Déterminants

Ex 1 Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ antisymétrique, calculer son déterminant.

Ex 2 Calculer les déterminants suivants

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & & 0 & \\ a^2/2! & a & \ddots & & \\ a^3/3! & a^2/2! & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \dots & & a^2/2! & a \end{vmatrix}.$$

Ex 3 Mines 2008

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. On pose $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Déterminer $\det(e_1 + b_1 a, e_2 + b_2 a, \dots, e_n + b_n a)$ où det désigne le déterminant dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Ex 4 Mines 2013

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n) \geqslant 0$.

Ex 5 Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$

Monter que M est inversible si et seulement si A et B − A sont inversibles.

Ex 6 X 2016 rms

Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Montrer $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{AB})$.

Ex 7 **Condition d'alignement de trois points dans le plan**

Soient M, M′ et M″ trois points du plan d'affixes respectives z, z' et z''.

1) Montrer que M, M′ et M″ sont alignés si et seulement si $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \overline{z} & \overline{z'} & \overline{z''} \end{vmatrix} = 0$.

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z, z^2 et z^4 soient alignés.

Ex 8 Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{CD} = \mathrm{DC}$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{BC})$.

Indication : on pourra calculer le produit par blocs : $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ -\mathrm{C} & \mathrm{D}^{-1} \end{pmatrix}$.

Ex 9 Mines 2011

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \neq n$, $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer $\det(\mathrm{AB}) \times \det(\mathrm{BA})$.

Ex 10 Mines 2013

Soient $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer, pour $t \in \mathbb{R}$ $\det(\mathrm{A} + t\mathrm{J}) \det(\mathrm{A} - t\mathrm{J}) \leqslant \det(\mathrm{A}^2)$.

Ex 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une famille de scalaires. Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = \big(\cos((i-1)\alpha_j)\big)_{ij}$ en le mettant sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Ex 12

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ et on rappelle que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$ est l'ensemble $\mathscr{U} := \{\omega^k \ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. On considère alors la matrice $\Omega_n = (\alpha_{ij})$ définie par

$$\alpha_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)} \qquad \text{pour } k, \ell = 1, \dots, n.$$

1) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $s_m = \sum_{p=1}^{n} \omega^{m(p-1)}$. On séparera les cas $m \in n\mathbb{Z}$ et $m \notin n\mathbb{Z}$.

2) Calculer $\det(\Omega_n \cdot \overline{\Omega_n})$, en déduire $|\det \Omega_n|$.

3) Calculer $\det(\Omega_n^2)$.

4) En utilisant le déterminant de Vandermonde, montrer que

$$\det \Omega_n = \prod_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n-1} (\omega^\ell - \omega^k).$$

5) Calculer $\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n-1} (k + \ell)$. (On rappelle que $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

6) Déduire de ceci la valeur de $\det \Omega_n$.

Exercices d'approfondissement

Ex 13 X 2014
Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

Ex 14 X 2013
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

1) Déterminer le cardinal de $\mathcal{E}_n$.

2) Si $A \in \mathcal{E}_n$, montrer que $\det A$ est un multiple de 2^{n-1}.

3) Donner les valeurs de $\det A$ lorsque A décrit $\mathcal{E}_n$, pour $n = 2, 3, 4$.

Ex 15 ✍

Inversion de la matrice de Vandermonde. Soit P la matrice de Vandermonde $P = (a_i^j)_{i=1,\dots,n;j=0,\dots n-1}$ avec les (a_i) distincts. En la considérant comme une matrice de passage, exprimer P^{-1} à l'aide des coefficients de X^i dans $L_j = \displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant n; i\neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$.

Ex 16 X 2009
Soit $D : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})^2$, $D(A \times B) = D(A) \times D(B)$. On suppose que : $D\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq D(I_2)$.

1) Montrer que $D(0) = 0$.

2) Si A est nilpotente, montrer que $D(A) = 0$.

3) Soient $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue en permutant les lignes de A. Montrer que $D(B) = -D(A)$.

4) Montrer que A est inversible si et seulement si $D(A) \neq 0$.

Ex 17 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $u \in \mathscr{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \cdots, x_n) = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$.

Application (5/2) : On suppose que $\varphi_1, ..., \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ sont solutions de $X' = AX$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer une équation différentielle vérifié par l'application (dite wronskien)

$$W : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \det_{can}(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)).$$

Ex 18 ✍
Montrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 19 ☕

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(C + X) = \det(X)$, alors $C = 0$.
Indication on pourra utiliser qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $C = PJ_rQ$, avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Soient A et B appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A + X) = \det(B + X).$$

Montrer que $A = B$.

Ex 20 ☕
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Ex 21 ☕
Matrice à diagonale dominante

1) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| \quad > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (1)$$

Montrer que A est inversible.
Indication : En supposant A non inversible, on pourra introduire un vecteur non nul $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_{ii} \quad > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}.$$

Montrer que $\det(A) > 0$.
Indication : On pourra considérer $P(x) = \det(A + xI_n)$.

Ex 22 ☕

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux familles de réels. On pose $\mathrm{M}_{ij} = (x_i + y_j)^k$. Écrire la matrice $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{ij})_{ij}$ sous la forme d'une produit de deux matrices et calculer son déterminant.

Les indications

Ind. 2 : 1) combinaisons de colonnes pour aboutir à une matrice triangulaire.
2) dériver.

Ind. 4 : Considérer $\mathrm{A} + i\mathrm{I}_n$.

Ind. 9 : Matrice non inversible...

Ind. 10 : $f : t \mapsto \det(\mathrm{A} + t\mathrm{J})$ est fonction affine de t. Considérer $f(t)f(-t)$.

Ind. 13 : Dans la base lexicographique verticale (on numérote les matrices colonne par colonne : E_{11}, E_{21}, E_{31}, $\dots$), la matrice de Φ est...

Ind. 15 : Poser $\mathrm{L}_j = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j}\mathrm{X}^i$., $\mathrm{Q} = (b_{i-1,j})_{i,j}$ et regarder QP.

Ind. 16 : 3) Pour $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathrm{D}(\mathrm{A}) = -1$.