Algèbre linéaire (révision)

Exercices d'application

Ex 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Sol. 1) : • Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, il est immédiat que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
• Pour la réciproque raisonnons par contraposition : supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, il existe donc x et y tels que $x \in F$ et $x \notin G$, $y \in G$ et $y \notin F$.
On a alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$, $x + y \notin F$ car $x \in F$ et $y \notin F$ (si $x + y \in F$ on aurait $y = (x + y) - x \in F$) et de même $x + y \notin G$, d'où $x + y \notin F \cup G$, ce qui montre que $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.

Ex 2 Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3), on pose

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ et } G = \text{Vect}(e_2, e_3).$$

Caractériser les sous-espaces supplémentaires de F et de G.
Déterminer un supplémentaire commun à F et G.

Sol. 2) : Les supplémentaires de F sont les droites $\mathcal{D} = \mathbb{R}x$ avec $x \notin F$ c'est-à-dire x s'écrivant sous la forme $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $x_3 \neq 0$.
De même pour G avec $x_1 \neq 0$.
Pour un supplémentaire commun, on choisit un $x \notin F \cup G$ c'est-à-dire tel que $x_1 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$. Typiquement, on peut choisir $x = e_1 + e_3$.

Ex 3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geqslant 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.
Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

Sol. 3) : Remarquer que $F_1 \cup F_2 \subsetneq E$ sauf si $F_1 = F_2 = E$.
Puis considérer $x \in E - (F_1 \cup F_2)$ puis $F_1' = F_1 \oplus < x >$ et $F_2' = F_2 \oplus < x >$, on augmente ainsi la dimension jusqu'à atteindre celle de E.

Ex 4

1) Montrer que pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-int}\text{d}t = \begin{cases} 2\pi \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

2) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant $f_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $p < n$ dans $\mathbb{Z}$, montrer que $(f_p, \cdots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose pour $t \in \mathbb{R}$, $c_k(t) = \cos(kt)$ et $s_k(t) = \sin(kt)$. Déduire de la question précédente que $(c_1, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n)$ forme une famille libre.

Sol. 4) :

1) immédiat, attention $t \mapsto e^{i(k-n)t}$ admet pour primitive $t \mapsto \dfrac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)}$ si... $k \neq n$.

2) on écrit $\displaystyle\sum_i \lambda_i f_i = 0$ on multiplie par une f_{-j} adéquat, on intègre sur $[0, 2\pi]$ et on en déduit $\lambda_j = 0$.

3) $c_k = \dfrac{f_k + f_{-k}}{2}$ et $s_k = \dfrac{f_k + f_{-k}}{2i}$. Il suffit alors d'écrire la combinaison $\displaystyle\sum_i \lambda_i f_i + \sum_j \mu_j s_j = 0$.

Ex 5 Centrale 2012 Si $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kx)$ et $g_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^k(x)$. Montrer que les familles $(f_k)_{k \geqslant 1}$ et $(g_k)_{k \geqslant 1}$ sont libres.

Sol. 5) : • Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = h = 0$, on considère les nombres $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mt)\, h(t)\text{d}t$ et on utilise les relations d'orthogonalité pour le produit scalaire préhilbertien.
• Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k = 0$, on considère le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k X^k$.
On remarque que si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sin^k(x) = 0$ (dans l'espace des fonctions) le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k = 0$ admet tous les éléments de $[0, 1]$ comme racines et est donc nul.
Réf. RMS X Centrale 2012 exo 236

Ex 6 X 2010 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 2\pi[$ distincts et, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f_k = x \mapsto e^{i\lambda_k x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Sol. 6) : Attention, on n'a pas dit que x devait être réel mais c'est vrai en particulier pour x réel.
On utilise la dérivation et on raisonne par récurrence sur n.
Réf. RMS10 X exo 38

Ex 7 CCP 2017 G. Perier Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = 0 \text{ et } \mathrm{P}'(0) = 0\}$ $(n \geqslant 2)$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2) Vérifier que $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}-1) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array} \right.$ est un isomophisme.

Sol. 7) : $\mathrm{E} = \mathrm{X}^2\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}]$ est de dimension $n-1$. On vérifie aisément qu'on arrive bien dans $\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}]$.
On regarde la matrice dans les bases $(\mathrm{X}^k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ et $(\mathrm{X}^k)_{k\leqslant n-2}$ et on voit une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Ex 8 *Effet sur les familles libres et génératrices*
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ linéaire.
On suppose qu'il existe une famille génératrice de E.

1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.

2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Sol. 8) :

1) $\Rightarrow$ OK, réciproquement, par l'absurde et on prouve $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$.

2) $\Longleftarrow$ OK, réciproquement, on utilise une famille génératrice de E et c'est immédiat.

Ex 9 **Version dimension quelconque**
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x, u(x))$ est une famille liée.

1) Montrer l'existence et l'unicité d'une application $\lambda : \mathrm{E}\setminus\{0\} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}, u(x) = \lambda(x)\, x$$

2) Soit x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrer que si (x, y) est une famille liée alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.

3) Soit x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrer que si (x, y) est une famille libre alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.
Indication : On pourra considérer $\lambda(x+y)$.

4) En déduire l'existence d'un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}, u(x) = \lambda_0 x$ c'est-à-dire que u est l'homothétie $\lambda_0\, \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$

5) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que u est une homothétie vectorielle si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x, u(x))$ est une famille liée.

Sol. 9) :

1) • Soit $x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}$, comme $(x, u(x))$ est une famille liée, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que

$$\alpha x + \beta u(x) = 0.$$

Supposons $\beta = 0$, alors de $\alpha x = 0$ on déduit, puisque $x \neq 0$, que $\alpha = 0$,
ce qui est contradictoire avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}$,
donc on a $\beta \neq 0$. On en déduit $u(x) = -\dfrac{\alpha}{\beta}x$, d'où l'existence du $\lambda(x) = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.
• Supposons $u(x) = \mu x$. Il vient par soustraction $[\lambda(x) - \mu]\, x = 0$,
d'où, puisque $x \neq 0$, $\lambda(x) - \mu = 0$ donc $\lambda(x) = \mu$, d'où l'unicité de $\lambda(x)$ tel que $u(x) = \lambda(x)\, x$.
• On a montré que pour tout $x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}$, il existait un unique $\lambda(x)$ tel que $u(x) = \lambda(x)\, x$,
d'où l'existence et l'unicité de l'application $\lambda : \mathrm{E}\setminus\{0\} \to \mathbb{K}$ vérifiant cette propriété.

2) Soit (x, y) une famille liée de deux vecteurs non nuls de E. Comme ci-dessus, on en déduit l'existence de $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$.
Puisque u est une application linéaire,

$$\lambda(y)\, y = u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu\lambda(x)\, x = \lambda(x)\, y$$

d'où, par soustraction, $[\lambda(y) - \lambda(x)]\, y = 0$,
d'où, puisque $y \neq 0$, $\lambda(y) - \lambda(x) = 0$, et donc $\lambda(x) = \lambda(y)$.

3) Soit (x, y) une famille libre de vecteurs (nécessairement non nuls) de E.
On calcule alors $\lambda(x+y)(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda(x)\, x + \lambda(y)\, y$,
d'où, par soustraction, $[\lambda(x+y) - \lambda(x)]\, x + [\lambda(x+y) - \lambda(y)]\, y = 0$,
Mais puisque (x, y) est une famille libre, $\lambda(x+y) - \lambda(x) = \lambda(x+y) - \lambda(y) = 0$,
donc $\lambda(x) = \lambda(y)$.

4) Fixons $x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}$ et posons $\lambda_0 = \lambda(x)$. On a montré aux deux questions précédentes que pour tout $y \in \mathrm{E}\setminus\{0\}$,
on a $\lambda(y) = \lambda(x) = \lambda_0$ donc $u(y) = \lambda(y)\, y = \lambda_0 y$.
On a de plus, puisque u est linéaire, $u(0) = 0 = \lambda_0 0$, d'où la conclusion.

5) On a montré dans les questions précédentes que si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x, u(x))$ est une famille liée, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que u est l'homothétie vectorielle de rapport λ_0.
Réciproquement, soit u une homothétie vectorielle de rapport $\lambda_0 \in \mathbb{K}$.
On a alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, $u(x) = \lambda_0 x$, $\lambda_0 x - u(x) = 0$, ce qui montre que la famille $(x, u(x))$ est liée puisque $(\lambda_0, -1) \neq (0, 0)$. D'où l'équivalence demandée.
Remarque en dimension finie, on peut raisonner beaucoup plus rapidement en considérant une base.

Ex 10 Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous dire de $f(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2)$, $f(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2)$, $f^{-1}(\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2)$, $f^{-1}(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2)$?

Sol. 10) : • $f(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2) = f(\mathrm{E}_1)+f(\mathrm{E}_2)$.
• $f(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2) \subset f(\mathrm{E}_1)\cap f(\mathrm{E}_2)$.
Contre-exemple pour l'inclusion inverse : $\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2=\{0\}$ et $f(\mathrm{E}_1)=f(\mathrm{E}_2)=\mathrm{F}$.
• $f^{-1}(\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2) \supset f^{-1}(\mathrm{F}_1)+f^{-1}(\mathrm{F}_2)$.
Contre-exemple pour l'inclusion inverse : f = un projecteur sur une droite $\mathcal{D}$ dans le plan. $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ deux droites sécantes (en 0) avec $\mathcal{D}$.
• $f^{-1}(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2) = f^{-1}(\mathrm{F}_1)\cap f^{-1}(\mathrm{F}_2)$.

Ex 11 *Vrai ou Faux ?*
Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E.

1) $f\circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2) $\mathrm{Im}\,(g\circ f) \subset \mathrm{Im} g$.
3) $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}\,(g\circ f)$.
4) $\mathrm{Ker}\ (g\circ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$.
5) $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\ (g\circ f)$.
6) $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
7) $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\ f = f(\mathrm{Ker}\, f^2)$.
8) Si f est injective, alors f est bijective.
9) $f(\mathrm{Ker}\,(g\circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Sol. 11) : F V F F V V V F V (écrire).

Exercices d'entraînement

Ex 12 *Un peu de manipulation abstraite sur les projecteurs...*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et p et q deux projecteurs de E

1) Montrer les équivalences :
$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow p\circ q+q\circ p = 0 \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = 0$.
2) On suppose ces propositions équivalentes réalisées, exprimer $\mathrm{Im}\,(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(q)$, et $\mathrm{Ker}\ (p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}\ (p)$ et $\mathrm{Ker}\ (q)$.

Sol. 12) :

1) $(p+q)^2 = p+q+p\circ q+q\circ p$ donc $(p+q)^2 = p+q$ ssi $p\circ q+q\circ p = 0$ (1).
Sans les matrices : on suppose $p\circ q+q\circ p = 0$ et on veut montrer que $p\circ q = 0$.
Remarquons que p et q jouent des rôles symétriques, contentons-nous de démontrer que $q\circ p = 0$.
On compose à gauche par p l'expression (1), il vient
$$p\circ q+p\circ q\circ p = 0.$$
donc $\boxed{-q\circ p} = p\circ q = -(p\circ q)\circ p = +(q\circ p)\circ p = \boxed{q\circ p}$ donc $q\circ p = 0$.
(pour les 5/2) Si on est en dimension finie : (rédaction utilisant la réduction) on remarque alors que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par q donc, en réfléchissant un peu, on peut trouver une base commune de réduction (codiagonalisation) : en écrivant avec les matrices diagonales ne comportant que des 1 et des 0, il vient $p\circ q+q\circ p = 0 \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = 0$.
2) Avec les matrices : $\boxed{\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q}$ et $\boxed{\mathrm{Ker}\ (p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q.}$
sinon, direct avec $p\circ q = q\circ p = 0$:
$\mathrm{Im}\,(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$, réciproquement, si $x = p(a)+q(b)$ alors $p(x) = p(a)$ et $q(x) = q(b)$ donc $x = (p+q)(x) \in \mathrm{Im}(p+q)$.
idem avec le Ker , $\mathrm{Ker}\ (p+q) \supset \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. Si $x \in \mathrm{Ker}\ (p+q)$ alors $p(x) = -q(x)$ d'où $p(p(x)) = p(x) = -p(q(x)) = 0$, idem pour q donc $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

Ex 13 X 2015 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, f, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que
$$\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f \iff \exists\, h \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ g = f\circ h.$$

Sol. 13) : $\Leftarrow$ OK
$\Rightarrow$ Ecrivons que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{S}$. On a $f_{|\mathrm{S}\to\mathrm{Im}\, f}$ isomorphisme.
Posons $h = \left(f_{|\mathrm{S}\to\mathrm{Im}\, f}\right)^{-1}\circ g$ possible car $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$.
On a bien $h(x) = g(x)$.

Ex 14 Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E tels que :
$$u\circ v = u \text{ et } v\circ u = v$$
Montrer que u et v sont des projecteurs de E et ont même noyau.
Etudier la réciproque.

Sol. 14) : $u^2 = u \circ v \circ u = u \circ v = u$, idem pour v, donc ce sont des projecteurs.
$u \circ v = u$ implique que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.
De même, par symétrie, $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$ d'où l'égalité des noyaux.
Réciproquement, soient u et v deux projecteurs de même noyaux.
Pour montrer que $u \circ v = u \Leftrightarrow u \circ (\mathrm{id} - v) = 0$, il suffit de remarquer que

$$\operatorname{Im}(\mathrm{id} - v) = \operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u.$$

($\mathrm{id} - v$ est le projecteur associé à v...).

Ex 15 X 2011 Soit $\Phi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1) Montrer que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.
2) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de degré n. Montrer que $(\mathrm{P}, \Phi(\mathrm{P}), \ldots, \Phi^n(\mathrm{P}))$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Sol. 15) : Si P n'est pas constant, $\Phi(\mathrm{P}) - \mathrm{P}$ a un degré égal à $\deg(\mathrm{P}) - 1$.
Si $\deg \mathrm{P} = n$, $(\Phi - \mathrm{id})^{n+1}(\mathrm{P}) = 0$. Donc $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.
De plus, $(\mathrm{P}, (\Phi - \mathrm{id})(\mathrm{P}), \ldots, (\Phi - \mathrm{id})^n(\mathrm{P}))$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, car on a $n+1$ polynômes échelonnés en degré. Ces polynômes sont formés de vecteurs combinaisons linéaires de P, $\Phi(\mathrm{P})$, ..., $\Phi^n(\mathrm{P})$, donc ces derniers vecteurs forment une famille génératrice, et comme il y en a $n+1$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Réf. RMS X PC 2011 exo 20

Ex 16 Soit $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose $e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E. Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Sol. 16) : Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

Supposons qu'il existe (λ_i) tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e'_j = 0$.

On obtient $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$ ce qui se réécrit

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \lambda_j\right) e_j = 0.$$

Il vient pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{C}$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\mathrm{C} = \mathrm{C}$ donc $\mathrm{C} = 0$ (sauf si $n = 1$, cas particulier exclu dans l'énoncé).

$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$. Pour calculer P^{-1}, on peut inverser le système $\mathrm{Y} = \mathrm{PX}$

En sommant toutes les égalités, il vient $\sum_{i=1}^{n} y_i = (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i$ (E).

La première équation $\times(n-1)$ $-$ (E) donne $(n-2)y_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} y_i = -(n-1)x_1 \Leftrightarrow (n-1)y_1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = -(n-1)x_1$
d'où

$$x_1 = -y_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

De même pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$x_k = -y_k + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

On en déduit alors P^{-1}.
Autre solution.
$\mathrm{P} = \mathrm{J} - \mathrm{I}$ avec $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$.
Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\mathrm{J} - \mathrm{I})(a\mathrm{I} + b\mathrm{J}) = \mathrm{I}$ c'est-à-dire, $(a + (n-1)b)\mathrm{J} - a\mathrm{I} = \mathrm{I}$.
On peut prendre $a = -1$ et $b = -\frac{a}{n-1} = \frac{1}{n-1}$. Donc $\boxed{\mathrm{P}^{-1} = -\mathrm{I} + \frac{1}{n-1}\mathrm{J}.}$

Ex 17 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2+1)\,\mathrm{P}' - (2\mathrm{X} - \alpha)\,\mathrm{P}. \end{array} \right.$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2) Discuter selon les valeurs de α le rang de φ.
3) Lorsque φ n'est pas de rang 3, donner une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$, puis montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Sol. 17) :

1) Le terme en X^3 s'annule.
2) On peut écrire la matrice de φ dans la base canonique.
On trouve $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & a & 2 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.

$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & a & 2 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} = a(a^2+4)$ donc $\operatorname{rg}\varphi = 3$ ssi $a \neq 0$.
Lorsque $a = 0$, $\operatorname{rg}\varphi = 2$.

3) $\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left((0,1,0),(1,0,-1)\right)$ donc $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(X, X^2-1)$.

$\operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right)$ donc $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X^2+1)$.

Comme $X^2+1 \notin \operatorname{Im}\varphi$, il est clair que $\operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_2[X]$.

Ex 18 X 2014 Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce encore une famille libre si on voit les vecteurs dans $\mathbb{C}^3$?

Sol. 18) : Si une combinaison linéaire complexe des vecteurs est nulle, on en sépare partie réelle et partie imaginaire, ce qui donne deux combinaisons linéaires réelles nulles, et cela tue séparément les coefficients de ces deux combinaisons linéaires. Aucun calcul et surtout pas de déterminant.
Réf. RMS X PC 2014 exo 28

Ex 19 Mines 2014 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1. Montrer que $A(\operatorname{Im} B) \subset \operatorname{Im} B$ ou $A(\operatorname{Ker} B) \subset \operatorname{Ker} B$.

Sol. 19) : Notons $L = AB - BA$. Soit $X \in \operatorname{Ker}(B)$. Alors $(AB-BA)X = -BA(X) = L(X)$.
Si pour tout $X \in \operatorname{Ker}(B)$, $-B(A(X)) = 0$, alors $A(\operatorname{Ker}(B) \subset \operatorname{Ker}(B)$.
Sinon, choisissons un $X \in \operatorname{Ker}(B)$ tel que $-B(A(X))$ ne soit pas nul.
Alors $-B(A(X))$ est un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im}(L)$ et cette droite est donc contenue dans $\operatorname{Im}(B)$.
Mais alors, si $Y \in \operatorname{Im}(B)$, il existe Z tel que $Y = B(Z)$. Dans ce cas, $A(Y) = A(B(Z)) = B(A(Z)) + LZ$, où $LZ \in \operatorname{Im}(L) \subset \operatorname{Im}(B)$. On voit que $A(Y)$ est bien aussi dans $\operatorname{Im}(B)$.
Réf. RMS Mines PC 2014 exo 136

Ex 20 Mines 2006 On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1$, $P_n(X) = \dfrac{X-n+1}{n}P_{n-1}(X)$.
Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}$.
Montrer que les composantes de $P(X)$ dans cette base sont dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Sol. 20) : suivre les indications...
Supposons que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.
On a pour $i \in [\![0, n]\!]$, $P(i) = \alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Ex 21 X 2013 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1) On considère une famille $H_1, H_2, \ldots, H_m$ de m hyperplans de E. Trouver une minoration de la dimension de $H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

2) Même question si l'on remplace « hyperplans » par « sous-espaces de dimension fixée p ».

3) À quelle condition sur m et p est-on certain que l'intersection n'est pas réduite à $\{0\}$?

Indication : Manipulation de formules de Grassmann, recherche de contre-exemples.

Sol. 21) :

1) Soit $E_m = H_1 \cap \cdots \cap H_m$. Alors E_{m+1} est le noyau de la restriction à E_m de la forme linéaire qui définit H_{m+1}, et c'est donc E_m ou un hyperplan de E_m. Donc $\dim E_{m+1} \geqslant \dim E_m - 1$. Donc $\dim E_m \geqslant n - m$.

2) De même, si tous les H_m ont même codimension $q = n - p$, alors E_{m+1} est de dimension au moins $\dim E_m - q$, car sa codimension dans E_m est inférieure ou égale à celle de H_m dans E. Ainsi, par récurrence, $\operatorname{codim} E_m \leqslant mq$, autrement dit $\dim E_m \geqslant n - mq = n - m(n-p)$.

3) Le reste est du baratin et les contre-exemples sont faciles à trouver avec juste des vecteurs de la base canonique. C'est la notion de codimension qui compte !

Ex 22 X 2014 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f\circ f)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

Sol. 22) : Montrons que $\dim(\operatorname{Ker}(f\circ g)) \leqslant \dim\operatorname{Ker}(f) + \dim\operatorname{Ker}(g)$.
Appliquons le théorème du rang sur $g_{|\operatorname{Ker}(f\circ g)}$ et remarquons que $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f\circ g)$.

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(f\circ g)) &= \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Ker}(f\circ g)) + \operatorname{rg}\left(g_{|\operatorname{Ker}(f\circ g)}\right) \\ &= \dim(\operatorname{Ker}(g)) + \operatorname{rg}\left(g_{|\operatorname{Ker}(f\circ g)}\right)\end{aligned}$$

Or $\operatorname{Im}\left(g_{|\operatorname{Ker}(f\circ g)}\right) \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{rg}\left(g_{|\operatorname{Ker}(f\circ g)}\right) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f)$.
Ainsi, $\dim(\operatorname{Ker}(f\circ g)) \leqslant \dim\operatorname{Ker}(f) + \dim\operatorname{Ker}(g)$.
Si on veut redémontrer directement.
On voit que $\operatorname{Ker}(f\circ g) = g^{-1}(\operatorname{Ker} f)$, et que $\dim g^{-1}(F) \leqslant \dim F + \dim\operatorname{Ker}(g)$
Pour cela, on considère S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. On a $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$.

Alors $g^{-1}(\mathrm{F}) = g^{-1}(\underbrace{\operatorname{Im} g \cap \mathrm{F}}_{=\mathrm{F}'}) = (g_{\mathrm{S}\to\operatorname{Im} g})^{-1}(\mathrm{F}') \oplus \operatorname{Ker} g$

Donc $\dim\left(\dim g^{-1}(\mathrm{F})\right) = \dim \mathrm{F}' + \dim(\operatorname{Ker} g) \leqslant \dim \mathrm{E} + \dim(\operatorname{Ker} g)$.
Réf. RMS PC 2014, X exo 38

Exercices d'approfondissement

Ex 23 TPE 2018 E. Martins Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ telles que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

1) **a)** Soit A, B et C trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{B},\mathrm{C})$, montrer que

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v) \text{ et } \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u).$$

b) Comparer $\operatorname{rg}(f)$ et $\operatorname{rg}(g)$.

2) Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

3) On suppose que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} = \operatorname{rg} f = n$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Que peut-on en déduire ?

Sol. 23) :

1)

a) C'est du cours.

b) On a $\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f$ donc $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f$.

2) Soit $x \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$.
Il existe a tel que $x = g(a)$ donc $x = g(a) = g(f(g(a))) = g(f(x)) = g(0) = 0$.
Donc on a bien $\operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$.
Puisque $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$, par le théorème du rang, $\operatorname{rg} g + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$
Conclusion $\mathrm{E} = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$.

3) On a sait alors que g et f sont des isomorphismes (même dimension espace de départ et d'arrivée + surjectivité) donc

$$g \circ f \circ g = g \Rightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$

On en déduit que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Ex 24 Centrale 2015 Soit E un espace vectoriel de dimension n et A un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que $\mathcal{A} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker}(u)\}$ est un espace vectoriel et en donner la dimension.

2) Montrer que $\mathcal{A} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}\}$ est un espace vectoriel et en donner la dimension.

3) On considère maintenant deux sous-espaces vectoriels F et G de E et l'application définie par

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \times \mathscr{L}(\mathrm{G},\mathrm{E}) \\ u & \longmapsto & (u_{|\mathrm{F}}, u_{|\mathrm{G}}) \end{cases}$$

Montrer que si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, Φ est un isomorphisme.

4) Dans le cas général, trouver $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{rg}(\Phi)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit surjective.
Même question pour Φ injective.

5) On suppose Φ injective.
Montrer qu'il existe F′ et G′ tels que $\mathrm{F} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{F}'$ et $\mathrm{G} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{G}'$.
(question de cours)
Quelle est la dimension de $\mathcal{C} = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F} \text{ et } u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{G}\}$?

Sol. 24) :

1) Soit B un supplémentaire de A, la matrice de u dans une base adaptée est écrite par blocs $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $u \in \mathcal{A}$ équivaut à $u_{|\mathrm{A}} = 0$, soit $a = c = 0$.
Donc $\dim = n(n - \dim \mathrm{A})$.

2) $u \in \mathcal{A}$ équivaut à $c = 0$.
Donc $\dim = n^2 - \dim \mathrm{A}(n - \dim \mathrm{A})$

3) Même méthode : On écrit $\mathrm{M}(u)$ dans une base adaptée, par blocs. Immédiat.

4) $u \in \operatorname{Ker}\Phi$ équivaut à $u_{|\mathrm{F}+\mathrm{G}} = 0$. On applique 1) à $\mathrm{A} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$,

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \operatorname{Ker}(u)\}$$

$\dim \operatorname{Ker}(\Phi) = n(n - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}))$
Φ est injective ssi $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = n$ c'est-à-dire $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
$\operatorname{rg}(\Phi) = n^2 - n(n - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})) = n \cdot \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$
Or $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \times \mathscr{L}(\mathrm{G},\mathrm{E})) = \dim \mathrm{E} \cdot (\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G})$
donc par Grassmann, Φ est surjective ssi $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 0$ ssi $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

5) On décompose par blocs avec ce qu'on nous donne avec $F' \mid (F \cap G) \mid G'$. $M = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$
avec p, q, r les dimensions respectives, ainsi $p + q + r = n$.
D'où $\dim \mathcal{C} = p^2 + r^2 + qn$.

Ex 25 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

1) $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

2) $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$

Sol. 25) : 1) On a toujours $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$. On en déduit que l'égalité $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$ est équivalente à $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.
Supposons $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$. Montrons qu'alors $\operatorname{Im} g \circ f \supset \operatorname{Im} g$.
Soit y dans $\operatorname{Im} g$. Il existe x dans E tel que $g(x) = y$.
Or par hypothèse il existe (x', z) dans $E \times \operatorname{Ker} g$ tel que $x = f(x') + z$.
On a alors $y = g(x) = g(f(x'))$, ce qui montre que y est dans $\operatorname{Im} g \circ f$.
Grâce à la remarque précédente on en déduit $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$. Soit x dans E.
Il existe par hypothèse x' dans E tel que $g \circ f(x') = g(x)$. On en déduit $g(x - f(x')) = 0$, donc $z = x - f(x')$ est dans $\operatorname{Ker} g$.
On a ainsi réussi à écrire $x = f(x') + z$ comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} f$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} g$.
On a donc montré $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.
2) Supposons $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
Le théorème du rang montre alors que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} g \circ f$.
Comme on a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$, on en déduit $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$.
Soit alors x dans $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, il existe x' dans E tel que $x = f(x')$ et $g(x) = g(f(x')) = 0$.
On en déduit que x' est dans $\operatorname{Ker} g \circ f$, or on vient de montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$, on a donc $f(x') = x = 0$.
On a ainsi montré que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est immédiate. On a donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.
Supposons réciproquement que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$, et montrons qu'alors on a l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$.
Il suffit de montrer $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} g \circ f$. Soit x dans $\operatorname{Ker} g \circ f$ alors $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.
On a donc $f(x) = 0$, ce qui montre que x est dans $\operatorname{Ker} f$. On conclut par le théorème du rang qu'on a bien $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
Remarque : on peut par exemple utiliser les résultats obtenus pour démontrer le résultat classique :
il y a équivalence (en dimension finie) entre $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
On remarquera également que ces résultats sont parfaitement cohérents avec ceux dont on dispose sur les projecteurs.

Ex 26 X 2016 RMS Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions n et p respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ de rang r. Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathscr{L}(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(F, E)$. Déterminer sa dimension.

Sol. 26) : On écrit tout cela matriciellement $ABA = 0$.
$\exists P, Q$ inversibles telles que $PAQ = J_r$. En posant $\widetilde{B} = QBP$.
On cherche les $\widetilde{B}$ vérifiant $J_r \widetilde{B} J_r = 0$ ce qui est facile par matrice bloc. On trouve $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ S & T \end{pmatrix}$, puis on conclut via l'isomorphisme $B \mapsto \widetilde{B}$.
La dimension vaut donc $np - r^2$.
On peut aussi utiliser la version abstraite du théorème du rang (cela revient complètement au même mais c'est beaucoup plus abstrait).

Ex 27 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathcal{GL}(E)$
Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$

Sol. 27) : Déjà, $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ donc, par le théorème du rang, $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$ (car $\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = n$).
Ensuite, $E = \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ donc $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = n$
or $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \geqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v)$ d'où l'égalité !

Ex 28 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E tel que $u^{n+1} = 0$.
Montrer que $u^n = 0$.
Indication : on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $u^n(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^n(x)\big)$ est libre puis conclure.

Sol. 28) : Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $u^n(x) \neq 0$. La famille $\big(x, u(x), \ldots, u^n(x)\big)$ est libre (classique) et de cardinal $n + 1$. Impossible.

Ex 29 **Utilisation fine du théorème du rang**
Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, Montrer que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

2) Soient $f \in \mathscr{L}(E, F), g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

$$\max(0, \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

Sol. 29) :

1) $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \supset \mathrm{Im}(f+g)$ d'où $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$ puis on écrit $f = (f+g) + (-g)$ etc.

2) $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}), g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que $\max(0, \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim \mathrm{F}) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$

$\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$ + rq évidente d'où $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$.

On considère $g_{|f(\mathrm{E}) \to \mathrm{G}}$ et on applique le théorème du rang.

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim f(\mathrm{E}) - \dim \mathrm{Ker}\, g_{|f(\mathrm{E})} = \dim f(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{Ker}\, g \cap f(\mathrm{E})) \geqslant \mathrm{rg}\, f - \dim(\mathrm{Ker}\, g) \underset{\text{encore th rg}}{=} \mathrm{rg}\, f + (\mathrm{rg}\, g - \dim \mathrm{F})\,.$$

Ex 30 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.

1) Vérifier que pour tout p dans $\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ et $\mathrm{Im}\, f^p \supset \mathrm{Im}\, f^{p+1}$.
Montrer que les suites $(\mathrm{Ker}\, f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\, f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang.

2) Montrer que pour p dans $\mathbb{N}^*$, si $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ alors pour tout q dans $\mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+q}.$$

3) Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ \mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^{p+1},\ (2)\ \mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1},\ (3)\ \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p.$$

4) Donner des exemples d'endomorphismes f pour lesquels $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Sol. 30) : 1) Soit x dans E. L'égalité $f^p(x) = 0$ entraîne $f(f^p(x)) = f^{p+1}(x) = 0$, d'où $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$.
Soit y dans E. Si y appartient à $\mathrm{Im}\, f^{p+1}$ alors il existe x dans E tel que $y = f^{p+1}(x)$.
Ainsi $y = f^p(f(x))$, ce qui montre que y appartient à $\mathrm{Im}\, f^p$.
De la relation $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$, on déduit que la suite d'entiers $(\dim \mathrm{Ker}\, f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est par ailleurs majorée par $\dim \mathrm{E}$.
Cette suite est donc convergente, comme c'est une suite d'entiers elle est stationnaire à partir d'un certain rang :
il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $p \geqslant q$ entraîne $\dim \mathrm{Ker}\, f^p = \dim \mathrm{Ker}\, f^q$. Comme on a de plus $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$, on en déduit que $p \geqslant q$ entraîne $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$.
Le théorème du rang appliqué à f^p et f^{p+1} et la relation $\mathrm{Im}\, f^p \supset \mathrm{Im}\, f^{p+1}$ montre que, pour $p \geqslant q$, on a également $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^{p+1}$.
2) Soit p tel que $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$. Soit q dans $\mathbb{N}$, soit H_q la proposition : $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+q}$. H_1 est vraie par hypothèse.
Soit q dans $\mathbb{N}$, supposons H_q vraie. Soit x dans $\mathrm{Ker}\, f^{p+q+2}$, alors

$$f^{p+q+2}(x) = f^{p+q+1}(f(x)) = 0.$$

Ainsi $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, f^{p+q+1}$ et, d'après H_q, il en résulte que $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, f^{p+q}$. On en déduit $f^{p+q+1}(x) = 0$ ce qui montre que x est dans $\mathrm{Ker}\, f^{p+q+1}$.
L'inclusion réciproque ne pose pas de difficulté. On a donc montré que H_{q+1} est vraie.
Par principe de récurrence on a H_q est vraie pour tout q dans $\mathbb{N}^*$. On a montré que si $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ alors pour tout q dans $\mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+q}$.
3) D'après la relation précédente on a $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ et $\mathrm{Im}\, f^p \supset \mathrm{Im}\, f^{p+1}$. Le théorème du rang appliqué à f^p et f^{p+1} montre que

$$\dim \mathrm{Ker}\, f^p = \dim \mathrm{Ker}\, f^q \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f^p = \dim \mathrm{Im}\, f^q.$$

On en déduit que (1) $\Leftrightarrow$ (2).
Montrons que (2) entraîne (3). Le théorème du rang appliqué à f^p montre qu'on a $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Im}\, f^p + \dim \mathrm{Ker}\, f^p$.
Il reste à montrer que $\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f^p = \{0\}$. Soit z dans $\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f^p$. Il existe x dans E tel que $z = f^p(x)$ et $f^p(z) = 0$.
On en déduit que $f^{2p}(x) = 0$. Or $p \geqslant 1$ on a donc, d'après le résultat précédent, $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{2p}$.
On en déduit que $f^p(x) = 0$, ce qui montre que $z = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f^p = \{0\}$.
Finalement on a bien $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$.
Montrons que (3) entraîne (1).
Soit y dans $\mathrm{Im}\, f^p$. Il existe x dans E tel que $y = f^p(x)$.
Comme on a par hypothèse $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$, il existe (x', z) dans $\mathrm{Ker}\, f^p \times \mathrm{E}$ tel que $x = x'^p(z)$.
On a ainsi $y = f^p(x) = f^p(x'^p(z)) = f^{2p}(z) = f^{p+1}(f^{p-1}(z))$. $(p \geqslant 1)$.
On en déduit que y appartient à $\mathrm{Im}\, f^{p+1}$.
L'inclusion réciproque étant acquise on a bien $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^{p+1}$.
4) La relation proposée est par exemple vérifiée par les projecteurs puisque pour tout projecteur p, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

Ex 31 Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_k$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose :

$$\dim \mathrm{V}_1 + \ldots + \dim \mathrm{V}_k > n(k-1).$$

Montrer que l'intersection des V_i n'est pas réduite à $\{0\}$.

Sol. 31) : Le résultat est immédiat pour $k = 1$. Pour $k = 2$, puisque $\dim(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2) \leqslant n$
La formule de Grassman montre que si V_1 et V_2 sont tels que $\dim \mathrm{V}_1 + \dim \mathrm{V}_2 > n$, alors, on a

$$\dim(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = \dim \mathrm{V}_1 + \dim \mathrm{V}_2 - \dim(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2) > 0.$$

On en déduit que l'intersection $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ n'est pas réduite à $\{0\}$.
Ces premiers résultats peuvent inciter à faire un raisonnement par récurrence.

On a en fait plutôt intérêt à procéder en adaptant la démonstration suivante de la formule de Grassman.
Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Soit u, l'application linéaire de $V_1 \times V_2$ dans E, qui au couple (x, y) associe $u(x, y) = x - y$.
On va appliquer le théorème du rang à u.
L'image de u est donnée par $\operatorname{Im} u = V_1 + V_2$.
Si le couple (x, y) dans $V_1 \times V_2$ est tel que $x + y = 0$, on a $y = -x$ et par conséquent x est dans $V_1 \cap V_2$.
Réciproquement, soit un couple (x, y) dans $V_1 \times V_2$ tel que x est dans $V_1 \cap V_2$ et $y = x$. Alors (x, y) appartient à $\operatorname{Ker} u$.
On montre alors sans difficulté que l'application de $V_1 \cap V_2$ dans $\operatorname{Ker} u$ qui à x associe (x, x) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} u = \dim(V_1 \cap V_2)$.
Par ailleurs l'espace vectoriel $V_1 \times V_2$ est de dimension $\dim V_1 + \dim V_2$.
En reportant les différentes relations obtenues dans le théorème du rang qui dit que

$$\dim V_1 \times V_2 = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u,$$

on obtient la formule de Grassman $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.
Dans le cas qui nous intéresse, on se donne k sous-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_k$,
et on considère l'application linéaire v de $V_1 \times \cdots \times V_k$ vers E^{k-1} qui au k-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$ associe

$$(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1).$$

De nouveau $\operatorname{Ker} v$ est isomorphe à $V_1 \cap \ldots \cap V_k$ grâce à l'application linéaire qui à x dans $V_1 \cap \ldots \cap V_k$ associe $(x, \ldots, x)$.
Le théorème du rang montre alors que $\dim V_1 + \ldots + \dim V_k = \dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) + \dim \operatorname{Im} v$.
Or l'image de v est incluse dans E^{k-1} et sa dimension est donc au plus égale à $n(k-1)$.
L'hypothése $\dim V_1 + \ldots + \dim V_k > n(k-1)$ entraîne ainsi que $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) > 0$, ce qui signifie que l'intersection des V_i n'est pas réduite à $\{0\}$.