

DÉTERMINANTS

Ex 1 Soit $M \in \mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ antisymétrique, calculer son déterminant.

Sol. 1) : Comme M est antisymétrique on a ${}^tM = -M$, d'où puisque M est d'ordre $2n+1$, $\det(M) = \det({}^tM) = \det(-M) = (-1)^{2n+1} \det(M) = -\det(M)$, d'où $\det(M) = 0$.

Ex 2 Calculer les déterminants suivants

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ a^3/3! & a^2/2! & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \dots & & a^2/2! & a \end{vmatrix}.$$

Sol. 2) : 1) $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour j de n à 2.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 - b_1 & \dots & b_{n-1} - b_{n-2} & a_{n-1} - b_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k).$$

$$2) \quad D'_n(a) = 0 + \dots + 0 + \begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ a^3/3! & a^2/2! & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a^n/n! & \dots & & a^2/2! & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1}(a)$$

et on calcule $D_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$.

$D_1(a) = a$. Donc $D_2(a) = \frac{a^2}{2}$ puis par récurrence $D_n(a) = \frac{a^n}{n!}$.

Ex 3 MINES 2008

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E . On pose $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Déterminer $\det(e_1 + b_1 a, e_2 + b_2 a, \dots, e_n + b_n a)$ où $\det$ désigne le déterminant dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Sol. 3) : Indication Combinaisons linéaires de colonnes.
Par n -linéarité et par le caractère alterné,

$$\begin{aligned} \det(e_1 + b_1 a, e_2 + b_2 a, \dots, e_n + b_n a) &= \dots \\ &= \det(e_1, \dots, e_n) + \sum_{k=1}^n \det(e_1, \dots, e_{k-1}, \widehat{b_k a}, e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k. \end{aligned}$$

Réf. RMS 2008 Mines exo 104

Ex 4 MINES 2013

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.

Sol. 4) : Si A et B commutent, $\det((A + iB)(A - iB)) = \det(A + iB) \det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$. Or A commute avec $I_n = B$.

Réf. RMS PC Mines 2013 exo 120

Ex 5 Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $M = \begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$

Montrer que M est inversible si et seulement si A et $B - A$ sont inversibles.

Sol. 5) : On effectue dans M les opérations sur les lignes : $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} - L_n$, comme ces opérations ne changent pas son déterminant on a :

$$\begin{vmatrix} A & A \\ A & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A \\ (0) & B - A \end{vmatrix} = \det(A) \det(B - A)$$

donc M est inversible si et seulement si A et $B - A$ le sont.

solution 2 : $\begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & B - A \end{bmatrix}$.

Remarque. Expression de M^{-1}

Supposons que ces deux matrices soient inversibles, chercher M^{-1} , c'est chercher U, V, X, Y dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{bmatrix} U & V \\ X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (U+V)A & UA+VB \\ (X+Y)A & XA+YB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

On déduit de cette égalité (en tenant compte de ce qui précède) : $U+V = A^{-1}$, $V(A-B) = I_n$, $X+Y = 0$ et $Y(A-B) = -I_n$
d'où $V = (A-B)^{-1}$, $U = (B-A)^{-1} + A^{-1}$, $Y = (B-A)^{-1}$ et $X = (A-B)^{-1}$
C'est-à-dire : $M^{-1} = \begin{bmatrix} (B-A)^{-1} + A^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{bmatrix}$.

Ex 6 X 2016 RMS

Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$. Montrer $\det(M) = \det(I_n + AB)$.

Sol. 6) : On cherche $\alpha, \beta, \delta, \lambda$ dans $M_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \lambda \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \delta \end{pmatrix};$$

On trouve que $\delta = I$, $\beta = B$, $\lambda = -A$ et $\alpha + \lambda B = I$. Donc $\alpha = I - \lambda B = I + AB$. D'où le résultat en passant aux déterminants.

Ex 7 Condition d'alignement de trois points dans le plan

Soient M, M' et M'' trois points du plan d'affixes respectives z, z' et z'' .

- 1) Montrer que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} = 0$.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z, z^2 et z^4 soient alignés.

Sol. 7) : 1) On sait que trois points $M = (x, y)$, $M' = (x', y')$ et $M'' = (x'', y'')$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $D = \begin{vmatrix} x' - x & x'' - x \\ y' - y & y'' - y \end{vmatrix} = 0$. On vérifie facilement que l'on a aussi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix}. \text{ On remarque alors que}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \bar{z} & \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x + iy & x' + iy' & x'' + iy'' \\ x - iy & x' - iy' & x'' - iy'' \end{vmatrix} & [L_2 \leftarrow L_2 + L_3] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x' & 2x'' \\ x - iy & x' - iy' & x'' - iy'' \end{vmatrix} & [L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2x' & 2x'' \\ -iy & -iy' & -iy'' \end{vmatrix} = -2iD \end{aligned}$$

et donc la condition d'alignement s'écrit $\Delta = 0$

- 2) Posons $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z^2 & z^4 \\ \bar{z} & \bar{z}^2 & \bar{z}^4 \end{vmatrix}$. En retranchant la deuxième colonne à la première, puis à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z - z^2 & z^2 & z^4 - z^2 \\ \bar{z} - \bar{z}^2 & \bar{z}^2 & \bar{z}^4 - \bar{z}^2 \end{vmatrix} \\ &= -(z - z^2)(\bar{z}^4 - \bar{z}^2) + (z^4 - z^2)(\bar{z} - \bar{z}^2) \\ &= -z\bar{z}(z - 1)(\bar{z} - 1)(z + \bar{z} + 1)(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

La condition d'alignement des points de la question précédente s'écrit $\Delta = 0$.
L'ensemble cherché est donc la réunion de la droite d'équation $y = 0$ ($z = \bar{z}$) et de la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$ ($z + \bar{z} = -1$). Les points $\{(0, 0), (1, 0)\}$ ($z = 0$ et $z = 1$) sont situés sur la droite d'équation $y = 0$.

Ex 8 Soient $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

INDICATION : on pourra calculer le produit par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Sol. 8) : Utilisons l'indication :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On déduit de la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire par bloc que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Ex 9 MINES 2011

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \neq n$, $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer $\det(AB) \times \det(BA)$.

Sol. 9) : Par exemple $p > n$. On a $BA \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $\text{rg}(BA) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)) \leq n < p$ donc $\det(BA) = 0$ donc $\det(AB) \times \det(BA) = 0$.

Réf. RMS PC Mines 2011 exo 120

Ex 10 MINES 2013

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer, pour $t \in \mathbb{R}$ $\det(A + tJ)\det(A - tJ) \leq \det(A^2)$.

Sol. 10) : Soit $M(t) = A + tJ$. Soit $N(t)$ la matrice obtenue en retranchant la dernière colonne de chacune des autres. Ainsi, $N(t)$ ne contient t que dans la dernière colonne, et $f(t) = \det(M(t)) = \det(N(t))$ est fonction affine de t de la forme $f(t) = at + b$ (cf cours). Mais alors $f(t) \cdot f(-t) = b^2 - a^2 t^2 \leq b^2$. C'est ce qu'il fallait prouver car $b = \det(A)$.

Réf. RMS PC Mines 2013 exo 119

Ex 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une famille de scalaires. Calculer le déterminant de la matrice $A = (\cos((i-1)\alpha_j))_{ij}$ en le mettant sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Sol. 11) : On sait que $\cos((i-1)\alpha_i)$ est un polynôme en $\cos \alpha_i$ de degré $(i-1)$ et de terme de plus haut degré $2^{i-2} \cos^{i-1} \alpha_i$. Par multilinéarité et combinaisons de colonnes, il reste le déterminant de Vandermonde de la famille $\cos \alpha_i$, multiplié par $2 \cdot 4 \cdots 2^{n-2}$.

$$D = 2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \alpha_j - \cos \alpha_i).$$

Ex 12

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$ et on rappelle que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$ est l'ensemble $\mathcal{U} := \{\omega^k; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. On considère alors la matrice $\Omega_n = (\alpha_{ij})$ définie par

$$\alpha_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)} \quad \text{pour } k, \ell = 1, \dots, n.$$

1) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $s_m = \sum_{p=1}^n \omega^{m(p-1)}$. On séparera les cas $m \in n\mathbb{Z}$ et $m \notin n\mathbb{Z}$.

2) Calculer $\det(\Omega_n \cdot \overline{\Omega_n})$, en déduire $|\det \Omega_n|$.

3) Calculer $\det(\Omega_n^2)$.

4) En utilisant le déterminant de Vandermonde, montrer que

$$\det \Omega_n = \prod_{0 \leq k < \ell \leq n-1} (\omega^\ell - \omega^k).$$

5) Calculer $\sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} (k + \ell)$. (On rappelle que $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

6) Déduire de ceci la valeur de $\det \Omega_n$.

Sol. 12) : 1) $s_m = n$ si $m \in n\mathbb{Z}$, et 0 sinon.

2) $\Omega_n \cdot \overline{\Omega_n} = nI_n$ par calcul.

$$|\det \Omega_n| = n^{n/2}.$$

$$3) \text{ De même, } \Omega^2 = n \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (0) & & & \\ & & \diagup & & \\ & & & \diagup & \\ & & & & (0) \\ & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \det \Omega^2 = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} n^n.$$

$$4) \det \Omega = \prod_{0 \leq k < \ell \leq n-1} (\omega^\ell - \omega^k).$$

$$5) \sum_{\substack{0 \leq k < \ell \leq n-1 \\ \text{car}}} (k + \ell) = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

$$\sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} \ell = \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\ell-1} \ell = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} k = \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\ell-1} k = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} (k + \ell) &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \ell^2 - \frac{\ell}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{4} \\ &= \frac{n(n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

6) On écrit

$$\omega^\ell - \omega^k = \omega^{(\ell+k)/2} 2i \sin \left(\frac{\ell-k}{n} \pi \right) = \exp \left(i \left[(\ell+k) \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \right] \right) \times 2 \times \underbrace{\sin \left(\frac{\ell-k}{n} \pi \right)}_{>0}$$

$$\text{Donc } \arg(\omega^\ell - \omega^k) = (\ell+k) \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \arg(\det \Omega) = \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} \left((\ell + k) \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{n} \times \frac{n(n-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2} \underbrace{\frac{(n-1)n}{2}}_{\binom{n}{2}} =$$

$$\frac{1}{4} \pi (n-1)(3n-2)$$

$$\text{CONCLUSION } \det \Omega = n^{n/2} e^{i(n-1)(3n-2)\frac{\pi}{4}}.$$

Exercices d'approfondissement

Ex 13 X 2014

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

Sol. 13) : On a $AE_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$ = matrice nulle sauf en colonne $n^\circ j$ où on met $C_k(A)$.

Dans la base lexicographique verticale (on numérote les matrices colonne par colonne : $E_{11}, E_{21}, E_{31}, \dots$), la matrice de Φ dans cette base est diagonale par blocs, chacun étant A . Donc $\det \Phi = (\det A)^n$.

Réf. RMS PC 2014, X exo 45

Ex 14 X 2013

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

- 1) Déterminer le cardinal de $\mathcal{E}_n$.
- 2) Si $A \in \mathcal{E}_n$, montrer que $\det A$ est un multiple de 2^{n-1} .
- 3) Donner les valeurs de $\det A$ lorsque A décrit $\mathcal{E}_n$, pour $n = 2, 3, 4$.

Sol. 14) : 1) 2^{n^2} .

2) On retranche la première colonne de chacune des autres. On trouve alors dans chacune de ces autres colonnes des 0, des 2, de -2 et rien d'autre, ce qui montre que le déterminant est divisible par 2^{n-1} .

3) Au signe près du déterminant, après multiplications de lignes et colonnes par -1 , on peut s'arranger pour que la première colonne contienne juste des 1, ainsi que la première ligne.

On retranche alors la première colonne aux autres, ce qui donne une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \\ \dots & -2M' \\ 1 & \end{pmatrix},$$

où les coefficients de M' sont des 0 ou des 1. Pour $n = 2$, $M' = (1)$ et $\det M = \pm 2$.

• Pour $n = 3$, les colonnes de M' sont deux des trois vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ de $\mathbb{R}^2$, et le déterminant de M' est ± 1 ou 0. Donc $\det(M) = \pm 4$ ou 0.

• Pour $n = 4$, les colonnes de M' sont trois vecteurs à prendre parmi les sept vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ de $\mathbb{R}^3$.

Si l'un des trois vecteurs est ε_1 ou ε_2 ou ε_3 , en le retranchant au besoin de l'un des deux autres, on est ramené à une dimension de moins et au cas précédent, c'est-à-dire que $\det M = \pm 8$ ou 0. Si les trois vecteurs sont $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\det M = \pm 16$ ou 0.

Dans le dernier cas, on se ramène à l'un des précédents par soustraction d'un vecteur.

Ainsi, $\det M$ n'est pas toujours 2^{n-1} , et c'est ce qui explique que l'examinateur ait arrêté le jeu à $n = 4$.

Voici une deuxième solution pour $n = 2, 3, 4$.

Le déterminant est inférieur ou égal à $n!$ dans tous les cas.

En dimension 3, il doit donc être inférieur ou égal à 6 et être divisible par 4.

Il n'y a que ± 4 et 0. En dimension 4, il doit être inférieur ou égal à 24 et être multiple de 8.

Il ne peut être que 0, ± 8 , ± 16 ou ± 24 . On réalise aisément des cas où il vaut 8 ou 16.

Pour voir que 24 n'est pas possible, on remarque qu'on a pu écrire la matrice sous la forme triangulaire par blocs avec un bloc d'ordre 3 formé de nombres -2 ou 0 (tous de même signe), voir la solution plus haut.

Mais au lieu de faire l'inventaire des configurations du triplets de vecteurs du bloc d'ordre 3, il suffit de remarquer que son déterminant est calculé par Sarrus, et ne peut être multiple de 6 que si aucun coefficient n'est nul, et comme ils sont tous de même signe et de même valeur absolue, la matrice aurait tous ses coefficients égaux et donc un déterminant nul.

Réf. RMS PC X 2013 exo 47

Ex 15 

Inversion de la matrice de Vandermonde. Soit P la matrice de Vandermonde $P = (a_i^j)_{i=1, \dots, n; j=0, \dots, n-1}$ avec les (a_i) distincts. En la considérant comme une matrice de passage, exprimer P^{-1} à l'aide des coefficients de X^i dans $L_j = \prod_{1 \leq i \leq n; i \neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$.

$$\text{sage, exprimer } P^{-1} \text{ à l'aide des coefficients de } X^i \text{ dans } L_j = \prod_{1 \leq i \leq n; i \neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}.$$

$$\text{Sol. 15) : On pose } \varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow \\ P & \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases} \mathbb{K}^n$$

et on a $V = \text{mat}(\varphi, \text{can}_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}, \text{can}_{\mathbb{K}^n})$.

Donc $V^{-1} = \text{mat}(\varphi^{-1}, \text{can}_{\mathbb{K}^n}, \text{can}_{\mathbb{K}_{n-1}[X]})$.

$C_j(V^{-1}) \leftrightarrow L_j = \varphi^{-1}(e_i)$ défini par $L_j(a_i) = \delta_i^j$ d'où le résultat directement.

Solution de l'écrit X 2004 PC :

$$\text{Notons } L_j = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i.$$

$$\text{Posons } Q = (b_{i-1,j})_{i,j}.$$

On a pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$X^k = \sum_{j=1}^n a_j^k L_j(X) = \sum_{i,j} a_j^k b_{i,j} X^i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n b_{i,j} a_j^k \right)}_{=\delta_k^i} X^i$$

donc pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(QP)_{i,k} = \delta_k^i$ c'est-à-dire $QP = I_n$. Donc $P^{-1} = Q = (b_{i-1,j})_{i,j}$.

Ex 16 X 2009

Soit $D : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})^2$, $D(A \times B) = D(A) \times D(B)$. On suppose que $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq D(I_2)$.

- 1) Montrer que $D(0) = 0$.
- 2) Si A est nilpotente, montrer que $D(A) = 0$.
- 3) Soient $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue en permutant les lignes de A . Montrer que $D(B) = -D(A)$.
- 4) Montrer que A est inversible si et seulement si $D(A) \neq 0$.

Sol. 16) : 1) $D(0)^2 = D(0)$ donc $D(0) \in \{0, 1\}$.

Supposons par l'absurde que $D(0) = 1$.

Alors pour tout $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $D(0 \times A) = D(A) = D(0) = 1$ donc, en particulier

$$D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = D(I_2), \text{ absurde.}$$

Ainsi, $D(0) = 0$.

2) $D(A^n) = D(A)^n = D(0) = 0$ donc $D(A) = 0$.

3) On a $D(I_2) = 1$ ou 0 . Or si $D(I_2) = 0$, $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\right) = D(I_2) = 0 = D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2$

donc on aurait $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = D(I_2) = 0$, absurde.

Ainsi $D(I_2) = 1$. Et en reprenant ce qui précède, $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$.

On a $B = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $D(B) = -D(A)$.

4) Si A est inversible, alors $D(A) \times D(A^{-1}) = D(I_2) = 1$ donc $D(A) \neq 0$.

Si A n'est pas inversible, il existe P et Q tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

Or $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente donc $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ donc $D(A) = 0$.

Réf. RMS PC X 2009 exo 48

Ex 17 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$,

$(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E .

Montrer que $\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

APPLICATION (5/2) : On suppose que $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont solutions de $X' = AX$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par l'application (dite wronskien)

$$W : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det_{can}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Sol. 17) : On vérifie sans trop de difficulté que l'application

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, u(x_k), \dots, x_n)$$

est une forme n -linéaire alternée sur E , il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, avec $\lambda = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} = (e_i)$:

or si on note $[m_{i,j}] = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on calcule avec la règle des déterminants par blocs

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, u(e_k), \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & (0) & m_{k,1} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & m_{k,k} & & (0) \\ (0) & & \vdots & \ddots & \\ & & m_{k,n} & (0) & 1 \end{vmatrix} = m_{k,k}$$

d'où $\varphi(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^n m_{k,k} = \text{tr}(u)$, d'où le résultat.

Pour l'application, on a $W'(t) = \sum_{k=1}^n \det_{can}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), A\varphi_k'(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)) =$

$\text{tr}(A) \cdot W(t)$

Donc $W(t) = W(t_0) \cdot \exp((t - t_0) \text{tr} A)$.

Ex 18

Montrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Sol. 18) : Si M et M' sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M' = Q^{-1}MQ$, c'est-à-dire telle que $QM' = MQ$ (*).

La matrice $Q = (q_{jk})$ est à coefficients complexes ; on peut écrire $q_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$ et donc $Q = A + iB$, avec $A = (a_{jk})$ et $B = (b_{jk})$.

Les matrices A et B sont à coefficients réels et la relation (*) s'écrit $AM' + iBM' = MA + iMB$.

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient $AM' = MA$ et $BM' = MB$.

On a donc aussi $(A + xB)M' = M(A + xB)$ pour tout nombre réel x .

Posons alors $P(x) = \det(A + xB)$. Il s'agit d'un polynôme à coefficients réels et ce polynôme n'est pas le polynôme nul puisque $P(i) = \det(Q) \neq 0$.

Il existe donc un nombre réel x_0 tel que $P(x_0) \neq 0$.

La matrice $Q_0 = A + x_0B$ est donc inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $Q_0M' = MQ_0$.

On a donc $M' = Q_0^{-1}MQ_0$, ce qui montre que M et M' sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 19

- 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + X) = \det(X)$, alors $C = 0$.

INDICATION on pourra utiliser qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que

$$C = PJ_rQ, \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) Soient A et B appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(B + X).$$

Montrer que $A = B$.

Sol. 19) :

- 1) En prenant en particulier $X = -C$, on obtient $(-1)^n \det(C) = 0$ et donc $\det(C) = 0$.

Le rang r de C est donc strictement inférieur à n .

On sait que dans ces conditions, il existe des matrices inversibles P et Q telles que

$$C = PJ_rQ, \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisons la matrice $J'_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et posons $D = PJ'_rQ$.

On a alors $C + D = P(J_r + J'_r)Q = PI_nQ = PQ$, d'où

$$\det(C + D) = \det(D) = \det(PQ) \neq 0.$$

Il en résulte que D est inversible et puisque $\text{rg}(D) = \text{rg}(J'_r) = n - r$, on a $r = 0$ et donc $C = 0$.

- 2) Si $\det(A + X) = \det(B + X)$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a aussi

$$\det(A - B + X) = \det(B - B + X) = \det(X)$$

pour toute matrice X et donc $A - B = 0$ d'après la question précédente.

Ex 20

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Sol. 20) : Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(E_{ij}, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$, alors $\mathcal{H}$ contient la matrice

$$A = E_{1,n} + \sum_{i=2}^n E_{i,i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et A est inversible.

Supposons maintenant qu'il existe un couple (i, j) , avec $i \neq j$, tel que $E_{ij} \notin \mathcal{H}$.

On a alors $\mathcal{H} + \text{Vect}(E_{ij}) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et en particulier il existe $a \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{H}$ tels que $I_n = M + aE_{ij}$.

On en déduit que $M = I_n - aE_{ij}$ et cette matrice est inversible puisque c'est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Ex 21

Matrice à diagonale dominante

- 1) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (1)$$

Montrer que A est inversible.

INDICATION : En supposant A non inversible, on pourra introduire un vecteur non nul $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}.$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

INDICATION : On pourra considérer $P(x) = \det(A + xI_n)$.

Sol. 21) :

1) Soit A une matrice non inversible vérifiant les hypothèses (1). Il existe alors un

vecteur, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}$ non nul tel que $AX = 0$. On a donc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (E_i)$$

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_k| \geq |x_j|$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme X est non nul, on a $x_k \neq 0$ et $\left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

La relation (E_k) permet alors d'écrire

$$|a_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x_j}{x_k} a_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left| \frac{x_j}{x_k} \right| |a_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_j|$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses (1).

2) Soit x un réel. La matrice $A + xI_n$ est à diagonale dominante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

On a donc $\det(A + xI_n) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

D'autre part $P(x) = \det(A + xI_n)$ est un polynôme unitaire de degré n , à coefficients réels.

Il en résulte que $P(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

La question précédente montre que P ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer qu'il y a de signe constant.

On a donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et en particulier $P(0) = \det(A) > 0$.

Ex 22 ☛

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux familles de réels. On pose $M_{ij} = (x_i + y_j)^k$. Écrire la matrice $M = (M_{ij})_{ij}$ sous la forme d'un produit de deux matrices et calculer son déterminant.

Sol. 22) : On utilise la notation généralisée $\binom{k}{i-1} = 0$ si $i-1 > k$.

On peut écrire $M = (x_i^{j-1})_{ij} \times \left(\binom{k}{i-1} y_j^{k-i+1} \right)_{ij}$ donc si $k < n-1$ on a $\det M = 0$ (car la dernière ligne de la deuxième matrice est nulle) et si $k = n-1$ on a

$$\det M = \varepsilon_n \binom{n-1}{0} \binom{n-1}{1} \cdots \binom{n-1}{n-1} V(x_1, x_2, \dots, x_n) V(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

avec ε_n signe à déterminer, c'est le déterminant de l'antidiagonale, voir cours, on trouve

$$\varepsilon_n = (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^{n(n-1)/2}.$$