Matrices

Ex 1 Centrale 2009 On suppose $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$. Déterminer le rang de la matrice A de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = (i+j-1)^2$.

Indication réindexer par exemple les lignes de 0 à $n-1$.

Sol. 1) : On réindexe les lignes (par exemple) de 0 à $n-1$.
On a ainsi $\mathrm{A} = \big((i+j^2)\big)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
On écrit la matrice sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{B}^t\mathrm{C}$, où B et C ont trois colonnes car $(i+j)^2 = i^2 + j^2 + 2ij$ donc

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1^2 & 2\times 1 \\ 1 & 2^2 & 2\times 2 \\ 1 & 3^2 & 2\times 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

c'est-à-dire $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} i^2 & 1 & i \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & 2j \end{pmatrix}$.
Attention on ne peut pas mettre du j dans la matrice B !
On a $\mathrm{rg(B)} \leqslant 3$ et $\mathrm{rg(C)} \leqslant 3$ donc $\mathrm{rg}\left(\mathrm{B}^t\mathrm{C}\right) \leqslant 3$,
Comme $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$, $\mathrm{rg(A)} \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} = 3$ (car les trois premières colonnes de A sont libres).
Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg(A)} = 3}$

Ex 2 X 2015 Soient A et B $\in \mathfrak{M}_n(\mathrm{K})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Sol. 2) :

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - \mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{AB} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$$

Donc

$$\mathrm{I}_n = (\mathrm{I}_n - \mathrm{B})(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \mathrm{I}_n - \mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{BA}$$

D'où le résultat.

Ex 3 X 2013 Soient A, B $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Est-ce qu'en général AB et BA sont semblables ? Et si B est inversible ?

Sol. 3) : a) Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA} = 0$.
b) Si B est inversible, $\mathrm{AB} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{BAB}$.

Ex 4 X 2013 Trouver les matrices A $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient pour tout M $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{tr(AM)} = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr(A)}\,\mathrm{tr(M)}.$$

Sol. 4) : La matrice AE_{ij} contient à la colonne j une copie de la colonne A_i de A, et des zéros ailleurs. Sa trace est donc a_{ji}. Notre système d'équations équivaut donc à pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr(A)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que A est une homothétie.

Ex 5 X 2015 Soit $X \in \mathbb{R}^n$ non nul. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ MX = 0\}$.

Sol. 5) : On prend X et on complète en une base. Donc $\dim = n^2 - n$

car $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * \\ \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$ (avec P indépendant de M).

Ex 6 X 2015

1) Soient A et B dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Montrer que $|\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B| \leqslant \operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.
2) Soient $V_1, \dots, V_k$ dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $V_1\,{}^tV_1 + \cdots + V_k\,{}^tV_k = I_n$. Montrer que $k \geqslant n$.

Sol. 6) :

1) $\operatorname{Im}(A+B) \subset \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$, et $\dim(E' + E'') \leqslant \dim E' + \dim E''$.
Donc $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Ensuite, pour montrer que $\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A+B)$, on écrit que $A = A + B - B$.
2) Par récurrence $\operatorname{rg}\left(\sum_{k=1}^{m} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \operatorname{rg} A_k$. Or $\operatorname{rg}\left(V_k\,{}^tV_k\right) = 1$.

Ex 7 X 2013 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Caractériser les $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MBM = M$.
On admet qu'une matrice M peut s'écrire sous la forme $M = PJ_rQ$, $r = \operatorname{rg} M$.

Sol. 7) : $M = PJ_rQ$.
$MBM = M$ s'écrit $PJ_rQBPJ_rQ = PJ_rQ$
donc $J_r\underbrace{QBP}_{=B'}J_r = J_r$

Alors on écrit par blocs $J_rB'J_r = J_r$.
$B' = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$. Il vient $J_rB'J_r = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc B convient ssi $C = I_r$. On a alors $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}P^{-1}$.

Réf. RMS X PC 2013 exo 45

Ex 8 X 2015 Soient A, B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_{A,B} : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de $\Phi_{A,B}$.

Sol. 8) : L'idée principale est de se ramener le plus possible aux matrices de la base canonique où les calculs se ramènent à gérer des symboles de Kronecker.
• **Rappel.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \operatorname{mat}(u, (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}) = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

On a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$. On sait que $\boxed{\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = (u(e_i))_i}$.

Adaptons la situation : $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et la base de travail est doublement indexée $(E_{i,j})$ (base canonique).

Donc si $u \in \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$. Alors $\boxed{\operatorname{tr} u = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (u(E_{i,j}))_{i,j}}$.

• **Application** calculons la trace de $\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}} \in \mathscr{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$
On a

$$\operatorname{tr}\left(\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}\right) = \sum_{a,b} \left[\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}(E_{a,b})\right]_{a,b}$$

Or $\Phi_{E_{i,j},E_{k,\ell}}(E_{a,b}) = E_{i,j}E_{a,b}E_{k,\ell} = \delta_j^a\delta_k^b E_{i\ell}$ (**rappel** $E_{a,b}E_{c,d} = \delta_b^c E_{a,d}$),
donc $\left[\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}(E_{a,b})\right]_{a,b} = \left[\delta_j^a\delta_k^b E_{i\ell}\right]_{a,b} = \delta_j^a\delta_k^b \times \delta_i^a\delta_\ell^b$ (donc souvent 0).
Ainsi $\left[\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}(E_{a,b})\right]_{a,b} = \begin{cases} 1 \text{ si } a = i = j \text{ et } b = \ell = k \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ donc

$$\operatorname{tr}\left(\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}\right) = \sum_{a,b}\left[\delta_j^a\delta_k^b E_{i\ell}\right]_{a,b} = \delta_j^i\delta_k^\ell$$

On peut remarquer que $\delta_j^i\delta_k^\ell = \operatorname{tr}(E_{i,j})\operatorname{tr}(E_{k,\ell})$, mais à ce stade ce n'est pas forcément évident.
• **Conséquence** on peut calculer $\operatorname{tr}(\Phi_{A,B})$.
La trace est linéaire. Il suffit donc de calculer la trace de $\Phi_{E_{i,j},E_{k,\ell}}$.
En effet, puisque $A = \sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}$ et $B = \sum_{k,\ell} b_{k,\ell}E_{k,\ell}$, par « bilinéarité »,

$$\operatorname{tr}(\Phi_{A,B}) = \sum_{i,j,k,\ell} a_{ij}b_{k\ell}\operatorname{tr}\left(\Phi_{E_{ij},E_{k\ell}}\right)$$

Et avec le calcul précédent, on obtient $\operatorname{tr}(\Phi_{A,B}) = \sum_{i,j,k,\ell} a_{ij}b_{k\ell}\delta_j^i\delta_k^\ell$.
On remarque pour finir que $\sum_{i,j,k,\ell} a_{ij}b_{k\ell}\delta_j^i\delta_k^\ell = \sum_{i,k} a_{i,i}b_{k,k} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,k}\right) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$, donc

$$\operatorname{tr}(\Phi_{A,B}) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$$

Ex 9 X 2009 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p < n$, $A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix}$.
Montrer que $\operatorname{rg}(M) = p + \operatorname{rg}(D)$.

Sol. 9) : On résout l'équation matricielle $M\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$, en écrivant par blocs les coordonnées d'un vecteur du noyau.
$X = -A^{-1}BY$ et $DY = 0$.
Donc $\dim(\operatorname{Ker} M) = \dim(\operatorname{Ker} D)$ d'où $\operatorname{rg} M = n - \dim(\operatorname{Ker} D) = n - (n - p - \operatorname{rg} D) = \boxed{p + \operatorname{rg} D}$
Réf. RMS PC 2009, exo 41

Ex 10 X 2014

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$

Sol. 10) : Soit N la matrice ayant des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs. Alors $M = I_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}$. On dérive la relation

$$\frac{1}{1-X} = \frac{X^{n+1}}{1-X} + 1 + X + X^2 + \cdots + X^n.$$

Cela donne
$$\frac{1}{(1-X)^2}=\frac{nX^n}{1-X}+\frac{X^{n+1}}{(1-X)^2}+1+2X+3X^2+nX^{n-1}.$$
On multiplie le tout par $(1-X)^2$. Cela entraîne que
$$(1+2X+3X^2+nX^{n-1})(1-X)^2=1+X^nR(X),$$
où R est un polynôme, peu importe lequel.
On applique cela à N. Donc l'inverse cherché est $(I_n-N)^2=I_n-2N+N^2$.
Réf. RMS10 X exo 45
Réf. RMS PC 2014, X exo 42

Ex 11 X 2010 Soient $(n,p,q)\in(\mathbb{N}^*)^3$, $P\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Q\in\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1) On suppose que les colonnes de Q engendrent $\mathbb{K}^p$. Montrer que $\mathrm{rg}(PQ)=\mathrm{rg}(P)$.
2) On suppose que les lignes de P engendrent $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(PQ)=\mathrm{rg}(Q)$.

Sol. 11) :

1) Posons $\mathrm{mat}(f,can.)=P$ et $\mathrm{mat}(g,can.)=Q$.
les colonnes de Q engendrent $\mathbb{K}^p\Leftrightarrow g$ est surjective,.
Dans ce cas, $\mathrm{rg}(f\circ g)=\mathrm{rg}(f)$.
2) ${}^tP$ est surjective donc $\mathrm{rg}\left({}^tQ\,{}^tP\right)=\mathrm{rg}\left({}^tQ\right)$.
Or $\mathrm{rg}\left({}^tQ\right)=\mathrm{rg}\left(Q\right)$ et $\mathrm{rg}\left({}^tQ\,{}^tP\right)=\mathrm{rg}\left({}^t(PQ)\right)=\mathrm{rg}(PQ)$.

Réf. RMS10 X exo 48

Ex 12 Mines 2004 Soient A et $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}\,A=\mathrm{rg}\,B=1$ et A^2 et B^2 commutent.
Montrer que $A^2=0$ ou $B^2=0$ ou A et B commutent.

Sol. 12) : En écrivant que $A=X\,{}^tY$, on a $A^2=X\,{}^tYX\,{}^tY=\mathrm{tr}\,A\cdot A$.
Ainsi, si $\mathrm{tr}\,A\neq0$ et $\mathrm{tr}\,B\neq0$, A et B commutent.
sinon $A^2=0$ ou $B^2=0$.

Ex 13 Centrale 2004 Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $n\geqslant2$.

1) Soit $\mathcal{H}_0\subset\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Quelle est sa dimension ?
2) Montrer qu'il existe une matrice $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\quad M\in\mathcal{H}\iff\mathrm{tr}(M\,{}^tB)=0.$$
3) On suppose que $\mathrm{rg}\,B=r$. On pose $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.
Montrer que, pour toute matrice $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $M'\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}\,M'=\mathrm{rg}\,M$ et $\mathrm{tr}(M\,{}^tB)=\mathrm{tr}(M'J_r)$.
4) En déduire que pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $p\leqslant n$ il existe une matrice de rang p dans $\mathcal{H}$.

Sol. 13) :

1) n^2-1.
2) classique. $\left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})&\longrightarrow&\mathscr{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})\\B&\longmapsto&M\mapsto\mathrm{tr}(M\,{}^tB)\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

3) On écrit qu'il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{PJ}_r\mathrm{Q} = \mathrm{B}$.
D'où $\mathrm{tr}(\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{Q}{}^t\mathrm{J}_r{}^t\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\underbrace{{}^t\mathrm{PM}\,{}^t\mathrm{Q}}_{=\mathrm{M}'}\underbrace{{}^t\mathrm{J}_r}_{=\mathrm{J}_r})$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{M}') = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}$.

4) On cherche M' telle que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}'\,{}^t\mathrm{J}_r) = 0$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{M}') = p$.

Il suffit de prendre $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{??} & 0 \\ 0 & (0) \end{bmatrix} \end{pmatrix}$ lorsque $p \leqslant n-1$.

Dans le cas où $p = n$, on peut prendre, $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$.

Ex 14 X 2014 Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que : $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A})\,f(\mathrm{B})$. Montrer que $f(\mathrm{A}) = 0$ si et seulement si A est non inversible.

Sol. 14) : Il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{J}_r$ avec $r = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.
Si A n'est pas inversible, puisque $\mathrm{J}_r^r = 0$ on a $(f(\mathrm{A}))^r = 0$ donc $f(\mathrm{A}) = 0$.
Enfin, $f(\mathrm{I})^2 = f(\mathrm{I})$ donc $f(\mathrm{I}) = 0$ ou 1.
Supposons que $f(\mathrm{I}) = 0$ alors pour tout M, $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{MI}) = 0$, or f est non nulle !
Ainsi, $f(\mathrm{I}) = 1$ et donc $f(\mathrm{A})f(\mathrm{A}^{-1}) = 1$ pour A inversible, donc $f(\mathrm{A}) \neq 0$.
Réf. RMS PC 2014, X exo 49

Ex 15 X 2014 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{ABAB} = 0$. Montrer que $\mathrm{BABA} = 0$.

Sol. 15) : On multiplie la relation donnée à gauche par B et à droite par A. Alors $\mathrm{BABABA} = (\mathrm{BA})^3 = 0$. Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, cela entraîne que $(\mathrm{BA})^2 = 0$. **Réf.** RMS PC 2014, X exo 46

Ex 16 Mines 2014 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{M} + (\mathrm{tr}\,\mathrm{M})\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Sol. 16) : On a $\mathrm{tr}\,\mathrm{M}(1 + \mathrm{tr}\,\mathrm{A}) = \mathrm{tr}\,\mathrm{B}$.
• $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} \neq -1$. Alors $\mathrm{M} = \mathrm{B} - \dfrac{\mathrm{tr}\,\mathrm{B}}{1 + \mathrm{tr}\,\mathrm{A}}\mathrm{A}$, réciproquement, c'est bien solution.
• $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = -1$.
CN $\mathrm{tr}\,\mathrm{B} = 0$ sinon $\varnothing$
Si, de plus, $\mathrm{tr}\,\mathrm{B} = 0$, on vérifie que $\mathcal{S} = \mathrm{B} + \mathbb{R}\cdot\mathrm{A}$.

Ex 17 X 2012 Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer A^{-1}.

Sol. 17) : L'application de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans lui-même $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ admet pour application réciproque l'application $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{Q}(\mathrm{X}-1)$.
Réf. RMS12 X exo 47

Ex 18 ✍ **Inversion de la matrice de Vandermonde.** Soit P la matrice de Vandermonde $\mathrm{P} = (a_i^j)_{i=1,\dots,n;j=0,\dots n-1}$ avec les (a_i) distincts. En la considérant comme une matrice de passage, exprimer P^{-1} à l'aide des coefficients de X^i dans $\mathrm{L}_j = \displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant n; i\neq j} \frac{\mathrm{X}-a_i}{a_j-a_i}$.

Sol. 18) : On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(a_1),\cdots,\mathrm{P}(a_n)) \end{array} \right.$ et on a $\mathrm{V} = \mathrm{mat}(\varphi, can_{\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}, can_{\mathbb{K}^n})$.
Donc $\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{mat}\left(\varphi^{-1}, can_{\mathbb{K}^n}, can_{\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]}\right)$.
$\mathrm{C}_j\left(\mathrm{V}^{-1}\right) \leftrightarrow \mathrm{L}_j = \varphi^{-1}(e_i)$ défini par $\mathrm{L}_j(a_i) = \delta_i^j$ d'où le résultat directement.
Solution de l'écrit X 2004 PC :
Notons $\mathrm{L}_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j}\mathrm{X}^i$.
Posons $\mathrm{Q} = (b_{i-1,j})_{i,j}$.
On a pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\mathrm{X}^k = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \mathrm{L}_j(\mathrm{X}) = \sum_{i,j} a_j^k b_{i,j}\mathrm{X}^i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}a_j^k\right)}_{=\delta_k^i}\mathrm{X}^i$$

donc pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\mathrm{QP})_{i,k} = \delta_k^i$ c'est-à-dire $\mathrm{QP} = \mathrm{I}_n$. Donc $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Q} = (b_{i-1,j})_{i,j}$.