

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Ex 1 CENTRALE 2011 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Montrer que $\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \geq 1$.

Sol. 1): Par l'ingélté de Cauchy-Schwarz c'est immédiat

$$1^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 \leq \int_0^1 f \times \int_0^1 \frac{1}{f}$$

Réf. RMS Centrale 2011 exo 331

Ex 2 X 2009 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M(x - a)$ et $|f(x)| \leq M(b - x)$.

2) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f'(c)| = \frac{4}{(b - a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$.

Sol. 2): Remarque Posons $M = \sup_{[a, b]} |f'| = \max_{[a, b]} |f'|$. Par Rolle, on sait que $\min_{[a, b]} |f'| = 0$.

Ainsi $|f'|([a, b]) = [0, M]$.

1) On applique l'inégalité des accroissements finis entre a et x et entre b et x .

2) On intègre entre a et $\frac{a+b}{2}$ la première inégalité et entre $\frac{a+b}{2}$ et b la seconde.

On obtient $0 \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{M}{4}(b - a)^2$ donc $\frac{4}{(b - a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \in [0, M]$ d'où le résultat avec la remarque préliminaire.

Réf. RMS PC X 2009 exo 120

Ex 3 MINES 2009 Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$. On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sol. 3): On écrit $\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \times (t^2)$ et on effectue une IPP,

$$\int_\varepsilon^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right]_\varepsilon^x - 2 \int_\varepsilon^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Donc en faisant tendre ε vers 0,

$$f(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

On retrouve que f se prolonge par continuité en 0 par $f(0) = 0$ et que pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

On a $x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{2}{x} \int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(0) = 0$ avec $g(x) = \int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ qui admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ en 0

(puisque pour $x \neq 0$, $g'(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$).

Remarquons que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ car pour $x \neq 0$, $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et cette expression n'a pas de limite en 0.

Réf. RMS PC Mines 2009 exo 209

Ex 4 X 2007 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Sol. 4): On a

$$\sqrt{k} - 1 \leq \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k}$$

Donc, puisque $0 \leq \sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} - S_n = O(n)$

donc

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par les sommes de Riemann, $\frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \frac{2}{3}$.

Ex 5 MINES 2003 Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}}$.

INDICATION une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Sol. 5): Indication Quantité conjuguée.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}}{2x^2}$$

Puis IPP

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &\leftarrow -\frac{1}{x} \\ \sqrt{x^2+1} &\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx &= \left[-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right]_a^1 + \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} + \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_a^1 \\ &= -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(a + \sqrt{a^2+1}) \end{aligned}$$

Et de même,

$$\frac{1}{x^2} \leftarrow -\frac{1}{x}$$

$$\sqrt{1-x^2} \rightarrow -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &= \left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - [\operatorname{Arcsin} x]_a^1 \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin} a. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(a+\sqrt{a^2+1}) - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} a \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \left(-\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned}$$

car $\frac{\sqrt{a^2+1} - \sqrt{1-a^2}}{a} = a + o_{a \rightarrow 0}(a) \rightarrow 0.$

Ex 6 CENTRALE 2006 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$, et n un entier positif tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$.

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

Sol. 6): On raisonne par l'absurde.

Supposons que f s'annule en changeant de signe p fois avec $p < n$ en des t_i et considérons

$$\int_a^b \underbrace{f(t) \prod_{i=1}^p (t-t_i) dt}_{\text{continue et de signe constant}} = 0$$

Donc $f(t) \prod_{i=1}^p (t-t_i) dt = 0$ pour $t \in [a, b]$ donc f est nulle (même en les t_i par continuité).

Ex 7 MINES 2016 RMS Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{n!} X^n (a-bX)^n$ et $I_n = \int_0^{\frac{a}{b}} e^x P_n(x) dx$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

3) On suppose que $e^{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que qI_n appartient à $\mathbb{Z}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que $\ln(2)$ est irrationnel.

Sol. 7):

1) On a $\max_{[0, \frac{a}{b}]} P_n(x) = P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{n!} \frac{1}{4^n} \frac{a^{2n}}{b^n} = \frac{k^n}{n!}$ d'où $0 \leq I_n \leq e^{\frac{a}{b}} \times \frac{k^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2) On a $P'_n(X) = (a - 2bX)P_{n-1}$ d'où $P_n^{(k)} = (a - 2bX)P_{n-1}^{(k-1)} - 2b(k-1)P_{n-1}^{(k-2)}$ pour $k \geq 2$ par la formule de Leibniz.

On peut alors montrer le résultat par récurrence sur n (on a par ailleurs $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ pour $k < n$).

3) Par intégrations par partie successives, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{a}{b}} e^x P_n(x) dx = \sum_{k=0}^p (-1)^k [e^x P_n^{(k)}(x)]_0^{\frac{a}{b}} + (-1)^{p+1} \int_0^{\frac{a}{b}} e^x P_n^{(p+1)}(x) dx.$$

On choisit $p = 2n$, de sorte que $P_n^{(p+1)} = 0$, il vient $I_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k [e^x P_n^{(k)}(x)]_0^{\frac{a}{b}} = \sum_{k=n}^{2n} (-1)^k [e^x P_n^{(k)}(x)]_0^{\frac{a}{b}}$.

Donc, si $e^{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$, il est clair que qI_n appartient à $\mathbb{Z}$. Par ailleurs, $I_n > 0$ d'où le résultat.

4) Par l'absurde, si $\ln 2 = \frac{a}{b}$ alors $e^{\frac{a}{b}} = 2 = \frac{2}{1}$ donc $I_n \in \mathbb{Z}^*$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, absurde.

Ex 8 ENS 2018 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq 4 \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx$.

Déterminer le cas d'égalité.

Sol. 8): On a par IPP, $\int_0^1 f^2(x) dx = - \int_0^1 2f(x) \cdot x f'(x) dx$.

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 = \left(\int_0^1 2f(x) \cdot x f'(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx$$

Si $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$ alors c'est OK (et $f = 0$), sinon, on peut diviser par $\int_0^1 f^2(x) dx$ et on obtient

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx.$$

Cas d'égalité

Soit $f \neq 0$ sinon on a le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, $x f'(x) = \lambda f(x)$ sur $[0, 1]$.

Sur $]0, 1]$, on obtient $f(x) = K \exp\left(\lambda \int_x^1 \frac{1}{t} dt\right) = Kx^\lambda$. Or $f(1) = 0$ donc $f = 0$ (sinon raisonnement théorique par Cauchy-Lipschitz).

Donc, par continuité, f est identiquement nulle (contradiction).

Ainsi, le seul cas possible est f nulle.

Ex 9 X 2017 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \in [0, 1]$. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2$.

Sol. 9): Remarquons que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geq 0$. Pour montrer l'inégalité il suffit d'établir l'inégalité dérivée puisque pour $x = 0$, on a $0 \leq 0$ ($f' \leq g'$ et $f(0) = g(0) \Rightarrow f \leq g$ sur $\mathbb{R}^+$).

Montrons donc $f^3 \leq 2f \cdot \int_0^x f$, comme $f \geq 0$, montrons $f^2 \leq 2 \int_0^x f$.

Même raisonnement, ça coïncide en 0, dérivons, on peut montrer que $f'f \leq f$, et comme $f \geq 0$, on peut se réduire à montrer que $f' \leq 1$, ce qui est bien le cas, fin de l'exercice !

Ex 10 CENTRALE 2017 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ qui ne s'annule pas et telle que $f(0) = f(2\pi)$. On pose : $\alpha(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.

- 1) Si $z_0 \in \mathbb{C}^*$, résoudre $e^z = z_0$.
- 2) En introduisant la fonction $g : x \mapsto \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} t\right)$, montrer que $\alpha(f) \in \mathbb{Z}$.
- 3) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est à valeurs réelles.
- 4) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est la fonction $x \mapsto \cos(nx) + i \sin(nx)$.
- 5) Interprétation géométrique de α ?

Sol. 10):

- 1) ne pas oublier le modulo 2π .
- 2) Il s'agit de voir que $g(2\pi) = 1$.

On a $fg' - f'g = 0$ donc $\frac{g}{f} = K$ (cte) donc en appliquant en 0 et 2π ,

$$g(0) = Kf(0) = Kf(2\pi) = g(2\pi)$$

De plus $g(0) = 1$ donc $g(2\pi) = 1$.

- 3) $f > 0$ ou $f < 0$, on passe par le $\ln$ et on trouve $\alpha(f) = 0$.
- 4) $\alpha(f) = n$.
- 5) nombre de tours autour de 0.

On peut admettre que l'on peut écrire $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, alors $\alpha(f) = \frac{i}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}$.

Ex 11 ✎ X 2016 Déterminer la valeur moyenne de $t \mapsto \cos^{100} t$.

Sol. 11): On écrit $\cos^n t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{it(2k-n)}$.

Lorsque n est pair, en regroupant sauf le terme du milieu, on a des $\cos(kt)$ d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$ (donc de moyenne nulle).

Il reste pour $n = 2p$, le terme constant $\frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2}$ donc c'est la moyenne.

La réponse est donc la constante, qui vaut

$$\frac{1}{2^{100}} \binom{100}{50},$$

c'est-à-dire pas beaucoup.