Probabilités

Exercices d'application

Ex 1 Soit $\mathscr{A}$ une tribu d'événements d'un espace probabilisable Ω et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de $\mathscr{A}$. Décrire à l'aide des opérations ou comparaisons ensemblistes usuelles les situations ou les événements suivants (on écrira quelque chose du genre : « $\omega \in E$ » où E est un ensemble à déterminer).

1) L'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé.
2) L'un seulement des événements A_1 et A_2 est réalisé.
3) A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3.
4) À chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi.
5) A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble.
6) A_1 ou A_2 se produisent toujours.
7) Tous les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalisent.
8) L'un au moins des A_i se réalise.
9) Tous les événements A_i se réalisent à partir du rang i_0
10) Tous les événements A_i se réalisent à partir d'un certain rang.
11) Une infinité d'événements A_i se réalisent.
12) Seul un nombre fini d'événements A_i se réalise.

Ex 2 Quatre entarteurs ont une probabilité, respectivement, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$ de toucher leur cible.
Bernard-Henri Levy arrive près d'eux. Quelle est la probabilité qu'il soit entarté ?

Ex 3 Soient A et B deux événements indépendants. Calculer $\mathbb{P}(A\cup B)$ en fonction de $a=\mathbb{P}(A)$ et $b=\mathbb{P}(B)$.

Ex 4 *Paradoxe du chevalier de Méré.*
Antoine Gombaud, chevalier de Méré était un noble à la cour de Louis XIV*, grand amateur de jeu de dés. Son problème était le suivant : lorsque l'on joue aux dés, est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers ? Est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un double 6 en vingt-quatre lancers de deux dés ?*

1) Est-il avantageux d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois de suite ? (Autrement dit la probabilité est-elle supérieure à 1/2 ?).
2) Est-il avantageux d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés $4\times 6=24$ fois ?

Remarque historique Blaise Pascal, avec qui le chevalier de Méré a entretenu une correspondance, a effectué le calcul de la deuxième probabilité, détrompant le chevalier de Méré. La réponse de Pascal figure dans une lettre destinée à Fermat.

Ex 5 Un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots.
Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir comptant 2000 mots ?

Ex 6 Le problème du tricheur.
Un population contient une proportion $p\in[0,1]$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un individu choisi au hasard dans la population, s'il s'agit d'un tricheur, cet individu retournera un as. Quelle est la probabilité que l'individu retourne un as ?

Ex 7 **Tournoi potentiellement infini**
Trois joueurs A, B et C s'affrontent dans des parties à deux successives avec les règles suivantes
• à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité
• le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante
• est déclaré vainqueur (et le jeu s'arrête) lorsqu'un joueur gagne deux parties successives.

1) Pour $n\geqslant 1$, on note $F_n =$« le jeu comporte au moins n parties ».
Décrire l'événement $\bigcap_{n\geqslant 1} F_n$.
2) Exprimer $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(F_n)$ en terme de probabilité.
3) Pour $n\geqslant 1$, on note $T_n =$« le jeu se termine à la n^e partie ».
  a) Comparer T_n, F_n et F_{n+1}.
  b) Que vaut pour $n\geqslant 2$, $\mathbb{P}(T_n \mid F_n)$?
  c) Montrer que pour $n\geqslant 2$, $\mathbb{P}(T_n)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$ puis que $\mathbb{P}(F_{n+1})=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$.
  d) En déduire que pour $n\geqslant 2$, $\mathbb{P}(F_n)=\dfrac{1}{2^{n-2}}$.
4) Montrer que le jeu se termine en un nombre fini d'étapes presque sûrement.
5) **On suppose dans cette question et la suivante que les joueurs** A **et** B **s'affrontent en premier**.
On suppose que le joueur A gagne la première partie.
On note N le nombre de parties du tournoi (c'est une variable aléatoire).
Montrer que {N est multiple de 3} = {le joueur C gagne}
Montrer que la probabilité que le joueur C gagne à la fin de ce tournoi vaut $\dfrac{2}{7}$.

6) On ne suppose plus que le joueur A gagne la première partie, calculer la probabilité pour chacun des joueurs de gagner le tournoi.

Ex 8 **a)** Montrer la *formule du crible de Poincaré*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{i_1} \cap \mathrm{A}_{i_2} \cdots \cap \mathrm{A}_{i_k}\right).$$

b) Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.
i) Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
ii) Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ? Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$.
iii) Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à destination ?
iv) Quel est le nombre d_n de manières différentes de poser les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

Ex 9 X 2017 RMS
Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité 1/2. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

Ex 10 Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 boules noires.
Soit $i \in [\![1, 10]\!]$ fixé.

1) On suppose dans cette question que le tirage est avec remise.
Pour $k \in [\![i, +\infty[\![$, on définit la probabilité p_k qu'au k-ième tirage, une i-ème boule blanche soit tirée
(on a donc, en particulier, tiré $i-1$ boules blanches auparavant)

- **a)** Calculer p_i et p_{i+1}.
- **b)** (☕) Calculer p_k pour $k \geqslant i$ de manière générale.

2) Dans cette question, le tirage est **sans** remise.
Pour $k \in [\![i, i+5]\!]$, on définit la probabilité q_k qu'au k-ième tirage, une i-ème boule blanche soit tirée.

- **a)** Calculer q_i et q_{i+1}.
- **b)** (☕) Calculer q_k pour $k \in [\![i, i+5]\!]$ de manière générale.

Exercices d'approfondissement

Ex 11 Mines 2018 R. Dehont
(Borel Cantelli)
Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose $\mathrm{A} = \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n$.

1) Montrer que A est un événement.
Ecrire « en français » une condition sur les (A_n) pour que A soit réalisé.

2) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge.
Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.
(remarque l'hypothèse de mutuelle indépendance ne sert pas ici)

3) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge.
Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.
Indication utiliser que $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Ex 12 *Une application du lemme de Borel-Cantelli.*
Sur un ensemble dénombrable probabilisé, il n'existe pas de suite infinie de parties A_n, $n \in \mathbb{N}$, indépendantes dans leur ensemble et de même probabilité $p \in]0, 1[$.
Application
Il n'existe pas d'ensemble *dénombrable* Ω et de probabilité P sur $\mathscr{P}(\Omega)$, de suite de variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$, sur Ω indépendantes et de même loi non triviale. En effet, la loi étant non triviale, il existe U une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_0 \in \mathrm{U}) \in]0, 1[$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \mathrm{X}_n^{-1}(\mathrm{U})$. Alors toutes les parties A_n de Ω sont indépendantes et de même probabilité d'où la contradiction.

Ex 13 ☕
Ruine du joueur
Deux joueurs, nommés A et B, s'affrontent dans une sanglante partie de *pile* ou *face*. Le joueur A dispose au départ de n euros, le joueur B de $\mathrm{N} - n$ euros. Le jeu se déroule en une succession de manches opposant A et B ; à chaque manche, A gagne avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le perdant d'une manche donne un euro au vainqueur, et le jeu s'arrête avec la ruine d'un joueur.
On note a_n la probabilité que A gagne le jeu quand sa fortune de départ est de n euros.

1) Trouver une relation de récurrence entre a_n, a_{n-1} et a_{n+1}.
2) En déduire a_n. On séparera les cas $p \neq 1/2$ et $p = 1/2$.
3) En déduire que la partie se termine presque sûrement.

Ex 14 ✍

Un candidat est soumis à une série de questions indépendantes. Ce dernier a une chance sur trois de répondre correctement à chacune des questions. Le test est terminé lorsqu'il répond **consécutivement** à k questions ($k \geqslant 1$).
Soit $n \geqslant 1$, on pose $p_n = \mathbb{P}$ (le test s'arrête après n questions posées).

1) Donner p_n pour $1 \leqslant n \leqslant k$.
2) Montrer que pour $n \geqslant k$, $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{p_{n-i}}{3^i}$.
3) Dans la cas $k = 2$, donner p_n.
4) (rab M. Rezzouk) Quelle est la probabilité que le test dure indéfiniment ?
5) (rab M. Rezzouk) On note T la variable aléatoire donnant le nombre de questions posées avant de terminer le jeux.
   (on définit bien cette variable aléatoire presque sûrement d'après ce qui précède).
   En admettant que T admet une espérance, calculer $\mathbb{E}$T.

Ex 15 ☕ X 2016 RMS

(utilise le **principe de réflexion**)
Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B. Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Ex 16 CENTRALE 2017 G. Curé et M. Konaté

(sans prép.) Soit $2n$ équipes de foot, n de $1^{\text{ère}}$ division, et n de 2^{nde} division.
On fait n matchs en même temps.

1) Donner la probabilité que chaque match oppose une équipe de $1^{\text{ère}}$ division à une équipe de 2^{nde} division.
2) Équivalent quand n tend vers $+\infty$.
3) Donner la probabilité que les n matchs opposent 2 équipes de même division.
4) Équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Ex 17 ☕ MINES 2017 RMS

On répartit aléatoirement $p \geqslant 1$ jetons dans $n \geqslant 1$ cases. On note A_i l'événement « la i-ième case est vide ». Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n)$.

Ex 18 ☕ CENTRALE 2017 RMS

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements.
Montrer que $|\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leqslant 1/4$.

Ex 19 ☕

[Poker – révisions sur le dénombrement - `Python`]Révisons un peu les techniques élémentaires de dénombrement.
Dans le cadre du jeu de poker, on tire une main (5 cartes) dans un jeu de 52 cartes. On rappelle qu'une carte se définit par sa hauteur (13 possibilités) et sa couleurs (4 possibilités).

1) Réaliser un programme en `Python` qui crée une main aléatoire.
   INDICATION on pourra utiliser la fonction `shuffle` (ou éventuellement `choice`) du module `random`.
2) Déterminer la probabilité d'obtenir (il est sous-entendu que la combinaison est la meilleure obtenue)
   a) une paire (exactement)
   b) deux paires (exactement)
   c) un brelan (trois cartes de même rang)
   d) une suite (cinq cartes de rang consécutif)
   e) une couleur (5 cartes de la même couleur)
   f) un full (un brelan et une paire)
   g) un carré
   h) une suite royale (=quinte flush, 5 cartes de rang successif et de même couleur).
   i) Une main avec au moins un pique et un as.
3) Effectuer un test statistique élémentaire de vos réponses : la fréquence des résultats pour un nombre de tirages « grand » doit être proche du résultat théorique.
4) Soit $\mathcal{A}$ l'événement dont on veut mesurer la probabilité. On effectue N essais indépendants et on note $\mathrm{X}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ à la n^e étape.

   Rappeler pourquoi $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k}{\mathrm{N}} - \mathbb{P}(\mathcal{A})\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{N}\varepsilon^2}$ où $\sigma^2 = \operatorname{var}(\mathrm{X}_1)$.

   Comment choisir N pour avoir, avec un risque inférieur à 5%, une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$?

LES INDICATIONS

Ind. 1 : 11 est difficile : montrer que $\omega \in \bigcap_{n} \bigcup_{k \geqslant n} \mathrm{A}_n$.

12 : prendre la négation ☺.

Ind. 14 : Introduire $\mathrm{E}_i =$« première réponse **incorrecte** à la i^e question » pour $i \geqslant 1$.