question précédente, soit directement.

Ex 22 ✍ ENS 2016 RMS
Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que λ est une valeur médiane si $\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant\lambda)\geqslant 1/2$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant\lambda)\geqslant 1/2$.
1) Montrer qu'il existe une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
2) Trouver t minimisant $t\mapsto\mathbb{E}\left((\mathrm{X}-t)^2\right)$.
3) Trouver t minimisant $t\mapsto\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}-t|\right)$.

Ex 23 ✍
Temps d'attente (pour une loi de Poisson)
Soient $\mathrm{X}_n:\Omega\to\mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ.
On pose $\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k$ et $\mathrm{N}=\inf\{n\in\mathbb{N}^*\mid \mathrm{S}_n>0\}$.
Pour $n\geqslant 1$, Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{N}>n)$. Montrer que N est une variable aléatoire.
Quel est la loi de N ? Déterminer $\mathbb{E}\mathrm{N}$.

Ex 24 ✍ Mines 2017 RMS
Soient $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\mathrm{N}=n!$, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1,\ldots,\mathrm{N}\}$, $p_1<\cdots<p_m$ les nombres premiers inférieurs à N.

1) Calculer $\mathbb{P}(p_k|\mathrm{X})$ pour $k\in\{1,\ldots,m\}$.

2) Montrer que les événements $(p_1|\mathrm{X})$, $(p_2|\mathrm{X})$,..., $(p_m|\mathrm{X})$ sont mutuellement indépendants.

3) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1\wedge\mathrm{X}_2=1)$.

Ex 25 ✍
Marche aléatoire biaisée
Soit $p\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ et $\mathrm{X}:\Omega\to\{-1,1\}$ telle que $\mathbb{P}(\mathrm{X}=-1)=1-p=q$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X}=1)=p$ (variable aléatoire de Rademacher)

1) Donner l'espérance et la variance de X.

2) On considère une suite de v.a.i.i.d $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de même loi que X et on pose $\mathrm{S}_n=\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n<0)=0$.
Indication utiliser une inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2k}=0)$.

4) Retrouver que $\dbinom{2k}{k}\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$ puis étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=0)$.

5) Montrer que presque sûrement $\{n\mid \mathrm{S}_n=0\}$ est fini.
En d'autres termes, presque sûrement, le marcheur passe un nombre fini de fois par l'origine.

6) (☕) Montrer que presque sûrement la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Ex 26 ☕
Nombre de tentatives pour retrouver un même résultat
Soit $n \geqslant 2$.
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On pose $T = \min\{k \geqslant 2 \mid X_k \in \{X_1, \cdots, X_{k-1}\}\}$.

1) Montrer que pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(T > k) = \binom{n}{k}\dfrac{k!}{n^k}$.
(on a $\mathbb{P}(T > 0) = \mathbb{P}(T > 1) = 1$)

2) Montrer que $\mathbb{E}T = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\mathrm{d}x$.

3) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,
$$\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} \leqslant (1+t)e^{-t}.$$

4) En déduire que $\mathbb{E}T \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

Ex 27 ENS 2018 M. Giron
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On définit $d(X,Y) = \sup\limits_{A\subset\mathbb{Z}}(\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A))$.
Soit $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X=k) > \mathbb{P}(Y=k)\}$.

1) Montrer que d est atteint en B.

2) Montrer que $d(X,Y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)|$

3) Montrer que $d(X,Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Ex 28 X 2019
Soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $Z_\lambda = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathbb{E}\left(e^{itZ_\lambda}\right)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Indication. Utiliser le théorème de transfert et un développement limité.

Les indications

Ind. 3 : On pourra utiliser que $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$.

Ind. 13 : Pas de difficulté. Utiliser $xy \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ pour minorer l'espérance.

Ind. 17 : Utiliser la variable aléatoire $X \cdot \mathbb{1}_{X>0}$.

Ind. 18 : Montrer le lemme (de convexité) suivant

> **Lemme** Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
> $$\exp(ta + (1-t)b) \leqslant t\exp(a) + (1-t)\exp(b).$$

Ind. 20 : Preuve par récurrence sur r. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite infinie de variables aléatoires géométriques de même paramètre p indépendantes. On suppose que $Y_1 + \cdots + Y_{r-1} = S_{r-1}$ est binomiale négative de paramètres r et p. On montre alors que $S_{r-1} + Y_r = S_r$ est binomiale négative aussi de paramètres $r+1$ et p.

Ind. 23 : Relier l'événement $\{N > n\}$ à $\{S_n = 0\}$

Ind. 26 : On pourra calculer $\mathbb{P}(T > k \mid T > k-1)$.