

INTÉGRATION SUR INTERVALLE QUELCONQUE

Exercices d'application

Ex 1 Étudier l'intégrabilité des fonctions:

- 1) $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.
- 2) $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[1, +\infty[$.
- 3) $t \mapsto \frac{\sin t}{t^{3/2}}$ sur $]0, +\infty[$.
- 4) $t \mapsto \exp(-\sqrt{t})$ sur $[0, +\infty[$ et calcul.
- 5) $t \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}$ sur $]0, 1[$.
- 6) $t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ sur $[1, +\infty[$.

Ex 2 Des intégrales impropres en physique ou en S.I.I. ?

- 1) La période d'un pendule circulaire de longueur ℓ dépend de l'amplitude θ_0 ($0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$) suivant la formule

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Montrer que cette intégrale est convergente.

- 2) Le champ produit par une tige uniformément chargée en un point distant de $a > 0$ est donnée par la formule

$$E = \frac{a\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{(a^2 + y^2)^3}}.$$

Montrer la convergence de cette intégrale puis la calculer.

INDICATION on pourra effectuer le changement de variable $y = a \tan u$.

- 3) On applique une charge constante à un amortisseur pneumatique.

Le temps de compression isotherme s'écrit à un facteur près

$$I = \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{\frac{h}{h-h_0}} dh \text{ avec } h_1 > h_0.$$

Montrer la convergence de cette intégrale puis donner les étapes de calcul qui mène au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

INDICATION on pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\frac{h}{h-h_0}}$

(☛) Les plus courageux pourront tenter d'effectuer le calcul complet.

Le logiciel de calcul formel Sage¹ fournit:

```
var('h, h0, h1')
assume(h0 < h1, h0 > 0)
show(integrate(sqrt(h/(h-h0)), h, h0, h1))
```

RÉSULTAT DU LOGICIEL

$$\frac{1}{2} h_0 \log \left(\sqrt{-\frac{h_1}{h_0-h_1}} + 1 \right) - \frac{1}{2} h_0 \log \left(\sqrt{-\frac{h_1}{h_0-h_1}} - 1 \right) - (h_0 - h_1) \sqrt{-\frac{h_1}{h_0-h_1}}$$

Ex 3 Moments de la gaussienne

Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt$ en sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

¹allez faire un tour sur <http://www.sagemath.org/>

Exercices d'entraînement

Ex 4 Existence et calcul de $\int_0^1 \operatorname{Arctan}(\sqrt{1-t^2}) dt$.

Ex 5 Étudier l'intégrabilité de $f : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\sin t}{t} (\sqrt{t + \sin t} - \sqrt{t}) \end{cases}$.

Ex 6  Existence et calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

INDICATION on pourra utiliser que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right)$

Ex 7  **MINES 2017** RMS Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer que $x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

b) Montrer que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ex 8  **MINES 2017** RMS Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1) On suppose f décroissante. Justifier, pour $r > 0$, l'existence de $S(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(kr)$. Déterminer un équivalent de $S(r)$ lorsque $r \rightarrow 0^+$.

2) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs complexes et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ avec $a > b > 0$?

3) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

Ex 9  **X 2017** RMS Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue T -périodique. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

Exercices d'approfondissement

Ex 10  Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

Ex 11  [Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Prouver l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin t dt.$$

On pourra étudier la série de terme général $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t dt$.

Ex 12  Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{\infty} f(t) dt$ si $x > 0$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt.$$

Ex 13 

Déterminer la nature et calculer la valeur de $I = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction « partie entière ».