Dénombrement

Ex 1 On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et *sans* remise, dans un jeu de 32 cartes. Combien de dispositions différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

Ex 2 On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et *avec* remise, dans un jeu de 32 cartes. Combien de dispositions différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

Ex 3 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Dénombrer les applications non surjectives de E dans lui-même.

Ex 4 Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectivement n et p tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Donner le nombre de sous-ensembles X de B vérifiant

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{X} \subset \mathrm{B}.$$

Ex 5 **Principe des tiroirs**.

1) On place $n+1$ boules dans n tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir qui contient au moins 2 boules.
2) On place n boules dans k tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir qui contient au moins $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ boules où, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lceil a \rceil$ désigne l'unique entier tel que $\lceil p \rceil - 1 < a \leqslant \lceil a \rceil$ (c'est la partie entière **supérieure**).
3) **Applications**
   a) Dans une classe de 25 élèves, il y a au moins 3 élèves qui ont le même mois d'anniversaire.
   b) C'est le début de l'année, les 25 élèves découvrent la liste de la classe. Montrer qu'il y a au moins 2 élèves qui connaissent le même nombre de camarades. (on suppose que si l'élève a connaît l'élève b alors, symétriquement, b connaît a mais on ne se connaît pas soi-même, c'est bien connu).

Ex 6 Démontrer que, pour $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Ex 7 Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a + b \geqslant 1$ et $k \in [\![1, a+b]\!]$.
On considère un ensemble E à $a+b$ éléments comportant a éléments du type « **A** » et b éléments du type « **B** ».

1) Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{k-i} = \binom{a+b}{k}$ en interprétant de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments dans E.
2) En déduire une expression sans symbole $\sum$ de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Ex 8 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y = n$.
2) Déterminer le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y \leqslant n$.
3) Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y + z = n$.
4) Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y + z \leqslant n$.

Ex 9 **Nombre d'applications strictement croissantes**.
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Déterminer le nombre d'injections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
2) Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Ex 10 ✍

Nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1) Soit f une application croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Montrer que l'application g de $[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $g(k) = f(k)+k-1$ est une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.

2) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.

3) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Ex 11 ✍

Les nombres p et n étant deux entiers naturels non nuls, déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p.$$

Ex 12 **Nombre de répartitions en groupes de colles dans une classe.**

1) De combien de façon peut-on répartir 6 élèves d'une classe de 6 élèves en groupes de 3 élèves (groupes de colles) ?

2) Même question pour une classe de 9 élèves puis pour une classe de 36 élèves.

3) Généraliser le résultat : déterminer le nombre de groupements de p éléments dans un ensemble à np éléments avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Ex 13 **Nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Ex 14 **1)** De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble E de $n \geqslant 2$ éléments, un couple de sous-ensembles disjoints ?

2) De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble E de $n \geqslant 2$ éléments, une paire de sous-ensembles disjoints non vides ?

Ex 15 ✍

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$, et $\mathcal{P}$ une partition de E. On note k le nombre d'éléments de la partition $\mathcal{P}$ et p le cardinal de l'ensemble $\mathrm{G} = \{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid \exists \mathrm{A} \in \mathcal{P}, (x,y) \in \mathrm{A}^2\}$. Montrer que $n^2 \leqslant kp$.

Ex 16 ✍

On note $|\mathrm{X}|$ le nombre d'éléments d'un ensemble X supposé fini. Soit E un ensemble fini. On pose $n = |\mathrm{E}|$.

1) Calculer $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})} |\mathrm{X}|$.

2) Calculer $\mathrm{S}_1 = \displaystyle\sum_{(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2} |\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}|$ et $\mathrm{S}_2 = \displaystyle\sum_{(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2} |\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}|$.

Les indications

Ind. 15 : Quand on sèche sur une inégalité, on peut penser à...

Ind. 16 : Écrire que $\displaystyle\sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})} |\mathrm{X}| = \frac{1}{2}\left(\sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})} |\mathrm{X}| + \sum_{\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})} |\mathrm{X}^{\mathrm{C}}|\right)$.