Réduction

Exercices d'application

Ex 1 Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) qui à un polynôme P associe le polynôme

$$(2X+1)P-(X^2+1)P'$$

Quels sont les éléments propres de f dans $\mathbb{C}[X]$ (resp. dans $\mathbb{R}[X]$).

Sol. 1) : Soit P ($P \neq 0$) un polynôme propre. Désignons par n son degré, et par a_n ($a_n \neq 0$) son coefficient dominant.
Il existe un scalaire λ tel que

$$(2X+1)P-(X^2+1)P' = \lambda P$$

Le polynôme figurant au premier membre est de degré $\leqslant n+1$ dont le coefficient de X^{n+1} est $2a_n - na_n$.
On a donc $(2-n)a_n = 0$ d'où $n=2$.
P est donc un polynôme de degré 2 : $P = aX^2+bX+c$, avec $a \neq 0$.
On peut d'ailleurs supposer $a=1$ quitte ensuite à multiplier par un scalaire quelconque non nul pour obtenir tous les vecteurs propres.
On considère donc $P = X^2+\alpha X+\beta$.
On écrit $f(P)=\lambda P$. On obtient le système $\begin{cases} \alpha+1=\lambda \ (1) \\ \alpha+2\beta-2=\lambda a \\ \beta-\alpha=\lambda\beta \ (2) \end{cases}$
(1) + (2) donne $\beta+1=\lambda(\beta+1)$.
Si $\beta\neq -1$, on obtient $\lambda=1$ puis $a=0$ et $b=1\neq 1$ et réciproquement $P=X^2+1$ est bien solution.
Donc 1 est valeur propre. En reprenant le système, on a finalement $\boxed{E_1(f)=\mathrm{Vect}\left(X^2+1\right).}$
Supposons maintenant que $\beta=-1$. On obtient $\alpha=\lambda-1$ et, par la dernière équation (intermédiaire)

$$\lambda-1-2-2=\lambda(\lambda-1)$$

soit $\lambda^2-2\lambda+5=0$. On trouve $\lambda=1\pm 2i$.
Donc dans $\mathbb{C}$, on a
$\boxed{E_{1+2i}(f)=\mathrm{Vect}\left(X^2+2iX-1\right)}$ et $\boxed{E_{1-2i}(f)=\mathrm{Vect}\left(X^2-2iX-1\right)}$
En revanche dans $\mathbb{R}$, on a que 1 comme valeur propre et toujours $E_1(f)=\mathrm{Vect}\left(X^2+1\right)$.

Ex 2 À quelles conditions portant sur α, β, la matrice $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&\beta\\ \alpha&\beta&0\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Sol. 2) : $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&\beta\\ \alpha&\beta&0\end{pmatrix}$,
$\chi_A=(X+\beta)(X+\alpha)(X-\alpha-\beta)\left(=X^3+\left(-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2\right)X-\left(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\right)\right)$.

$$\begin{vmatrix}X&-\alpha&-\beta\\ -\alpha&X&-\beta\\ -\alpha&-\beta&X\end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{=} \begin{vmatrix}X&-\alpha&-\beta\\ 0&X+\beta&-\beta-X\\ -\alpha&-\beta&X\end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix}X&-\alpha&-\beta-\alpha\\ 0&X-\beta&0\\ -\alpha&-\beta&X-\beta\end{vmatrix}$$

$$=(X-\beta)\begin{vmatrix}X&\beta-\alpha\\ -\alpha&X-\beta\end{vmatrix} \text{ etc.}$$

On peut remarquer que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre $\alpha+\beta$.

Pour $E_{-\alpha}$, on dispose du vecteur propre $\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ -\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}$,

Pour $E_{-\beta}$, on dispose du vecteur propre $\begin{pmatrix}-\beta\\ -\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}$.

Regardons $\begin{vmatrix}1&\alpha+\beta&-\beta\\ 1&-\alpha&-\beta\\ 1&-\alpha&\alpha+\beta\end{vmatrix}=-(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)$.

• **1er cas** – $(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\neq 0$, la matrice A est diagonalisable.
• **2ème cas** $\beta=-2\alpha$. On suppose (bien sûr) $\alpha\neq 0$.
$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&\alpha&-2\alpha\\\alpha&0&-2\alpha\\\alpha&-2\alpha&0\end{pmatrix}$, $\chi_{\mathrm{A}}=(\mathrm{X}-2\alpha)(\mathrm{X}+\alpha)^2$, on trouve $\mathrm{E}_{-\alpha}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ (on peut aussi se limiter à calculer $\mathrm{rg}(\mathrm{A}+\alpha\mathrm{I}_3)$) donc A n'est pas diagonalisable.
• **3ème cas** $\alpha=-2\beta$. On suppose (bien sûr) $\beta\neq 0$.
$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&-2\beta&\beta\\-2\beta&0&\beta\\-2\beta&\beta&0\end{pmatrix}$, $\chi_{\mathrm{A}}=(\mathrm{X}-2\beta)(\mathrm{X}+\beta)^2$, on trouve $\mathrm{E}_{-\beta}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ donc A n'est pas diagonalisable.

Ex 3

1) Réduire la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-4&12\\1&-2&5\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de toute matrice M commutant avec A (ie : telle que $\mathrm{A}\times\mathrm{M}=\mathrm{M}\times\mathrm{A}$).
   Remarque. Ceci est très particulier à la matrice A.
3) En déduire toutes les matrices M commutant avec A. On justifiera que ces matrices forment un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension et une base.
4) Déterminer l'ensemble des matrices $\mathrm{M}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}^2=\mathrm{A}$.

Sol. 3) : Comme les valeurs propres de A sont simples, les matrices commutant avec A sont diagonales dans toute base de diagonalisation de A (résultat à comprendre et à retenir).
(Si $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$ est une base de v.p. de A alors ils sont v.p. de M car les sous-espaces propres de A sont des droites et sont stables par M).
Ici $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})=\{0,1,2\}$ et une matrice de passage possible est $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}4&-4&2\\-3&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ avec $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\mathrm{diag}(0,1,2)$.
Attention ce résultat est faux en général (si par exemple on a une valeur propre double...).
Ici, $\mathrm{C(A)}=\{\mathrm{M}\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})\mid \mathrm{MA}=\mathrm{AM}\}=\mathrm{Vect}\left\{\mathrm{P}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1},(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
Pour la dernière question, on remarque que si $\mathrm{M}^2=\mathrm{A}$ alors $\mathrm{M}\in\mathrm{C(A)}$ donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ et donc $a^2=0,b^2=1,c^2=2$ d'où 4 matrices racines carrées exactement.

Ex 4 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n complexes vérifiant $\mathrm{A}=\mathrm{B}^2$; les assertions suivantes sont-elles vraies ?
1) Si B est diagonalisable, A l'est aussi.
2) Si A est diagonale, B l'est aussi.
3) Si A est diagonalisable, B l'est aussi.
4) Si $\mathrm{A}=\lambda\,\mathrm{id}$ avec $\lambda\neq 0$ alors B est diagonalisable.
5) (☕) Si A est diagonalisable et inversible, B est diagonalisable.

Sol. 4) :
1) **Vrai.** S'il existe $\mathrm{P}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}=\mathrm{D}$ alors $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^2\mathrm{P}=\mathrm{D}^2$.
2) **Faux.** $\mathrm{B}^2=\lambda\mathrm{I}_n$. Pour $\lambda=0$, prendre $\begin{pmatrix}&&1\\&(0)&\\&&\end{pmatrix}$. Pour $\lambda=1$, on obtient les symétries (qui ne sont pas toutes diagonales).
   Pour $\lambda\neq 0$. Soit α une racine carrée c'est-à-dire vérifiant $\alpha^2=\lambda$. Alors $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{B}$ est une symétrie mais n'est pas nécessairement diagonale.
3) **Faux.** $\mathrm{B}^2=\lambda\mathrm{I}_n$. Pour $\lambda=0$, $\begin{pmatrix}&&1\\&(0)&\\&&\end{pmatrix}$ est un contre-exemple.
   En revanche, supposons $\lambda\neq 0$. Soit α une racine carrée c'est-à-dire vérifiant $\alpha^2=\lambda$. Alors $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{B}$ est une symétrie donc est diagonalisable, il en vient de même de $\mathrm{B}=\alpha\times\left(\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{B}\right)$.

4) Vrai. Soit α une des racines carrées : $\alpha^2 = \lambda$. On a $\left(\frac{1}{\alpha}B\right)^2 = \mathrm{id}$ donc $\frac{1}{\alpha}B$ est une symétrie donc est diagonalisable. Il en est de même de $B = \alpha \times \frac{1}{\alpha}B$.

5) Vrai. Remarquons que A et B commute donc les sous-espaces propres de l'endomorphisme u canoniquement associé à A sont stables par l'endomorphisme v associé à B.
Sur chaque sous-espace propre de u, en choisissant des petites bases,
on a une relation du type $v_i^2 = \lambda_i \,\mathrm{id}_{E_{\lambda_i}(u)}$ avec $v_i = v_{|E_{\lambda_i}(u)}$.
Comme A est inversible, tous les λ_i sont non nuls donc v_i est diagonalisable (reprendre la réflexion du 3)).
On choisit alors pour chaque i une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(u)$ de vecteurs propres des v_i qui sont nécessairement des vecteurs propres de u (puisque $v^2 = u$), on construit en concaténant toutes ces petites bases une base de vecteurs propres communs à u et à v.
Matriciellement, on peut traduire ce qui précède en :

$$P^{-1}AP = D \text{ et } P^{-1}BP = \mathrm{diag}(B_1, \cdots, B_p)$$
$$\text{pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ B_i^2 = \lambda_i I_{\dim E_{\lambda_i}(A)}$$

Donc il existe $P_i \in \mathcal{GL}_{\dim E_{\lambda_i}(A)}(\mathbb{C})$ tel que $P_i^{-1}B_iP_i = D_i'$.
Il vient,

$$Q^{-1}AQ = D \text{ et } Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(D_1', \cdots, D_p')$$
$$\text{avec } Q = P\,\mathrm{diag}(P_1, \cdots, P_p).$$

Ex 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On définit f par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = AM.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

3) f est-il surjectif ? Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

4) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

5) f est-il diagonalisable ?

Sol. 5) :

1) immédiat

2) $M \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow AM = 0$.
En posant $M = [C_1, C_2]$, on voit que $M \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow C_1 \in \mathrm{Ker}\, A$ et $C_2 \in \mathrm{Ker}\, A$.
$\mathrm{Ker}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = V \right\}$. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3) f n'est pas surjectif puisque $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$.
Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, f = 4 - 2 = 2$.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Donc, par dimension, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

4) On sait déjà que 0 est valeur propre et que $\dim E_0(f) = 2$.
En posant $M = [C_1, C_2]$, on voit que $M \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow C_1 \in E_\lambda(A)$ et $C_2 \in E_\lambda(A)$.
Donc pour que λ soit valeur propre de f, il faut que λ soit valeur propre de A (sinon $E_\lambda(f) = \{0\}$).
Or $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 5\}$ et $E_5(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
D'où $E_5(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. On remarque que ici $\mathrm{Im}\, f = E_5(f)$.

5) f est diagonalisable puisque $2 + 2 = 4$.

Ex 6 X 2013

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $a^n\mathrm{M}^n$ ait une limite non nulle.

Sol. 6) : Qui l'eût cru ? Le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$. Trois valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable, et li existe P inversible telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Évidemment, $a^n\mathrm{M}^n$ a une limite finie non nulle si et seulement $a^n\mathrm{D}^n$ aussi. Donc $a = 1/3$.

Ex 7 X 2013

Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ définie par $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'$ est un isomorphisme. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ est nilpotent. Utiliser cette remarque pour donner une expression de l'inverse de φ.

Sol. 7) : Le degré de $\mathrm{P} - \mathrm{P}'$ est égal à celui de P, donc φ est un isomorphisme.
La dérivation est évidemment nilpotente, et dans toute algèbre

$$\mathrm{id} - a^{n+1} = (\mathrm{id} - a)(\mathrm{id} + a + \cdots + a^n).$$

Exercices d'entraînement

Ex 8 X 2013

Quel est le nombre de solutions de $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$? Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$?

Sol. 8) : B est la symétrie orthogonale par rapport à la diagonale de $\mathbb{R}^2$, et est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Si $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ce qui est tout aussi vrai sur $\mathbb{C}$.
Si A vérifie $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}$, $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ vérifie $\mathrm{A}'^2 = \mathrm{D}$, et A' doit être aussi diagonale $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda^2 = 1$ et $\mu^2 = -1$.
Aucune solution dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, quatre dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Ex 9 X 2013

La notation $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou celui des réels.

1) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathrm{A})$ des matrices qui commutent avec A.

2) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable ayant exactement $n-1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$?

3) Même question si A n'est pas diagonalisable.

4) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$?

Sol. 9) : 1) dim $= n$ car on a les matrices diagonales dans une bonne base (cf cours). 2)
2) et 4) vu en cours aussi : la dimension du noyau est celle du commutant, qui est, on le sait, la somme des carrés des dimensions de sous-espaces propres.
3) Seule question qui ne soit pas de la recopie de cours.
Soit $a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
La multiplicité des valeurs propres est 1 pour toutes sauf une.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ les valeurs propres simples, et $\lambda = \lambda_{n-1}$ l'unique valeur propre double.
Comme A n'est pas diagonalisable, $\dim \mathrm{E}_{\lambda_j} = 1$ pour tous les $j \leqslant n-1$ (même pour la valeur propre double), car dès qu'il y a un sous-espace propre de dimension 2, A est diagonalisable. Montrons qu'il existe une base dans laquelle la matrice de a soit de la forme

$$\mathrm{A}'' = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_{n-2})$. Nous savons que la somme des sous-espaces propres est directe. Prenons une famille libre $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ adaptée à cette somme directe et complétons-la en base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$.

La matrice A' de a dans cette base est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} D & 0 & C \\ 0 & \lambda_{n-1} & \mu \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Comme le polynôme caractéristique est $\prod_{j=1}^{n-2}(X-\lambda_j)\times(X-\lambda_{n-1})^2$, nécessairement $\nu = \lambda_{n-1}$. Pour simplifier, notons $\lambda_{n-1} = \lambda$.
Ainsi,

$$A' = \begin{pmatrix} D & 0 & C \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathbb{K}^n = \left(\bigoplus_{j=1}^{n-2} \operatorname{Ker}(a-\lambda_j \operatorname{id})\right) \bigoplus \operatorname{Ker}(a-\lambda \operatorname{id})^2$. Pour cela, déterminons par blocs le noyau de $(A'-\lambda \operatorname{id})^2$.

C'est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} X \\ u \\ v \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} D'^2 & 0 & D'C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,où $D' = D - \lambda I_n$ est inversible.

On voit que c'est un sous-espace de dimension 2 puisque $\operatorname{Ker}\left[(A'-\lambda \operatorname{id})^2\right] = \left\{ \begin{pmatrix} -D'^{-1}Cv \\ u \\ v \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et son intersection avec $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est réduite à $\{0\}$.

Dans cette décomposition en somme directe, $\mathbb{K}^n = \left(\bigoplus_{j=1}^{n-2} \operatorname{Ker}(a-\lambda_j \operatorname{id})\right) \bigoplus \operatorname{Ker}(a-\lambda \operatorname{id})^2$, la matrice de a a la forme

$$A'' = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} & \nu \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } v \neq 0,$$

et la petite astuce en jouant sur le $(n-1)^e$ vecteur permet d'avoir $\nu = 1$. Mais alors les sous-espaces propres de a ainsi que $\operatorname{Ker}(a-\lambda \operatorname{id})^2$ sont stables par b si $a \circ b = b \circ a$.
Cela veut dire qu'une matrice M qui commute avec A'' est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M' & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \gamma$ (calcul) et M' diagonale.
donc $\operatorname{Ker}\Phi$ est de dimension $(n-2)+2 = n$ donc $\operatorname{rg}\Phi = n^2 - n$.

Ex 10 X 2013
Montrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

Sol. 10) : On écrit directement $A = T + U$, T triangulaire supérieure de diagonale $(a_{11}, \dots, a_{jj}, \dots, a_{nn})$, U triangulaire inférieure stricte.
Il suffit de trouver n nombres réels r_j distincts tels que les nombres $a_{jj}+r_j$ soient distincts, et de poser $T' = T + \operatorname{diag}(r_1, \dots r_n)$ et $U' = U - \operatorname{diag}(r_1, \dots r_n)$.
On peut prendre $r_j = \dfrac{1}{N+j}$. Si $1/N$ est strictement inférieur à $\inf_{a_i \neq a_j} |a_i - a_j|/2$, c'est bon. Inutile de trigonaliser la matrice.

Ex 11 X 2013
Soit N une matrice réelle nilpotente d'ordre n, et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice A réelle telle que $A^r = I_n + N$.

Sol. 11) : Si deux fonctions réelles f et g ont un développement limité en 0 à l'ordre n de la forme $f(x) = P(x) + \mathcal{O}(x^n)$ lorsque x tend vers 0, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et de même $g(x) = Q(x) + \mathcal{O}(x^n)$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
alors $f(x)g(x) = R_n(x) + \mathcal{O}(x^n)$, où R est le reste de la division euclidienne de PQ par X^n.
En particulier, $\big(f(x)\big)^r = S(x) + \mathcal{O}(x^n)$, où S est le reste de la division de P^r par x^n.
Dans le cas de $f(x) = (1+x)^{1/r}$, le polynôme P a été vu en cours :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{1/r}{k} X^k, \quad \text{où} \quad \binom{1/r}{k} = \frac{(1/r)(1/r-1)\dots(1/r-k+1)}{k!}.$$

Mais ici, $\big(f(x)\big)^r = 1 + x$,
de sorte que le développement limité de $\big(f(x)\big)^r$ est : $\big(f(x)\big)^r = 1 + x = 1 + x + \mathcal{O}(x^n)$ (avec $\mathcal{O}(x^n) = 0$).
Par unicité du développement limité, $1 + \mathrm{X}$ est le reste de la division de P^r par X^n, de sorte $\mathrm{P}(\mathrm{X})^r = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^n\mathrm{H}(\mathrm{X})$.
On peut appliquer cela à notre matrice N : $\mathrm{P}(\mathrm{N})^r = \mathrm{I}_n + \mathrm{N} + \mathrm{N}^n\mathrm{H}(\mathrm{N}) = \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ car $\mathrm{N}^n = 0$. On peut donc poser $\mathrm{A} = \mathrm{P}(\mathrm{N})$ pour obtenir une solution.

Ex 12 X 2013
Soient A et B deux matrices non semblables dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ayant même trace t et même déterminant d. Montrer que $t^2 = 4d$.

Sol. 12) : A et B ont même spectre, il faut donc qu'elles aient une valeur propre double sinon elles seraient semblables.

Ex 13 X 2013
Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont *semblables sur* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{B}$.
On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Sol. 13) : Classique. Il existe $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + i\mathrm{P}_2$ inversible telle que $\mathrm{PA} = \mathrm{BP}$. Séparons partie réelle et imaginaire : $\mathrm{P}_1\mathrm{A} = \mathrm{BP}_1$ et $\mathrm{P}_2\mathrm{A} = \mathrm{BP}_2$. Le polynôme $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{P}_1 + \mathrm{XP}_2)$ n'est pas identiquement nul, car $\mathrm{H}(i)$ est non nul.
Donc il existe une infinité de réels λ tels que $\mathrm{P}(\lambda)$ ne soit pas nul. On prend $\mathrm{P}_1 + \lambda\mathrm{P}_2$, où λ est l'un d'eux.
Réf. RMS PC X 2013, exo 38

Ex 14 Centrale 2013

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
2) Si M n'est pas diagonalisable, montrer que M est semblable à la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ où $a_{1,3} = 1$, les autres coefficients étant nuls.
3) Calculer M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Sol. 14) :

1) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, de rang 1. La trace est $\operatorname{tr}\mathrm{M} = x^2 + y^2 + z^2$ mais les nombres x, y, z, sont complexes, donc il se pourrait que $x^2 + y^2 + z^2$ soit nul.
La CNS de diagonalisabilité reste donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.
2) On a $\mathrm{M}^2 = 0$ et $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = 2$. $\operatorname{Im}\mathrm{M} = \operatorname{Vect}(e_3) \subset \operatorname{Ker}\mathrm{M}$.
On prend un e_2 tel que $e_3 = \mathrm{M}e_2$, on complète (e_2) en (e_1, e_2) dans $\operatorname{Ker}\mathrm{M}$ et on vérifie que (e_1, e_2, e_3) est libre donc forme une base satisfaisante.
3) $\mathrm{M}^p = (\operatorname{tr}\mathrm{M})^{p-1} \cdot \mathrm{M}$

Réf. RMS PC Centrale 2013, exo 208

Ex 15 X 2013
Si $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, existe-t-il $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{X}$?

Sol. 15) : Contre-exemple classique $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\mathrm{X} = \mathrm{M}^2$, $\mathrm{M}^4 = 0$ donc $\mathrm{M}^2 = \mathrm{X} = 0$.

Réf. RMS PC X 2013, exo 42

Ex 16 Mines 2013
Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$, $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$, les autres coefficients étant nuls. Existe-t-il $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^p = \mathrm{N}$?

Sol. 16) : *Première solution.* $\mathrm{M}^{n-1} \neq 0$ (il y a juste un 1 tout en haut à droite). Or $\mathrm{A}^{pn} = 0$, donc $\mathrm{A}^n = 0$.
Comme $p \geqslant 2$, $p(n-1) \geqslant n$, donc $\mathrm{A}^{p(n-1)} = \mathrm{M}^{n-1} = 0$, ce qui contredit le fait que $\mathrm{M}^{n-1} \neq 0$.
Deuxième solution. Les vecteurs ε_1, $\mathrm{N}\varepsilon_1$, ..., $\mathrm{N}^{n-1}\varepsilon_1$ sont indépendants. Comme A commute avec N, A est un polynôme en N, obligatoirement sans terme constant (sinon il ne serait pas nilpotent). Mais alors $\mathrm{A} = a_1\mathrm{N} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{N}^{n-1}$. Donc A^p a ses coefficients juste au-dessus de la diagonale nuls. Donc A^p ne peut pas être N.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 122

Ex 17 Mines 2013
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Sol. 17) : En restant dans le strict cadre du programme 2015, on sait que toute valeur propre est racine du polynôme annulateur $P = X^2 - X + 1$ dont les racines sont ω et $\overline{\omega}$ complexes non réelles.
Les valeurs propres de A font partie de $\{\omega, \overline{\omega}\}$, et ont même multiplicité.
Donc n est pair et $\chi_A = (X-\omega)^{n/2}(X-\overline{\omega})^{n/2}$. Le produit des racines est donc $(\omega\overline{\omega})^{n/2} = 1$.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 125

Ex 18 Mines 2013
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}$ tels que $P(A)$ est nilpotente.

Sol. 18) : Après trigonalisation de A, on voit immédiatement que ce sont ceux qui ont les valeurs propres de A parmi leurs racines.
En effet, si A est triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont les images par P de ceux de A, et c'est sur eux seulement que repose la nilpotence de $P(A)$.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 126

Ex 19 Mines 2013
Soit $P \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geqslant 0$. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(P(A)) \geqslant 0$.

Sol. 19) : Après trigonalisation, on peut supposer A triangulaire de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_q, z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \dots)$.
La diagonale de $P(A)$ est

$$(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_q), P(z_1), P(\overline{z_1}), P(z_2), P(\overline{z_2}), \dots),$$

où les λ_j sont réels. Alors $P(z_k)P(\overline{z_k}) = P(z_k)\overline{P(z_k)}$ réel positif, et, par hypothèse, $P(\lambda_j) \geqslant 0$.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 127

Ex 20 ✍ Mines 2013
Soient $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $m_{n,i} = a_i$, $m_{i,n} = b_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls. À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?

Sol. 20) : Indication On rappelle qu'un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il a les deux propriétés suivantes : (1) $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe ; (2) la restriction f' de f à $\operatorname{Im} f$ est diagonalisable. C'est particulièrement utile lorsque f est de rang petit.
D'abord, si tous les a_j sont nuls ou si tous les b_i sont nuls, la matrice est nilpotente, donc non diagonalisable.
Nous supposerons donc qu'au moins un des a_j est non nul et au moins un des b_i aussi. Soit alors C le vecteur qui est la dernière colonne de M, de sorte que $M = (a_1\varepsilon_n \quad a_2\varepsilon_n \quad \dots \quad a_{n-1}\varepsilon_n \quad C)$.
Il est clair que l'image de f (de matrice M dans la base canonique) est $\operatorname{Vect}(C, \varepsilon_n)$ de dimension exactement 2.
Alors f est diagonalisable si et seulement si elle a les deux propriétés suivantes :
(1) $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe ;
(2) la restriction f' de f à $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(C, \varepsilon_n)$ est diagonalisable.
Examinons les deux dans l'ordre.
Comme l'image est de petite dimension nous considérons un vecteur $xC + y\varepsilon_n$ est nous regardons s'il est dans le noyau.
Observons que $f(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} b_i f(\varepsilon_i) = s\varepsilon_n$ où $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i$.
Donc $f(xC + y\varepsilon_n) = xs\varepsilon_n + yC$. Si $s \neq 0$, $xC + y\varepsilon_n$ est dans le noyau de f si et seulement si x et y sont nuls, autrement dit l'image et le noyau de f sont bien en somme directe. Sinon, f n'est pas diagonalisable.
Supposons donc que s ne soit pas nul.
L'expression de $f(C)$ montre que la matrice de f' dans la base (C, ε_n) de l'image de f est : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}$.
On sait bien qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si s est strictement positive.
Finalement, f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i > 0$. **Réf.** RMS PC Mines 2013, exo 129

Ex 21 Mines 2013
Soient B et M dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M possède n valeurs propres distinctes. Montrer que B et M commutent si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{C}$ tel que $B = P(M)$.

Sol. 21) : Réf. Vu en cours, utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 138

Ex 22 ✍ X 2018 RMS
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg \mathrm{B} = n+1$. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(\mathrm{P})$ le reste de la division euclidienne de AP par B.
1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) On suppose que B possède $n+1$ racines réelles distinctes. Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
3) Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus B simplement scindée ?

Sol. 22) : 1) Sans difficulté en utilisant l'unicité de la division euclidienne.
2) Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ les racines (deux à deux distinctes) de B.
Soient $(\mathrm{L}_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ les polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ tels

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \ \ \mathrm{L}_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}.$$

Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, posons $\mathrm{R}_i = \Phi(\mathrm{L}_i) \in \mathbb{R}_n[X]$ et écrivons la division euclidienne $\mathrm{A}(\alpha_j)\mathrm{L}_i(\alpha_j) = \mathrm{B}(\alpha_j)\mathrm{Q}_i(\alpha_j) + \mathrm{R}_i(\alpha_j)$. Comme $\mathrm{B}(\alpha_j) = 0$,

$$\mathrm{R}_i(\alpha_j) = \mathrm{A}(\alpha_j)\,\delta_{i,j},$$

ce qui montre par unicité du polynôme interpolateur que

$$\mathrm{R}_i = \mathrm{A}(\alpha_i)\,\mathrm{L}_i = \Phi(\mathrm{L}_i)\,.$$

Ainsi les L_i sont des vecteurs propres de valeurs propres $\mathrm{A}(\alpha_i)$. Comme, de plus, $(\mathrm{L}_1, \cdots, \mathrm{L}_{n+1})$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, Φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{\mathrm{B}(\alpha_i),\ i \in [\![1, n]\!]\}$.
3) Un contre-exemple naturel est : $\mathrm{A} = X$ et $\mathrm{B} = X^{n+1}$. La matrice de l'endomorphisme est nilpotente donc non diagonalisable.

Ex 23 Mines 2013
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, v la restriction de u à $\mathrm{Im}\, u$.

1) Comparer $\mathrm{tr}\, u$ et $\mathrm{tr}\, v$.
2) On suppose v diagonalisable. L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?

Sol. 23) : Complétons l'image de u pour avoir une somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,\mathrm{U} \oplus \mathrm{F}$.
1) La décomposition par blocs de la matrice de u dans une base adaptée à une telle décomposition sera :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où A est carrée, même si B n'est pas nulle. Bien-sûr, A est la matrice de v, et sa trace est celle de M.
2) Non, bien-sûr. Il faut que le noyau et l'image soient en somme directe. La décomposition par blocs ci-dessus donne tous les contre exemples qu'on veut avec de la nilpotence.
Réf. RMS PC Mines 2013, exo 134

Ex 24 Centrale 2013
Python. Soit A_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et telle que tous les coefficients de la j-ième colonne, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, sont égaux à j excepté le terme diagonal.

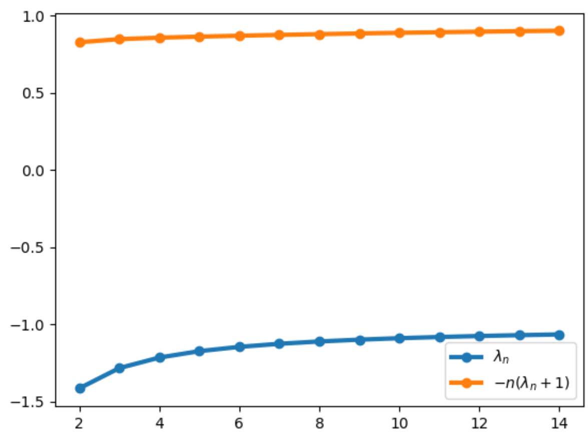
1) Écrire une procédure donnant A_n. Trouver les valeurs propres de A_4 avec Python .
2) Montrer que toute valeur propre λ de A_n vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
3) Montrer que la matrice A_n est diagonalisable.
4) Soit λ_n la valeur propre de A_n appartenant à $]-2, -1[$. Déterminer la limite de (λ_n) et donner un développement asymptotique de λ_n.

Sol. 24) :

1)

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as l
import matplotlib.pyplot as plt


def An(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i != j:
                A[i, j] = j + 1  # attention au décalage d'indice
    return A

def lambdan(n):
    spectre = l.eigvals(An(n))

    return spectre[1]  # deuxième valeur propre

for n in range(3, 6):
    A = An(n)
    print(A)

for n in range(3, 10):
    A = An(n)
    print(l.eigvals(A))

N = 15  # après ce n'est pas terrible
X = list(range(2, N))
Y = [lambdan(n) for n in X]
Z = [-n*(lambdan(n) + 1) for n in X]

plt.plot(X, Y, 'o-', lw=3, label='$\lambda_n$')
plt.plot(X, Z, 'o-', lw=3, label='$-n(\lambda_n+1)$')

plt.legend(loc='best')
plt.show()
```

```
[[ 0.  2.  3.]
 [ 1.  0.  3.]
 [ 1.  2.  0.]]
[[ 0.  2.  3.  4.]
 [ 1.  0.  3.  4.]
 [ 1.  2.  0.  4.]
 [ 1.  2.  3.  0.]]
[[ 0.  2.  3.  4.  5.]
 [ 1.  0.  3.  4.  5.]
 [ 1.  2.  0.  4.  5.]
 [ 1.  2.  3.  0.  5.]
 [ 1.  2.  3.  4.  0.]]
[ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]
[ 7.1061962  -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
[ 11.44231016  -1.17296054  -4.55411092  -2.29824522  -3.41699348]
[ 16.77702817  -1.14511899  -2.25239769  -3.35079565  -5.57619903
  -4.45251681]
[ 23.11111335  -1.12515147  -2.21933453  -6.59379563  -3.3044764
  -4.38869406  -5.47966126]
[ 30.44487748  -1.11011945  -2.19427979  -7.60828372  -3.26983177
  -4.34290024  -6.50141829  -5.41804421]
[ 38.7784653   -1.0983839   -8.6205059   -2.17459354  -3.24278094
  -7.51943276  -4.30787443  -5.37309448  -6.44179936]
```



2) • Première méthode : on écrit le système.

Analyse

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n)$, il existe (x_i) non tous nul tel que $\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$.

On arrive pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx_k = (\lambda + i)x_i = \mathrm{S}$.

Remarquons que l'on ne peut avoir $\lambda + i = 0$, sinon tous les x_j sont nuls sauf peut-être x_i puis finalement $x_i = 0$ en reportant dans la bonne équation.

On a donc $\mathrm{S} \neq 0$ et $x_i = \dfrac{\mathrm{S}}{\lambda + i}$.

Puis $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}k}{\lambda + k}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

Synthèse

Soit λ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

Posons $x_i = \dfrac{1}{\lambda + i}$ (on a pris mentalement $\mathrm{S} = 1$).

On voit que l'on a bien pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx_k = (\lambda + i)x_i$, donc $\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

• Deuxième méthode : on calcule le polynôme caractéristique en utilisant la n-linéarité (et le caractère alterné).
On a avec $\mathrm{U} = {}^t(1, 1, \cdots, 1)$ et (e_i) la base canonique, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}_n}(\lambda) &= \det_{can.}\left(-1\mathrm{U} + (\lambda + 1)e_1, \cdots, -k\mathrm{U} + (\lambda + k)e_k, \cdots, -n\mathrm{U} + (\lambda + n)e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det_{can.}\Big((\lambda + 1)e_1, \cdots, \widehat{-k\mathrm{U}}, \cdots, (\lambda + n)e_k\Big) \\
&\qquad + \det_{can.}\left((\lambda + 1)e_1, \cdots, (\lambda + k)e_k, \cdots, -n\mathrm{U} + (\lambda + n)e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-k) \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\lambda + j) + \prod_{j=1}^{n} (\lambda + j).
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\lambda + j) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda + j) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$

car si $\lambda \in \{-1, \cdots, -n\}$, on n'a pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\lambda + j) = 0$ car on aurait pour $\lambda = -k$, $\displaystyle\prod_{j=1, j\neq k}^{n} (k + j) = 0$ impossible.

3) On étudie la fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-n, \cdots, -1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} - 1 \end{array}\right.$ qui est strictement décroissante, continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -n[,]-n, -n+1[$ etc.

On a $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = -1$, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\lim_{x \to (-k)^+} \varphi(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to (-k)^-} \varphi(x) = -\infty$ donc on a des petites bijections sur $]-n, n+1[, \cdots]-2, -1[,]-1, +\infty[$ qui s'annulent, d'où l'existence de n valeurs propres réelles sur ces intervalles.

4) En particulier on note λ_n celle appartenant à $]-2,-1[$.

On a $\dfrac{-1}{\lambda_n+1}=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\lambda_n+k}-1$. Or pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_n+k\in]-2+k,-1+k[$ donc

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\lambda_n+1}&\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}-1\\&\geqslant(n-1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-1\\&\geqslant n-2\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=-1$.

Écrivons que $\lambda_n=-1-\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et $\varepsilon_n\in]0,1[$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_n}&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1-\varepsilon_n}-1=n-1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1+\varepsilon_n}{k-1-\varepsilon_n}-1\\&=n-1+\frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1+\varepsilon_n}{k-1-\varepsilon_n}-1\end{aligned}$$

On peux peut-être penser que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1+\varepsilon_n}{k-1-\varepsilon_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$

Démontrons quelque chose de proche, on utilise Cesaro

Pour $k\geqslant3$,

$$0\leqslant\frac{1+\varepsilon_n}{k-1-\varepsilon_n}-\frac{1}{k-1}=k\frac{\varepsilon_n}{(k-1)\,(k-\varepsilon_n-1)}\leqslant\frac{k}{(k-1)(k-2)}\varepsilon_n$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1+\varepsilon_n}{k-1-\varepsilon_n}-\frac{1}{k-1}\right)&\leqslant\varepsilon_n\cdot\sum_{k=3}^{n}\frac{k}{(k-1)(k-2)}\\&\leqslant\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(\varepsilon_n\cdot n)\\&=\underset{n\to+\infty}{o}(n)\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{\varepsilon_n}=n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n$ donc $\lambda_n=-1-\dfrac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Et on peut réinjecter et tenter de recommencer...

Réf. RMS PC Centrale 2013, exo 212

Ex 25 Centrale 2013

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $(X_1,\dots,X_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

1) Montrer que ${}^t A$ est diagonalisable.

2) Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres $(Y_1,\dots,Y_n)$ de ${}^tA$ telle que : $A=\lambda_1X_1{}^tY_1+\lambda_2X_2{}^tY_2+\dots+\lambda_nX_n{}^tY_n$ avec ${}^tX_iY_j=\delta_{i,j}$ pour $1\leqslant i,j\leqslant n$.

Sol. 25) : 1) Pour $P=(X_1\ \ \dots\ \ X_n)$, $P^{-1}AP=D$, et en transposant : ${}^tP{}^tA{}^tP^{-1}=D$.
Cela veut dire qu'une matrice de passage pour la diagonalisation de ${}^tA$ est : ${}^tP^{-1}=(Y_1\ \ \dots\ \ Y_n)$ avec Y_i v.p. de ${}^tA$.

2) Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}{}^tY_1\\ \dots\\ {}^tY_n\end{pmatrix}$. La relation $A=PDP^{-1}$ s'écrit donc : $A=(X_1\ \ \dots\ \ X_n)\,D\begin{pmatrix}{}^tY_1\\ \dots\\ {}^tY_n\end{pmatrix}$.

Ainsi, $A=\lambda_1X_1{}^tY_1+\lambda_2X_2{}^tY_2+\dots+\lambda_nX_n{}^tY_n$ (en écrivant que $D=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_iE_{i,i}$).

De plus $P\,{}^tP=I_n$ donne $(X_1\ \ \dots\ \ X_n)\begin{pmatrix}{}^tY_1\\ \dots\\ {}^tY_n\end{pmatrix}=I_n$ donc ${}^tX_iY_j=\delta_{i,j}$ pour $1\leqslant i,j\leqslant n$.

Réf. RMS PC Centrale 2013, exo 215

Ex 26 ✍ X 2013

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ distincts tels que $A + \lambda B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Sol. 26) : Classique. Pour (i, j) fixé, notons $P_{i,j} \in \mathbb{R}$ le coefficient d'indice (i, j) de $(A + XB)^n$. C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n + 1$ racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il est donc nul, et pour tout réel λ, $P_{i,j}(\lambda) = 0$. C'est vrai pour tout (i, j). Donc pour tout λ, $(A + \lambda B)^n = 0$.
Avec $\lambda = 0$, on a A nilpotente.
Puis, pour $\lambda \neq 0$, $\left(\frac{1}{\lambda}A + B\right)^n = 0$ donc pour $n + 1$ λ distincts.
Donc pour tout x (même nul), $(xA + B)^n = 0$.
En $x = 0$, on obtient B nilpotente.
Réf. RMS PC X 2013, exo 44

Ex 27 Mines 2013

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

1) Exprimer le spectre de B en fonction de celui de A.
2) On suppose que A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable.

Sol. 27) : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors, pour $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} pI_n & qI_n \\ rI_n & sI_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathcal{P}^{-1}B\mathcal{P} = \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{2})A & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{2})A \end{pmatrix}.$$

il est alors facile de récupérer le spectre de A, c'est $(1 - \sqrt{2})\,\mathrm{Sp}(A) \cup (1 + \sqrt{2})\,\mathrm{Sp}(A)$.
2) Soit R inversible telle que $R^{-1}AR = D$.
On pose $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, on a alors $\mathcal{Q}^{-1}\left(\mathcal{P}^{-1}B\mathcal{P}\right)\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{2})D & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{2})D \end{pmatrix}$.
On a donc bien diagonalisé B avec la matrice de passage $\mathcal{P}\mathcal{Q}$.
(on a bien sûr $\mathcal{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$)
Réf. RMS PC Mines exo 137.

Exercices d'approfondissement

Ex 28 Mines 2014

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1) On suppose M diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que M soit diagonalisable.

Sol. 28) : Indication Une solution conforme au nouveau programme est nécessaire, et tout-à-fait éclairante. On écrit tout par bloc et on s'intéresse à $E_\lambda(M)$ selon les valeurs de λ. Il faudra distinguer le cas $\lambda = 1$. Si $\lambda \neq 1$, montrer que $\dim E_\lambda(M) = \dim E_\lambda(B)$.
1) Un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est dans $E_\lambda(M)$ si et seulement si

$$\begin{cases} X + AY = \lambda X \\ BY = \lambda Y \end{cases} \tag{1}$$

Il faut distinguer deux cas.
Si $\lambda \neq 1$, ce système dit que $Y \mapsto \left(\frac{1}{\lambda - 1}AY, Y\right)$ est linéaire bijective de $E_\lambda(B)$ sur $E_\lambda(M)$.

En particulier $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$. Si $\lambda = 1$, alors $\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})$ si et seulement si $\mathrm{BY} = \mathrm{Y}$ et $\mathrm{AY} = 0$, le vecteur X ayant la valeur qu'on voudra. Cela veut dire que $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})$ est le produit de $\mathbb{R}^n$ par le sous-espace $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$.
Cela entraîne que $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) = n + \dim(\mathrm{E}_1(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}) \leqslant n + \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{B})$. Si M est diagonalisable,

$$\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) = 2n - \sum_{\lambda \neq 1} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = 2n - \sum_{\lambda \neq 1} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}).$$

Mais alors $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{B}) \geqslant \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) - n \geqslant n - \sum_{\lambda \neq 1} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$, ce qui entraîne que B est diagonalisable.
2) Réciproquement, si B est diagonalisable, pour que M soit diagonalisable, il faut que l'inégalité $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) \leqslant n + \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{B})$ devienne une égalité, c'est-à-dire que $\mathrm{E}_1(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$. La condition demandée est donc que A s'annule sur $\mathrm{E}_1(\mathrm{B}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B} - \mathrm{I}_n)$.
Réf. RMS14 Mines exo 152

Ex 29 ✍ Mines 2013
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{M} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\ldots(\mathrm{X}-n)$. Trouver le nombre de sous-espaces de E stables par u.

Sol. 29) : Lorsqu'un endomorphisme est diagonalisable, les sous-espaces stables sont les sommes directes de sous-espaces des sous-espaces propres. Ici, ces dernières sont de dimension 1. Il y a donc 2^n sous-espaces stables.
Réf. RMS14 Mines exo 153

Ex 30 X 2018 RMS
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M et $-\mathrm{M}$ sont semblables si et seulement si $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Sol. 30) : Même méthode que l'exercice précédent.
Si M est diagonalisable, on la diagonalise. Si les valeurs propres sont distinctes, elles doivent être opposées, et, en échangeant les vecteurs propres d'une base de diagonalisation de M, on voit que M et M^{-1} sont semblables.
Si M a une seule valeur propre, ce ne peut être que 0. Si M n'est pas nulle et est non diagonalisable, elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est semblable à son opposée. La condition est évidemment équivalente à la trace (somme des valeurs propres) nulle dans tous les cas.

Ex 31 X 2018 RMS
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E. On suppose qu'ils commutent.
1) Si les u_i sont tous diagonalisables, montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.
2) Si les u_i sont tous trigonalisables, montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

Sol. 31) : Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace stable par u.
On suppose que u est diagonalisable. Alors l'endomorphisme u_F de F restriction de u est diagonalisable.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{E}_\lambda(u) \cap \mathrm{F}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u_\mathrm{F})$. Avec $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$, on décompose un vecteur quelconque $x \in \mathrm{F}$ en $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in \mathrm{E}_\lambda(u)$. Pour tout polynôme P, par stabilité de F, $\mathrm{P}(u)(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{P}(\lambda) x_\lambda \in \mathrm{F}$.
Considérons les polynômes de Lagrange P_λ vérifiant $\mathrm{P}_\lambda(\mu) = \delta_\lambda^\mu$ pour $(\lambda, \mu) \in (\mathrm{Sp}(u))^2$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,

$$\mathrm{P}_\lambda(u)(x) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{P}_\lambda(u)(x_\mu) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{P}_\lambda(\mu)(x_\mu) = x_\lambda,$$

ce qui prouve que $\mathrm{F} \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{E}_\lambda(u) \cap \mathrm{F})$. L'inclusion réciproque est évidente. □

1) On raisonne par récurrence sur le nombre p d'endomorphismes. Soit $p \geqslant 2$. Les valeurs propres de u_p sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_k}$ de u_p sont stables par chacun des u_i, $i \leqslant p-1$, ce qui définit pour chaque couple (m,i) $(m = 1, \ldots, k,\ i = 1, \ldots, p-1)$ un endomorphisme $u_{m,i} = u_{i|\mathrm{E}_{\lambda_m}(u_p)}$ de $\mathrm{E}_{\lambda_m}(u_p)$ restriction de u_i. Par le lemme précédent, la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Donc, pour chaque m, les endomorphismes $u_{m,i}$ de $\mathrm{E}_{\lambda_m}(u_p)$ sont diagonalisables et commutent. Par l'hypothèse de récurrence et pour chaque

$m = 1, \dots, k$, il existe une base de diagonalisation commune des $u_{m,i}$, $i = 1, \dots, p-1$. La concaténation de ces bases donne une base de E de vecteurs propres des endomorphismes u_i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, mais aussi par construction de u_p, ce qui achève la preuve.
2) Raisonnons par récurrence sur la dimension de E pour montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation. Si tous les endomorphismes sont des homothéties, il n'y a rien à faire, sinon considérons λ une valeur propre de u_1 supposée ne pas être une homothétie (ainsi, $\dim \mathrm{E}_\lambda(u_1) < \dim \mathrm{E}$). Le sous-espace $\mathrm{E}_\lambda(u_1)$ est stable par les u_i. La restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé a un polynôme caractéristique scindé (qui divise le précédent). Donc on peut appliquer une hypothèse de récurrence sur la dimension de l'espace et trigonaliser simultanément toutes les restrictions des u_i à $\mathrm{E}_\lambda(u_1)$.
Ensuite, on considère un supplémentaire quelconque E' de $\mathrm{E}_\lambda(u_1)$ et on écrit la matrice de chaque u_i dans, d'une part, une base $\mathscr{B}'$ de trigonalisation commune pour les restrictions à $\mathrm{E}_\lambda(u_1)$ et, d'autre part, une base quelconque de E'. Chaque u_i a alors dans cette base une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{T}_i & \mathrm{A}_i \\ 0 & \mathrm{B}_i \end{pmatrix}$. Toujours par hypothèse de récurrence sur la dimension, on peut trigonaliser simultanément les B_i (car elles commutent deux à deux). Un base de trigonalisation commune des B_i fournira une nouvelle base $\mathscr{B}''$ de E' qui formera avec $\mathscr{B}'$ une base de trigonalisation commune de tous nos endomorphismes.

Ex 32 ✍ X 2018 RMS
1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer que z est une racine de l'unité.
Soit $\mathrm{G} \subset \mathcal{GL}_d(\mathbb{C})$ fini, non vide, stable par produit et par passage à l'inverse.
2) Montrer que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = \mathrm{I}$.
3) Soit $g \in \mathrm{G} \setminus \{\mathrm{I}_d\}$. Montrer que $\mathrm{tr}(g) \neq d$.

Sol. 32) : 1) Il existe $b > a$ tel que $z^b = z^a$ donc $z^{b-a} = 1$ puisque $z \neq 0$.
2) De même, puisque $\{g^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini, il existe $b > a$ tel que $g^{b-a} = \mathrm{I}_d$.
3) Puisque $g^k = \mathrm{id}$, les valeurs propres de g sont parmi les racines k-ième de l'unité. Supposons que $\mathrm{tr}(g) = d$.
Puisque $\mathrm{tr}(g) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_k$, $d = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{d} |\lambda_k| \leqslant d$.
Il y a donc égalité, les (λ_k) sont tous colinéaires avec des coefficients $\geqslant 0$, ce qui implique qu'ils sont tous égaux et finalement, puisque $\mathrm{tr}(g) = d$, tous égaux à 1. Ainsi $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$.
Supposons, par l'absurde, que g ne soit pas diagonalisable, les lemmes suivants donnent une caractérisation très utile des endomorphismes non diagonalisables.

Lemme On suppose $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable, alors

$$\mathrm{M} \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}),\ \mathrm{Ker}\ (\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^2\right].$$

Démonstration. Lorsque M est diagonalisable, il est clair que $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^k\right]$ pour tout $k \geqslant 1$, en particulier $k = 2$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^2\right]$. Donc

$$\mathrm{Ker}\ (\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^2\right] = \cdots = \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^{m(\lambda)}\right],$$

d'après la *propriété des noyaux itérés* selon laquelle si un endomorphisme u d'un espace vectoriel vérifie $\mathrm{Ker}\, u^p = \mathrm{Ker}\, u^{p+1}$, alors, pour tout $k \geqslant p+1$, $\mathrm{Ker}\,(u^p) = \mathrm{Ker}\,(u^k)$. D'après le *lemme de dimension spectrale* que nous allons prouver à la fin de l'exercice, si $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de M, alors $\dim \mathrm{Ker}\ \left[(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)^{m(\lambda)}\right] = m(\lambda)$. Cela entraîne le résultat puisque, alors, le polynôme caractéristique de M étant scindé,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} m(\lambda) = \dim \mathrm{E},$$

et donc M est diagonalisable. □

Lemme de caractérisation des endomorphismes non diagonalisables Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_M scindé, c'est-à-dire M trigonalisable.
Alors, M est non diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un plan stable $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ dans lequel la matrice de la restriction à P de l'endomorphisme canoniquement associé à M est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Démonstration. On prend $x \in \operatorname{Ker}\left[(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)^2\right] \setminus \operatorname{Ker}(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)$ lorsque M n'est pas diagonalisable. Le plan P vectoriel engendré par

$$e_1 = (\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)\, x,\ e_2 = x$$

est stable et répond à la question. □

D'après le lemme précédent, g admet une représentation matricielle de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ & & * & * \\ (0) & & * & * \end{pmatrix}$. Alors g^k admet une représentation matricielle de la forme $\begin{pmatrix} 1 & k & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ & & * & * \\ (0) & & * & * \end{pmatrix} \neq \mathrm{I}_d$, absurde.
Ainsi, g est diagonalisable avec pour seule valeur propre 1 donc $g = \mathrm{I}_d$.
Montrons maintenant le lemme suivant.

Lemme (dimension spectrale) Soient $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de M de multiplicité $m(\lambda)$ (dans le polynôme caractéristique de M).
Alors le *sous-espace spectral* $\operatorname{Ker}\left((\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m(\lambda)}\right)$ est de dimension $m(\lambda)$.

Démonstration. Si l'on trigonalise M en regroupant les valeurs propres communes, et en choisissant λ pour première valeur propre, M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_{m(\lambda)} + \mathrm{N} & * \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$, avec B triangulaire, N nilpotente et $\det(\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_{n-m(\lambda)}) \neq 0$. Donc $(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m(\lambda)}$ est semblable à $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_{n-m(\lambda)})^{m(\lambda)} \end{pmatrix}$ et $\left(\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_{n-m(\lambda)}\right)^{m(\lambda)}$ est inversible. Le noyau de M' est $\operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_{m(\lambda)})$. Donc

$$\dim \operatorname{Ker}\left[(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m(\lambda)}\right] = m(\lambda).$$

□

Remarque. Ce *lemme de dimension spectrale* entraîne la version suivante de ce qu'on appelle le *lemme des noyaux* :

Théorème

Soit u un endomorphisme de E *de dimension finie (quelconque) de polynôme caractéristique* $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{n_i}$. *Alors* E *est la somme directe des* $\mathrm{F}_i = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i \operatorname{id})^{n_i}$.

Démonstration. D'après le lemme de dimension spectrale, chaque *sous-espace spectral* $\mathrm{F}_i = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i \operatorname{id})^{n_i}$ est de dimension exactement n_i. Pour démontrer le lemme des noyaux, il suffit donc de montrer que la somme des F_i est directe. Pour cela, soient $x_1 \in \mathrm{F}_1, \ldots, x_p \in \mathrm{F}_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$. Supposons par l'absurde (quitte à réindexer les λ_i), que x_p *ne soit pas nul.* Il existe un plus grand entier k tel que $(u-\lambda_p \operatorname{id})^k(x_p) = x_p'$ soit *non nul.* Remarquons alors que $u(x_p') = \lambda_p x_p'$. Soit $v = \prod_{i=1}^{p-1} (u-\lambda_i \operatorname{id})^{n_i}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 = v \circ (u-\lambda_p \operatorname{id})^k \Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\Big) &= (u-\lambda_p \operatorname{id})^k \circ v\Big(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\Big) + v \circ (u-\lambda_p \operatorname{id})^k(x_p) \\ &= 0 + v(x_p') = v(x_p') = \Big(\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p-\lambda_i)^{n_i}\Big) x_p', \end{aligned}$$

Cela contredit la non-nullité de x_p'. □

Ex 33 ✍ X 2018 RMS
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$ converge.

2) On suppose que la somme est égale à I_n. Montrer que M est diagonalisable.

Sol. 33) : 1) Voir exercice précédent.
2) Supposons M non diagonalisable.
Utilisons le lemme très utile suivant dont on trouve une démonstration dans les compléments de cours.

Lemme de caractérisation des endomorphismes non diagonalisables Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_{M} scindé, c'est-à-dire M trigonalisable.
Alors, M est non diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un plan stable $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ dans lequel la matrice de la restriction à P de l'endomorphisme canoniquement associé à M est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

En utilisant le lemme précédent, on aurait $\exp \mathrm{A} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \neq \mathrm{I}_2$, ce qui est absurde.