RÉDUCTION

Exercices d'application

Ex 1 Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) qui à un polynôme P associe le polynôme

$$(2X + 1)P - (X^2 + 1)P'$$

Quels sont les éléments propres de f dans $\mathbb{C}[X]$ (resp. dans $\mathbb{R}[X]$).

Ex 2 À quelles conditions portant sur α, β , la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Ex 3

1) Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de toute matrice M commutant avec A (ie : telle que $A \times M = M \times A$).

Remarque. Ceci est très particulier à la matrice A .

3) En déduire toutes les matrices M commutant avec A . On justifiera que ces matrices forment un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension et une base.

4) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

Ex 4 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n complexes vérifiant $A = B^2$; les assertions suivantes sont-elles vraies ?

- 1) Si B est diagonalisable, A l'est aussi.
- 2) Si A est diagonale, B l'est aussi.
- 3) Si A est diagonalisable, B l'est aussi.
- 4) Si $A = \lambda \text{id}$ avec $\lambda \neq 0$ alors B est diagonalisable.
- 5) (☛) Si A est diagonalisable et inversible, B est diagonalisable.

Ex 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On définit f par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM.$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- 3) f est-il surjectif? Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- 4) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 5) f est-il diagonalisable ?

Ex 6 X 2013

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $a^n M^n$ ait une limite non nulle.

Ex 7 X 2013

Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P - P'$ est un isomorphisme. Montrer que l'endomorphisme $P \mapsto P'$ est nilpotent. Utiliser cette remarque pour donner une expression de l'inverse de φ .

Exercices d'entraînement

Ex 8 X 2013

Quel est le nombre de solutions de $A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$? Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$?

Ex 9 X 2013

La notation $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou celui des réels.

- 1) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A .
- 2) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable ayant exactement $n - 1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(M) = AM - MA$?
- 3) Même question si A n'est pas diagonalisable.
- 4) Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(M) = AM - MA$?

Ex 10 X 2013

Montrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

Ex 11 X 2013

Soit N une matrice réelle nilpotente d'ordre n , et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice A réelle telle que $A^r = I_n + N$.

Ex 12 X 2013

Soient A et B deux matrices non semblables dans $M_2(\mathbb{C})$ ayant même trace t et même déterminant d . Montrer que $t^2 = 4d$.

Ex 13 X 2013

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont *semblables sur* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Ex 14 CENTRALE 2013

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
- 2) Si M n'est pas diagonalisable, montrer que M est semblable à la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ où $a_{1,3} = 1$, les autres coefficients étant nuls.
- 3) Calculer M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Ex 15 X 2013

Si $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, existe-t-il $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = X$?

Ex 16 MINES 2013

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$, les autres coefficients étant nuls. Existe-t-il $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = M$?

Ex 17 MINES 2013

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Ex 18 MINES 2013

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}$ tels que $P(A)$ est nilpotente.

Ex 19 MINES 2013

Soit $P \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(P(A)) \geq 0$.

Ex 20 MINES 2013

Soient $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $m_{n,i} = a_i$, $m_{i,n} = b_i$ pour $1 \leq i \leq n - 1$, les autres coefficients étant nuls. À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable?

Ex 21 MINES 2013

Soient B et M dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M possède n valeurs propres distinctes. Montrer que B et M commutent si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{C}$ tel que $B = P(M)$.

Ex 22 X 2018 RMS

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg B = n + 1$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\Phi(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B .

- 1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) On suppose que B possède $n + 1$ racines réelles distinctes. Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- 3) Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus B simplement scindée ?

Ex 23 MINES 2013

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, v la restriction de u à $\text{Im } u$.

- 1) Comparer $\text{tr } u$ et $\text{tr } v$.
- 2) On suppose v diagonalisable. L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?

Ex 24 CENTRALE 2013

PYTHON. Soit A_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et telle que tous les coefficients de la j -ième colonne, pour $1 \leq j \leq n$, sont égaux à j excepté le terme diagonal.

- 1) Écrire une procédure donnant A_n . Trouver les valeurs propres de A_4 avec PYTHON.
- 2) Montrer que toute valeur propre λ de A_n vérifie $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
- 3) Montrer que la matrice A_n est diagonalisable.
- 4) Soit λ_n la valeur propre de A_n appartenant à $] -2, -1[$. Déterminer la limite de (λ_n) et donner un développement asymptotique de λ_n .

Ex 25 CENTRALE 2013

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- 1) Montrer que ${}^t A$ est diagonalisable.
- 2) Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres $(Y_1, \dots, Y_n)$ de ${}^t A$ telle que : $A = \lambda_1 X_1 {}^t Y_1 + \lambda_2 X_2 {}^t Y_2 + \dots + \lambda_n X_n {}^t Y_n$ avec ${}^t X_i Y_j = \delta_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Ex 26 X 2013

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ distincts tels que $A + \lambda B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Ex 27 MINES 2013

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

- 1) Exprimer le spectre de B en fonction de celui de A .
- 2) On suppose que A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable.

Exercices d'approfondissement

Ex 28 MINES 2014

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- 1) On suppose M diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que M soit diagonalisable.

Ex 29 MINES 2013

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique $\chi_M = (X - 1)(X - 2) \dots (X - n)$. Trouver le nombre de sous-espaces de E stables par u .

Ex 30 X 2018 RMS

Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que M et $-M$ sont semblables si et seulement si $\text{tr}(M) = 0$.

Ex 31 X 2018 RMS

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E . On suppose qu'ils commutent.

- 1) Si les u_i sont tous diagonalisables, montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.
- 2) Si les u_i sont tous trigonalisables, montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

Ex 32 X 2018 RMS

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer que z est une racine de l'unité.

Soit $G \subset \mathcal{GL}_d(\mathbb{C})$ fini, non vide, stable par produit et par passage à l'inverse.

- 2) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = I$.
- 3) Soit $g \in G \setminus \{I_d\}$. Montrer que $\text{tr}(g) \neq d$.

Ex 33 X 2018 RMS

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

- 1) Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$ converge.
- 2) On suppose que la somme est égale à I_n . Montrer que M est diagonalisable.

LES INDICATIONS

Ind. 9 : 3) Le polynôme caractéristique est $\left(\prod_{j=1}^{n-2} (X - \lambda_j)\right)(X - \lambda_{n-1})^2$. Montrer que $\mathbb{K}^n = \left(\bigoplus_{j=1}^{n-2} \text{Ker}(a - \lambda_j \text{id})\right) \oplus \text{Ker}(a - \lambda_{n-1} \text{id})^2$. En déduire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de l'application linéaire associée à A est $\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$.

Ind. 10 : Écrire A comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure dont les valeurs sur la diagonale principale sont deux à deux distinctes.

Ind. 11 : Si le développement suggéré est $(1 + u)^{1/r} = P(u) + o(u^n)$, montrer qu'il existe un polynôme H tel que $P(X)^r = 1 + X + X^n H(X)$.

Ind. 13 : Si $P = P_1 + iP_2$, considérer les racines du polynôme $H(X) = \det(P_1 + XP_2)$.

Ind. 14 : Voir complément de cours sur les matrices de rang 1.

Ind. 23 : Compléter une base de l'image de u en une base de E .

Ind. 26 : Pour (i, j) fixé, considérer les racines du polynôme $P_{i,j} \in \mathbb{R}$ coefficient d'indice (i, j) de $(A + XB)^n$.

Ind. 29 : Utiliser le résultat HP (à redémontrer) que u diagonalisable et F stable implique u_F diagonalisable. Montrer alors que lorsqu'un endomorphisme est diagonalisable, les sous-espaces stables sont les sommes directes de sous-espaces des sous-espaces propres.