Intégration sur intervalle quelconque

Exercices d'application

Ex 1 Étudier l'intégrabilité des fonctions:

1) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$.

2) $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[1,+\infty[$.

3) $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ sur $]0,+\infty[$.

4) $t \mapsto \exp\left(-\sqrt{t}\right)$ sur $[0,+\infty[$ et calcul.

5) $t \mapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{1-t}}$ sur $]0,1]$.

6) $t \mapsto \dfrac{e^{\sin t}}{t}$ sur $[1,+\infty[$.

Sol. 1):

1) $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc **intégrable**

2) $\underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ **non intégrable**

3) $\underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ en $+\infty$ **intégrable**

4) $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ **intégrable**, calcul $u=\sqrt{t}$, $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\mathrm{d}u = 2$

5) $1-\sqrt{1-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$ donc $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{t}$ donc **non intégrable**

6) $\dfrac{e^{\sin t}}{t} \geqslant \dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{1}{t}$ donc **diverge**

Ex 2 **Des intégrales impropres en physique ou en S.I.I. ?**

1) La période d'un pendule circulaire de longueur ℓ dépend de l'amplitude θ_0 $(0 < \theta_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2})$ suivant la formule

$$\mathrm{T} = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Montrer que cette intégrale est convergente.

2) Le champ produit par une tige uniformément chargée en un point distant de $a > 0$ est donnée par la formule

$$\mathrm{E} = \frac{a\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}.$$

Montrer la convergence de cette intégrale puis la calculer.
Indication on pourra effectuer le changement de variable $y = a\tan u$).

3) On applique une charge constante à un amortisseur pneumatique.
Le temps de compression isotherme s'écrit à une facteur près

$$\mathrm{I} = \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{\frac{h}{h-h_0}}\mathrm{d}h \text{ avec } h_1 > h_0.$$

Montrer la convergence de cette intégrale puis donner les étapes de calcul qui mène au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

INDICATION on pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{h}{h-h_0}}$

(☕) Les plus courageux pourront tenter d'effectuer le calcul complet.

Le logiciel de calcul formel `Sage`[1] fournit:

```
var('h, h0, h1')
assume(h0 < h1, h0 > 0)
show(integrate(sqrt(h/(h-h0)), h, h0, h1))
```

RÉSULTAT DU LOGICIEL

$\dfrac{1}{2} h_0 \log\left(\sqrt{-\dfrac{h_1}{h_0-h_1}}+1\right) - \dfrac{1}{2} h_0 \log\left(\sqrt{-\dfrac{h_1}{h_0-h_1}}-1\right) - (h_0-h_1)\sqrt{-\dfrac{h_1}{h_0-h_1}}$

Sol. 2):

1) $\cos\theta - \cos\theta_0 = -\sin(\theta_0)(\theta-\theta_0) + \underset{\theta\to\theta_0}{o}(\theta-\theta_0)$ donc

$\dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \underset{\theta\to\theta_0^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta_0(\theta_0-\theta)}} = \dfrac{\mathrm{K}}{(\theta_0-\theta)^{1/2}}$ donc converge par comparaison avec les fonctions de Riemann.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}} \underset{y\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{y^3}$ donc l'intégrale converge.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= 2\times\frac{a\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}} \underset{y=a\tan u}{=} 2\times\frac{a\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u}{a^3\left(1+\tan^2 u\right)^{3/2}}\\
&= 2\times\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u = 1$ donc $\boxed{\mathrm{E} = \dfrac{\rho}{2\pi a\varepsilon_0}.}$

3) $\sqrt{\dfrac{h}{h-h_0}} \underset{h\to h_0}{\sim} \dfrac{\sqrt{h_0}}{(h-h_0)^{1/2}}$

donc converge par comparaison avec les fonctions de Riemann $\left(\dfrac{1}{2}<1,\ \text{borne finie } h_0\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_{h_0}^{h_1}\sqrt{\frac{h}{h-h_0}}\mathrm{d}h \underset{u=\sqrt{\frac{h}{h-h_0}}}{=} \int_{\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}^{+\infty} u\times h_0\frac{2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u\\
&= 2h_0\int_{\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}^{+\infty}\frac{u^2}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$u = \sqrt{\dfrac{h}{h-h_0}}$ donc $u^2 = \dfrac{h}{h-h_0}$, $h = h_0\left(1+\dfrac{1}{u^2-1}\right)$ donc $\mathrm{d}h = h_0\dfrac{-2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$.

Puis on effectue une intégration par partie

$$\frac{2u}{(u^2-1)^2} \leftarrow \frac{-1}{u^2-1}$$
$$u \to 1$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= h_0\left(\frac{u}{u^2-1}_{|u=\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}} + \int_{\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}^{+\infty}\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u\right)\\
&= h_0\left(\frac{u}{u^2-1}_{|u=\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}} + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|\right]_{\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}^{+\infty}\right)
\end{aligned}$$

etc.

[1] allez faire un tour sur `http://www.sagemath.org/`

car $\dfrac{1}{u^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}\right)$

On trouve finalement $\boxed{\mathrm{I}=\sqrt{(h_1-h_0)\,h_1}+h_0\ln\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}{1-\sqrt{\frac{h_1}{h_1-h_0}}}}.}$

Ex 3 **Moments de la gaussienne**

Calculer $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n}\mathrm{d}t$ en sachant que $\mathrm{I}_0=\sqrt{\pi}$.

Sol. 3): $\mathrm{I}_n=\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$ car par intégration par partie, $\mathrm{I}_n=\dfrac{2}{2n+1}\mathrm{I}_{n+1}$.

Exercices d'entraînement

Ex 4 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Sol. 4): existence OK, continue sur $[0,1]$.
Intégration par partie (en réduisant les bornes en toute rigueur)
il vient $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}\left(2-t^2\right)}\mathrm{d}t\underset{t=\sin u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$
$=-\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u=-\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$
$\underset{t=\tan u}{=}-\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2}{2+t^2}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}=\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).}$

Ex 5 Étudier l'intégrabilité de $f:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin t}{t}\left(\sqrt{t+\sin t}-\sqrt{t}\right).\end{array}\right.$

Sol. 5): On montre facilement que $\sin t+t\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$
(étude de fonction ou, beaucoup mieux, on utilise l'inégalité des accroissements finis entre 0 et t, il vient $|\sin t|\leqslant t$ pour $t\geqslant 0$).
$t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0.

$$\sqrt{t+\sin t}-\sqrt{t}=\sqrt{t}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Donc

$$\frac{\sin t}{t}\left(\sqrt{t+\sin t}-\sqrt{t}\right)=\frac{1}{2}\frac{(\sin t)^2}{t\sqrt{t}}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

donc la fonction est **intégrable** sur $]0,+\infty[$.

Ex 6 ✍ Existence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Indication on pourra utiliser que $\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}\right)$

Sol. 6): **1)** On a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}=-1$ et $\dfrac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}=\dfrac{\ln(1-t)+\ln(1+t)}{t^2}\underset{t\to 1}{\sim}\ln(1-t)$
or $t\mapsto\ln(1-t)$ est intégrable au voisinage de 1
— même comportement que $t\mapsto\ln t$ au voisinage de 0 — ou encore $\ln(1-t)=\underset{t\to1}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$.
donc $t\mapsto\dfrac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$.

2) • Cherchons une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ sur $]0,1[$, on effectue une intégration par partie sur $[a,b] \subset]0,1[$.

$$\ln\left(1-t^2\right) \rightarrow \frac{-2t}{1-t^2}$$
$$\frac{1}{t^2} \leftarrow -\frac{1}{t}$$

ce qui donne

$$\int_a^b \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \left[-\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}\right]_a^b + \left[\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right]_a^b$$

• Comme $\displaystyle\lim_{a\to 0}\left(\left[-\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}\right]_a^b\right) = -\frac{\ln\left(1-b^2\right)}{b}$ car $\dfrac{\ln\left(1-a^2\right)}{a} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{a^2}{a} = a$, on peut écrire, le crocher convergeant quand a tend vers 0,

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}\right]_{\to 0}^b + \left[\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right]_0^b \\ &= -\frac{\ln\left(1-b^2\right)}{b} + \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right)\end{aligned}$$

Enfin,

$$-\frac{\ln\left(1-b^2\right)}{b} + \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = -\frac{(1-b)\ln(1-b)}{b} - \frac{(1+b)\ln(1+b)}{b} \underset{b\to 1}{\rightarrow} -2\ln(2).$$

on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t = -2\ln(2)}$

Ex 7 ✍ Mines 2017 RMS Soit $f : [1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que $x\,f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Montrer que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Sol. 7):

1) On a $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant x \cdot f(2x)$ or $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0$ donc $xf(x) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. En particulier $f(x) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

2) $x(f(x) - f(x+1)) \geqslant 0$ et

$$\int_1^{\mathrm{A}} x(f(x) - f(x+1))\mathrm{d}x = \int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} xf(x)\mathrm{d}x + \int_2^{\mathrm{A}+1} f(x)\mathrm{d}x$$

On montre avec des ε que $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} xf(x)\mathrm{d}x \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\rightarrow} 0$ d'où l'intégrabilité de la fonction.

Remarque beaucoup plus compliqué mais jolie preuve

On sait que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge par comparaison intégrale.

On voit qu'il est plus facile de montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(f(n) - f(n+1)\right)$ converge puis essayons de revenir à l'intégrale.

$1^{ère}$ étape la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(f(n) - f(n+1)\right)$ converge.

En effet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\left(f(n) - f(n+1)\right) = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} f(n) - \underbrace{\mathrm{N}f(\mathrm{N}+1)}_{\to 0} + f(1)$ converge.

2^e étape lien avec l'intégrale.

On a

$$\int_{n-1}^{n} x(f(x)-f(x+1))\mathrm{d}x \leqslant n\,(f(n-1)-f(n+1)) = n\,(f(n-1)-f(n))+n\,(f(n)-f(n+1))$$
$$= (n-1)\,(f(n-1)-f(n))+n\,(f(n)-f(n+1))+f(n-1)-f(n)$$

On a que des termes généraux de séries convergentes donc $\sum_{n\geqslant 2}\int_{n-1}^{n} x(f(x)-f(x+1))\mathrm{d}x$ converge donc $\left(\int_{1}^{n} x(f(x)-f(x+1))\mathrm{d}x\right.$ converge.

Cela prouve l'intégrabilité demandée car l'intégrande est positive.

En effet $\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} x(f(x)-f(x+1))\mathrm{d}x \leqslant \int_{\lfloor x\rfloor}^{\lfloor x\rfloor+1} x(f(x)-f(x+1))\mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$

Ex 8 ✍ Mines 2017 RMS Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1) On suppose f décroissante. Justifier, pour $r>0$, l'existence de $\mathrm{S}(r)=\sum_{k=1}^{+\infty} f(kr)$. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(r)$ lorsque $r\to 0^+$.

2) On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs complexes et que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t$ avec $a>b>0$?

3) Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\mathrm{d}t$.

Sol. 8):

1) On pose $g(x)=f\,(rx)$, et on utilise le théorème de comparaison série intégrale.
Ainsi $\mathrm{S}(r)$ converge, de plus en redétaillant la preuve

$$f((k+1)r)\leqslant \int_k^{k+1} g = \frac{1}{r}\int_{kr}^{(k+1)r} f \leqslant f(kr)$$

Donc $0\leqslant \mathrm{S}(r)-\frac{1}{r}\int_0^{+\infty} f\leqslant f(0)$ (on utilise $\lim_{+\infty} f=0$ qui découle des hypothèse)

Donc $\mathrm{S}(r)=\frac{1}{r}\int_0^{+\infty} f+\underset{r\to 0}{\mathrm{O}}(1)$ et comme $\int_0^{+\infty} f>0$, $\mathrm{S}(r)\underset{r\to 0}{\sim}\frac{1}{r}\int_0^{+\infty} f$.

2) exo ultra-classique
On découpe en deux sur $0,\mathrm{X}$, je ne vois pas le rapport avec la question précédente.

D'abord $\frac{f(at)-f(bt)}{t}$ se prolonge en 0. Ensuite et surtout,

$\int_{\mathrm{X}}^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\mathrm{X}\to 0}\int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ (par changement de variable)

Puis $\left|\int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}}\frac{f(0)}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant \|f(t)-f(0)\|_{[a\mathrm{X},b\mathrm{X}]}\times\left|\ln\frac{b}{a}\right|\underset{\mathrm{X}\to 0}{\to} 0$

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t=f(0)\times\ln\frac{b}{a}$.

3) Application $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\mathrm{d}t=\ln\frac{2}{1}=\ln 2$ avec $f(t)=e^{-t}$.

Ex 9 ✍ X 2017 RMS Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue T-périodique. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Sol. 9): Tout d'abord si λ existe, il est unique (facile).
Conjecturons (facilement) que $\lambda_0 = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_1^{1+\mathrm{T}} f$ de sorte que $f_0 = f - \lambda_0$ est périodique de moyenne nulle.
Etudions la convergence de $\left(\displaystyle\int_1^{1+n\mathrm{T}} \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$.
On a

$$\int_1^{1+n\mathrm{T}} \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\mathrm{d}t = -\int_1^{1+n\mathrm{T}} \frac{f_0(t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+k\mathrm{T}}^{1+(k+1)\mathrm{T}} \frac{f_0(t)}{t}\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_1^{1+\mathrm{T}} \frac{f_0(t)}{t+k\mathrm{T}}\mathrm{d}t}_{u_k}$$

Effectuons une intégration par partie en posant

$$f_0 \leftarrow \int_1^t f_0 = \mathrm{F}_0(t)$$
$$\frac{1}{t+k\mathrm{T}} \to -\frac{1}{(t+k\mathrm{T})^2}$$

Il vient, avec $\displaystyle\int_1^{1+\mathrm{T}} f_0 = 0$,

$$u_k = 0 + \int_1^{1+\mathrm{T}} \frac{\mathrm{F}_0(t)}{(t+k\mathrm{T})^2}\mathrm{d}t$$

F_0 est bornée sur $[1, 1+\mathrm{T}]$ par M, et on obtient

$$|u_k| \leqslant \mathrm{M}\int_1^{1+\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}t}{(t+k\mathrm{T})^2} = \underbrace{\mathrm{M}\left(\frac{1}{1+k\mathrm{T}} - \frac{1}{1+(k+1)\mathrm{T}}\right)}_{\text{t.g. d'uen série convergente}}$$

Donc $\left(\displaystyle\int_1^{1+n\mathrm{T}} \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge d'où la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\mathrm{d}t$ car pour $x \in [1+n\mathrm{T}, 1+(n+1)\mathrm{T}[$,

$$\left|\int_{1+n\mathrm{T}}^{x} \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{K}\int_{1+n\mathrm{T}}^{1+(n+1)\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{K}\ln\left(\frac{1+(n+1)\mathrm{T}}{1+n\mathrm{T}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Exercices d'approfondissement

Ex 10 ☕ Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Sol. 10): Dans le cas où f est intégrable sur $[1, +\infty[$, la majoration $\left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \leqslant |f(t)|$ si $t \geqslant 1$ permet de conclure.
Sinon on revient à la définition de la convergence.
Appelons F la primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en 1
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ signifie, par définition, que F admet une limite finie en $+\infty$.
Pour tout $x \geqslant 1$, par intégration par parties sur $[1, x]$ (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment),

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{F}(x)}{x} - \frac{\mathrm{F}(1)}{1} + \int_1^x \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

De plus, F est continue sur $[1, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est **bornée** sur $[1, +\infty[$.
Notons M un majorant de $|\mathrm{F}|$ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0$, et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\mathrm{F}(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{t^2}$.
Donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{F}(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et finalement, $\displaystyle\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie bien que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
On obtient, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Ex 11 [Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Prouver l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

On pourra étudier la série de terme général $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

Sol. 11):

- On étudie, comme conseillé, la série de terme général a_n. Par translation, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$

  On note ce terme $a_n(-1)^n b_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme b_n est positif et la série $\sum a_n$ est donc une série alternée. Il reste à étudier la décroissante vers 0 de (b_n) pour pouvoir appliquer le critère spécial pour les séries alternées. Puisque f est décroissante et positive sur $\mathbb{R}$, pour tout $u \in [0,\pi]$, $f(u+(n+1)\pi) \leqslant f((n+1)\pi) \leqslant f(u+n\pi)$, et puisque $\sin u \geqslant 0$ sur $[0,\pi]$, on obtient,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^{\pi} f(u+(n+1)\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u &\leqslant \int_0^{\pi} f((n+1)\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

  c'est-à-dire $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. On a également $b_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} f(n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u = 2f(n\pi)$ donc (b_n) est une suite décroissante vers 0. En conclusion $\sum(-1)^n b_n$ converge.

- On doit maintenant étudier la limite de $\displaystyle\int_0^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$. On va s'approcher de la série étudiée précédemment. Soit $x > 0$, il existe un unique $\mathrm{N}(x) \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N}(x)\pi \leqslant x < (\mathrm{N}(x)+1)\pi$.
  Plus précisément, $\mathrm{N}(x) = \mathrm{E}(x/\pi)$.

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi\mathrm{N}(x)} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{\pi\mathrm{N}(x)}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{\pi\mathrm{N}(x)}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (x-\pi\mathrm{N}(x))|f(\pi\mathrm{N}(x))| \\ &\leqslant \pi|f(\pi\mathrm{N}(x))| \end{aligned}$$

  Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{N}(x) = +\infty$, la différence précédente tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}(x)} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

  L'intégrale est donc convergente.

Ex 12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sol. 12): • Notons $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, primitive sur $\mathbb{R}_+$ de f qui s'annule en 0. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$, on a $g(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0}$. F étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{F}'(0) = f(0)$.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}+$.

- On va chercher à intégrer par parties $\int g^2$. On doit dériver g et g n'est $\mathscr{C}^1$ que sur $]0, +\infty[$ (en général).

  On se donne donc $0 < a < b$,
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = \left[tg^2(t)\right]_a^b - \int_a^b 2tg(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$
  Or, pour $t > 0$, $g'(t) = \frac{f(t)}{t} - \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2}$ et $tg'(t) = f(t) - \frac{\mathrm{F}(t)}{t} = f(t) - g(t)$. Cela donne
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = bg^2(b) - ag^2(a) + 2\int_a^b g(t)\left(g(t) - f(t)\right)\,\mathrm{d}t$$
  ce qui donne,
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Toutes les fonctions qui apparaissent sont continues en 0, on peut alors passer à la limite lorsque a tend vers 0, ce qui donne
$$\begin{aligned}\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t &= -bg^2(b) + 2\int_0^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$
  ce qui donne, en élevant au carré
$$\left(\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
  Le cas où g est la fonction nulle donne bien le résultat souhaité.

  Dans le cas contraire, il existe B tel que pour tout $b \geqslant \mathrm{B}$, $\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t > 0$ ce qui donne, pour $b \geqslant \mathrm{B}$
$$\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
  g^2 étant positive, cela donne l'existence d'une limite lorsque b tend vers $+\infty$ pour $\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$ ainsi que
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ex 13 ☕

Déterminer la nature et calculer la valeur de $\mathrm{I} = \lim\limits_{a \to 0} \int_a^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right)\,\mathrm{d}t$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Sol. 13): Remarquons que la fonction est bien continue par morceaux sur $]0, 1]$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout les segments $[a, 0]$ pour $a \in]0, 1]$).
Effectuer le changement de variables $t = 1/x$ et découper sur $[k, k+1]$. Alors $\mathrm{I} = 1 - \gamma$.
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{1/n} = \int_{1/n}^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) &= \int_1^n (u - \lfloor u \rfloor)\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (u - \lfloor u \rfloor)\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln k - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) \\ &= \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 1 - \gamma.\end{aligned}$$