

MATRICES

Ex 1 CENTRALE 2009 On suppose $n \geq 3$ et $p \geq 3$. Déterminer le rang de la matrice A de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = (i + j - 1)^2$.

INDICATION réindexer par exemple les lignes de 0 à $n - 1$.

Ex 2 X 2015 Soient A et $B \in \mathfrak{M}_n(K)$ telles que $AB = A + B$. Montrer que $AB = BA$.

Ex 3 X 2013 Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Est-ce qu'en général AB et BA sont semblables ? Et si B est inversible ?

Ex 4 X 2013 Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{tr}(AM) = \frac{1}{n} \text{tr}(A) \text{tr}(M).$$

Ex 5 X 2015 Soit $X \in \mathbb{R}^n$ non nul. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), MX = 0\}$.

Ex 6 X 2015

- 1) Soient A et B dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Montrer que $|\text{rg } A - \text{rg } B| \leq \text{rg}(A + B) \leq \text{rg } A + \text{rg } B$.
- 2) Soient $V_1, \dots, V_k$ dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $V_1 {}^tV_1 + \dots + V_k {}^tV_k = I_n$. Montrer que $k \geq n$.

Ex 7 X 2013 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Caractériser les $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MBM = M$.
On admet qu'une matrice M peut s'écrire sous la forme $M = PJ_rQ$, $r = \text{rg } M$.

Ex 8 X 2015 Soient A, B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_{A,B} : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de $\Phi_{A,B}$.

Ex 9 X 2009 Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p < n$, $A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
Montrer que $\text{rg}(M) = p + \text{rg}(D)$.

Ex 10 X 2014

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 11 X 2010 Soient $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $P \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

- 1) On suppose que les colonnes de Q engendrent $\mathbb{K}^p$. Montrer que $\text{rg}(PQ) = \text{rg}(P)$.
- 2) On suppose que les lignes de P engendrent $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(PQ) = \text{rg}(Q)$.

Ex 12 MINES 2004 Soient A et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg } A = \text{rg } B = 1$ et A^2 et B^2 commutent.
Montrer que $A^2 = 0$ ou $B^2 = 0$ ou A et B commutent.

Ex 13 CENTRALE 2004 Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

- 1) Soit $\mathcal{H}_0 \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Quelle est sa dimension ?

2) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), M \in \mathcal{H} \iff \text{tr}(M^t B) = 0.$$

3) On suppose que $\text{rg } B = r$. On pose $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg } M' = \text{rg } M$ et $\text{tr}(M^t B) = \text{tr}(M' J_r)$.

4) En déduire que pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $p \leq n$ il existe une matrice de rang p dans $\mathcal{H}$.

Ex 14 X 2014 Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A est non inversible.

Ex 15 X 2014 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABAB = 0$. Montrer que $BABA = 0$.

Ex 16 MINES 2014 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + (\text{tr } M)A = B$.

Ex 17 X 2012 Soit $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \binom{j}{i}$ si $i \leq j$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer A^{-1} .

Ex 18  **Inversion de la matrice de Vandermonde.** Soit P la matrice de Vandermonde $P = (a_i^j)_{i=1,\dots,n; j=0,\dots,n-1}$ avec les (a_i) distincts. En la considérant comme une matrice de passage, exprimer P^{-1} à l'aide des coefficients de X^i dans $L_j = \prod_{1 \leq i \leq n; i \neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$.

LES INDICATIONS

Ind. 2 : Développer $(I_n - A)(I_n - B)$.

Ind. 10 : Si N est la matrice ayant des 1 juste au-dessus de la diagonale et 0 ailleurs, $N^n = 0$.

Dériver fraction rationnelle $\frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$, et tout multiplier par $(1 - X)^2$.

Ind. 18 : Poser $L_j = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$, $Q = (b_{i-1,j})_{i,j}$ et regarder QP .