

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Ex 1 CENTRALE 2011 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Montrer que $\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \geq 1$.

Ex 2 X 2009 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M(x - a)$ et $|f(x)| \leq M(b - x)$.

2) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f'(c)| = \frac{4}{(b - a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$.

Ex 3 MINES 2009 Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$. On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 4 X 2007 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Ex 5 MINES 2003 Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - x^2}}$.

INDICATION une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ est $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Ex 6 CENTRALE 2006 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$, et n un entier positif tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$.

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Ex 7 MINES 2016 RMS Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$ et $I_n = \int_0^{\frac{a}{b}} e^x P_n(x) dx$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

3) On suppose que $e^{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que qI_n appartient à $\mathbb{Z}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que $\ln(2)$ est irrationnel.

Ex 8 ENS 2018 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq 4 \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx$. Déterminer le cas d'égalité.

Ex 9 X 2017 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \in [0, 1]$. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2$.

Ex 10 **CENTRALE 2017** RMS Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ qui ne s'annule pas et telle que $f(0) = f(2\pi)$. On pose :

$$\alpha(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

- 1) Si $z_0 \in \mathbb{C}^*$, résoudre $e^z = z_0$.
- 2) En introduisant la fonction $g : x \mapsto \exp\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} t\right)$, montrer que $\alpha(f) \in \mathbb{Z}$.
- 3) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est à valeurs réelles.
- 4) Calculer $\alpha(f)$ lorsque f est la fonction $x \mapsto \cos(nx) + i \sin(nx)$.
- 5) Interprétation géométrique de α ?

Ex 11  **X 2016** Déterminer la valeur moyenne de $t \mapsto \cos^{100} t$.