Séries numériques

Exercices d'application

Ex 1 **d'Alembert ou pas d'Alembert ?**
Etudier la nature des séries suivantes:

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^2}$

$\sum_{n\geqslant 2} 2^{-\ln(\ln n)}$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$ $\quad$ (☕) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\ln n)^n}{(n^2+1)a^n}, a>0$ $\quad$ (☕) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$

(☕) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^\alpha}$ $\quad$ (☕) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]^{\sqrt{n}}$ $\quad$ (☕) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

Sol. 1):

- $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ **converge**
- $\left(\sin(\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n})\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ **converge** (termes positifs à partir d'une certain rang)
- $2^{-\ln(\ln n)} \times n = \exp(\ln n\left[1 - \ln 2\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right]) \to +\infty$ donc $\geqslant \frac{1}{n}$ donc **diverge**
- $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc **converge**
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}{2(n+1)} \to \frac{e}{2} > 1$ donc **diverge**
- $\frac{(\ln n)^n}{(n^2+1)a^n} = \exp\left[n(\ln n - \ln a) - \ln(n^2+1)\right] \to +\infty$ **grossièrement divergent**

  On peut aussi écrire qu'il existe un rang à partir duquel $\frac{(\ln n)^n}{(n^2+1)a^n} \geqslant \frac{2^n}{(n^2+1)}$ et que cette dernière expression est le terme général d'une série divergente.
- $u_n = \left[\cos(\frac{1}{n})\right]^{n^\alpha}$

  $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1\underbrace{-\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=u}$ et $\ln(1+u) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

  donc $\ln u_n = \ln\left(\left[\cos(\frac{1}{n})\right]^{n^\alpha}\right) = n^\alpha\ln(1+u) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$, si $\alpha<2$ alors $u_n\to 1$ **grossière divergence**, si $\alpha>2$, $n^2u_n\to 0$ **convergence, si** $\alpha=2$, $u_n\to\frac{1}{\sqrt{e}}$ **grossière divergence**
- $\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$. On montre que $1!+2!+\ldots+n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ donc

  $$\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+p)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}.$$

  La série converge si et seulement si $p\geqslant 2$.
- $u_n = \left[\cos(\frac{1}{\ln n})\right]^{\sqrt{n}}$ on a $\ln u_n = \sqrt{n}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{(\ln n)^2}$ **converge car** $n^2u_n\to 0$.
- $\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$. On compare avec l'intégrale $\int^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)} = \ln(\ln(\ln n))$ qui **diverge.**

Ex 2 Montrer l'existence et calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nx)}{2^n}.$$

Sol. 2): On calcule (somme d'une série géométrique de raison de module strictement plus petit que1) :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{e^{ix}}{2}} = \frac{2}{2+e^{ix}} = \frac{4+2e^{-ix}}{5+4\cos x}$, d'où en prenant la partie réelle des deux membres :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nx)}{2^n} = \frac{4+2\cos x}{5+4\cos x}}$$

Ex 3 On se donne une série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergente.

Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{a_n a_{2n}}$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$; $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Sol. 3): $\sqrt{a_n a_{2n}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{2n})$ donc **convergence**
$a_n^2 \leqslant a_n$ à partir d'un certain rang car $a_n \to 0$ donc $\leqslant 1$ donc **convergence**
$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ donc **convergence**

Ex 4 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et $u_0 > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

Montrer l'équivalence : (u_n) converge $\Leftrightarrow \left(\sum a_n\right)$ converge.

Sol. 4): Supposons que la suite (u_n) converge, alors il s'agit d'une suite bornée :
il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant M$ (il est immédiat que (u_n) est une suite croissante à termes positifs), on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$0 \leqslant a_n \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$ donc $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_{n+1} - u_n)$
or $(u_{n+1} - u_n)$ est le terme général d'une série à termes positifs convergente,donc la série $\left(\sum a_n\right)$ converge.
Supposons que la série $\left(\sum a_n\right)$ converge, comme (u_n) est une suite croissante à termes positifs, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$,
et donc $0 \leqslant u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leqslant \frac{a_n}{u_0}$, d'où $u_{n+1} - u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(a_n)$
on en déduit avec le théorème de comparaison des séries à termes positifs que $(u_{n+1} - u_n)$ est le terme général d'une série convergente, et donc que la suite (u_n) converge.

Ex 5 Calculer les sommes, si elles existent, des séries:
$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1^2 + ... + n^2}$.
INDICATION: $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right]$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \text{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$
INDICATION: on pourra démontrer que $\text{Arctan}\frac{1}{x^2+x+1} = \text{Arctan}\frac{1}{x} - \text{Arctan}\frac{1}{x+1}$ pour $x > 0$.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$ INDICATION: on pourra exprimer $\sin(3\theta)$ comme polynôme en $\sin\theta$.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n!}$ INDICATION: on pourra utiliser la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Sol. 5): • $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n}{n-1})$ donc **converge vers** $\boxed{-\ln 2}$
• $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$ on montre la convergence aisément puis:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{n'}{2^{n'}}\right).$$

Il vient $S = \frac{1}{2}S + 1$ donc $\boxed{S = 2}$
solution n°2 : on dérive la série géométrique (somme partielle pour les 3/2)
• *Rappel:* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right]$
on somme, on utilise la constante d'Euler, il vient: $\boxed{6(3 - 4\ln 2)}$
(avec $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$, $S_n = 18H_n + 6H_{n+1} - 24H_{2n+1} + 18$)
• pour $x > 0$, Arctan$a$ + Arctan$b$?
posons $\tan\alpha = a$ et $\tan\beta = b$ avec α et β dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On sait que $\tan(\alpha+\beta) \underset{\text{si bien défini}}{=} \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
Donc $\alpha+\beta = \text{Arctan}a + \text{Arctan}b = \text{Arctan}\left(\frac{\tan\alpha + \tan b}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\right) + k\pi = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$
ici avec $x \geqslant 1$, $\alpha = \text{Arctan}(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \text{Arctan}\frac{1}{x+1} < \frac{\pi}{4}$ donc $(0 \leqslant)\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ donc $k = 0$.
d'où $\text{Arctan}\frac{1}{x} - \text{Arctan}\frac{1}{x+1} = \text{Arctan}\frac{1/x - 1/(x+1)}{1 + 1/(x(x+1))} = \text{Arctan}\frac{1}{x^2+x+1}$
donc $\sum_{n=0}^{N} \text{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1} = \text{Arctan}1 + \text{Arctan}1 - \text{Arctan}\frac{1}{N+1} \to \boxed{\frac{\pi}{2}}$
• $\sin(3\theta) = \text{Im}(e^{i3\theta}) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ donc $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))$

$3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}(3^{n+1}\sin\frac{x}{3^n} - 3^n\sin(\frac{x}{3^{n-1}})) = \frac{1}{4}(u_{n+1}-u_n)$ avec $u_n = 3^n\sin(\frac{x}{3^{n-1}})$, $n \geqslant 1$

Donc $\sum_{n=0}^{N} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}(u_{N+1}-u_0) \to \boxed{\frac{1}{4}(3x - \sin 3x)}$

• $n^2+n+1 = n(n-1)+n+1$ d'où $\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 2$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = 1+3+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 4+e+2(e-1)+(e-2) = \boxed{4e}$

Ex 6 ✍ Étudier la nature des séries suivantes:

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{\ln(n+a)}{\ln n} - 1\right)^\alpha, a>0$ $\qquad$ $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\text{Arctan}n)^\alpha\right), (\alpha \neq 0)$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ (utiliser : $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$)

Sol. 6):

- $\left(\frac{\ln(n+a)}{\ln n} - 1\right)^\alpha = \left(\frac{\ln(n+\frac{a}{n})}{\ln n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{n\ln n}\right)^\alpha$ **converge ssi** $\alpha > 1$

- $\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\text{Arctan}n)^\alpha\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha (1 - \left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}n\right)^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \alpha(1-\frac{2}{\pi}\text{Arctan}n)$ car $1-x^\alpha \underset{x\to1}{\sim} -\alpha(x-1)$

  d'où

  $\underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1}(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1}(\text{Arctan}\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{n}$

  donc **diverge.**

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ (utiliser : $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.)

  On a $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left[1+(-1)^k\right]\sqrt{3}^k$,

  or si k est impair le terme correspondant est nul, et si k est pair, le terme correspondant est un entier pair,

d'où $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2N$ où $N \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$u_n = \sin\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] = \sin\left[2N\pi - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] = -\sin\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$,

puisque $2-\sqrt{3} < 1$, or $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Ex 7 Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$, est convergente puis calculer sa somme.

Indication on pourra calculer $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

Sol. 7): On montre que

$$(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après le critère spécial des séries alternées, ou parce que l'on connaît la série harmonique alternée, la série $\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, par ailleurs la série $\sum_{n\geqslant1}\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est **absolument** convergente donc la série converge.

Calcul de la somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N+1}(-1)^n\frac{1}{n}\\ &= 1 + \sum_{n=2}^{N}\left((-1)^{n-1}+(-1)^n\right)\frac{1}{n} + (-1)^{N+1}\frac{1}{N+1}\\ &= 1 + (-1)^{N+1}\frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 1.}$

Ex 8 **Séries de Bertrand**

Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ (α, $\beta \in \mathbb{R}$) en comparant à une série de Riemann lorsque $\alpha \neq 1$ et à une intégrale lorsque $\alpha = 1$.

Application : étudier les séries de terme généraux $v_n = \dfrac{1}{\ln n!}$ puis $w_n = n^{\frac{\ln n}{n}} - 1$.

Sol. 8): $\boxed{\alpha = 1}$ La fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$, est une fonction décroissante positive (inutile de dériver). On obtient facilement une primitive F de f :

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ si $\beta \neq 1$ et $\mathrm{F}(x) = \ln(\ln x)$ si $\beta = 1$.

Donc on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, et le critère de comparaison à une intégrale (évoqué en cours, qu'il faut savoir redémontrer) montre que la série de terme général $1/(n(\ln n)^\beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\boxed{\alpha < 1}$ Si $n \geqslant 2$, on écrit $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \dfrac{1}{n} \dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}/(\ln n)^\beta = +\infty$.

Donc, pour n assez grand $\dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \geqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$. La série diverge par comparaison à la série harmonique.

$\boxed{\alpha > 1}$ Soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. Si $n \geqslant 2$, on écrit

$\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \dfrac{1}{n^{\alpha'}} \dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'} (\ln n)^\beta}$.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\alpha'} (\ln n)^\beta = +\infty$. Donc, pour n assez grand $\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'} (\ln n)^\beta} \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$.

La série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque : ces résultats sont utilisés dans beaucoup d'exercices d'oraux. Il est conseillé de savoir les redémontrer.

Application : En majorant chaque terme du produit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ par n, on a, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité $n! \leqslant n^n$, et donc $\ln n! \leqslant n \ln n$.

Finalement $v_n \geqslant \dfrac{1}{n \ln n}$. Comme la série de terme général $1/(n \ln n)$ est une série de Bertrand divergente ($\alpha = \beta = 1$), il en résulte que la série de terme général v_n diverge.

La suite $((\ln n)^2/n)$ converge vers 0. Comme on a l'équivalent $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc $w_n = e^{(\ln n)^2/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. On obtient une série de Bertrand divergente ($\alpha = 1, \beta = -2$), il en résulte que la série de terme général w_n diverge.

Ex 9 **Un théorème sur les suites récurrentes: le théorème du point fixe**

Soit $k \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y| \text{ (application contractante)}$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{K}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Vérifier que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|$

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (étudier la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$)

4) Déterminer sa limite.

Sol. 9): pour le c): $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente donc convergente.

Il y a bien sûr convergence vers l'unique point fixe.

Ex 10 X 2017 RMS Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ lorsque $n \to +\infty$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que la série de terme général e^{-a_n} converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

b) Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

Sol. 10):

1) Supposons $\alpha > 1$. Soit α' tel que $1 < \alpha' < \alpha$. On a pour n assez grand, $\dfrac{a_n}{\ln n} > \alpha'$

donc $e^{-a_n} < e^{-\alpha' \ln n} = \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$ t.g. d'une série convergente.

Supposons $\alpha < 1$. On fait de même avec $\alpha' \in]\alpha, 1[$.

On a pour n assez grand, $e^{-a_n} > e^{-\alpha' \ln n} = \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$ t.g. d'une série divergente.

2) Cas douteux comme pour d'Alembert.

$a_n = \ln n$ donne $e^{-a_n} = \dfrac{1}{n}$ t.g. d'une série divergente.

$a_n = \ln n + 2 \ln \ln n$ donne $e^{-a_n} = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ t.g. d'une série convergente.

Exercices d'entraînement

Ex 11 ☕ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Convergence et somme de la série $\sum u_n$.

Sol. 11): On écrit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{k^4} \underset{n\to+\infty}{\to} 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Pour information, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 2 \times \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}$.

Ex 12 ☕

1) Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

2) À l'aide du produit de Cauchy, établir l'égalité

$$e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{n!}.$$

Sol. 12):

1) On procède comme demandé par récurrence.
Pour $n = 1$, c'est évident.

Puis pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-(k-1))!} (-1)^{k-1} \\
&= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\
&= \frac{-1}{n+1} \left((1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

2) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$ est absolument convergente.

Écrivons

$$\begin{aligned}
e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} \\
&\underset{\text{produit de Cauchy}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot k!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right).
\end{aligned}$$

Ex 13 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{j^n}{n}$ avec $j=e^{2i\pi/3}$.

INDICATION: regrouper par paquets de 3 termes...

Sol. 13): on regroupe par paquets de 3, sachant que le terme général tend vers 0.
$\dfrac{1}{3p}+\dfrac{j}{3p+1}+\dfrac{j^2}{3p+2}=\dfrac{(6+3j)p+2}{3p(3p+1)(3p+2)}\sim\dfrac{2+j}{9p^2}$ donc (abs) **convergence**
puis on passe de la suite extraite (S_{3p+2}) à la suite (S_n)...

Ex 14 Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\ln n/n$ et $v_n=(-1)^n u_n$.

1) Préciser la nature des séries de termes généraux u_n et v_n.

On pose $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}u_p$ et $T_n=\sum_{p=1}^{n}v_p$.

2) Donner un équivalent de S_n à l'infini.

3) Montrer que $S_{2n}-S_n=\ln 2\cdot\ln n+\dfrac{(\ln 2)^2}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

4) Calculer $S_{2n}+T_{2n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

5) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$.

Sol. 14): 1) Pour $n\geqslant 2$, on a $u_n\geqslant\dfrac{\ln 2}{n}$ et la série de terme général u_n diverge par comparaison à la série harmonique.
Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty]$par $f(x)=\ln x/x$. Cette fonction est dérivable et, si $x\geqslant e$, on a $f'(x)\leqslant 0$, donc f est décroissante sur $[e,+\infty]$. La suite $(\ln n/n)$ décroît à partir du rang 3 et converge vers 0. Il résulte du critère de Leibniz qu'elle converge.
2) Puisque la fonction f est décroissante et tend vers 0 à l'infini, la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n}f(t)$ et la série de terme général $f(n)$ sont de même nature, donc divergentes. De plus, d'après le cours, on a

$$S_n=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\ell+\underset{n\to+\infty}{o}(1)=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^n=\frac{(\ln n)^2}{2}+\ell+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(\ln n)^2}{2}.$$

3) On a

$$\begin{aligned}S_{2n}-S_n&=\left(\frac{(\ln 2n)^2}{2}+\ell+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)-\left(\frac{(\ln n)^2}{2}+\ell+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\\&=\ln 2\cdot\ln n+\frac{(\ln 2)^2}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

4) On a

$$S_{2n}+T_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(1+(-1)^k)u_k=2\sum_{p=1}^{n}u_{2p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2}{p}.$$

On obtient donc $S_{2n}+T_{2n}=S_n+\ln 2\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

5) Si γ est la constante d'Euler, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=\ln n+\gamma+o(1)$, et donc

$$T_{2n}=S_n-S_{2n}+(\ln n+\gamma)\ln 2+o(1)=-\frac{(\ln 2)^2}{2}+\gamma\ln 2+o(1),$$

et, puisque la suite (T_n) converge, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}T_{2n}=\boxed{-\frac{(\ln 2)^2}{2}+\gamma\ln 2}$

Ex 15 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$ de limite 0. Pour $n\geqslant 1$, on pose $v_n=n^2u_{n^2}$. Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Sol. 15): Testons tout d'abord avec des séries de Riemann. Si $u_n=1/n^\alpha$, on a $v_n=1/n^{2(\alpha-1)}$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha>1$, alors que la série de terme général v_n converge si et seulement si $2(\alpha-1)>1$, c'est-à-dire $\alpha>3/2$. Les deux séries ne sont pas toujours de même nature. Mais on constate que si la série de terme général u_n diverge, il en est de même de la série de terme général v_n. En fait ce résultat est général. En voici la démonstration.
Tout d'abord, comme la suite (u_n) est décroissante, on peut minorer par u_{n^2} les termes u_p lorsque $n^2+1\leqslant p\leqslant(n+1)^2$ et l'on obtient

$$\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2}u_p\leqslant u_{n^2}\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2}1=(2n+1)u_{n^2}\,,$$

Mais n^2-2n-1 est positif dès que $n \geqslant 3$, donc, dans ces conditions on obtient l'inégalité $\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} u_p \leqslant n^2 u_{n^2}$. Alors $\sum_{n=3}^{N}\left(\sum_{p=n^2+1}^{(n+1)^2} u_p\right) \leqslant \sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2}$, c'est-à-dire $\sum_{n=10}^{(N+1)^2} u_n \leqslant \sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2}$. Si la série de terme général u_n diverge, la suite $\left(\sum_{n=10}^{(N+1)^2} u_n\right)$ admet $+\infty$ comme limite. Il en résulte que la suite $\left(\sum_{n=3}^{N} n^2 u_{n^2}\right)$ admet également $+\infty$ comme limite et donc que la série de terme général (v_n) diverge.

Ex 16 Etudier si la série de terme général $u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$ converge.

Sol. 16): Puisque la suite $((-1)^n/\sqrt{n})$ converge vers 0, on peut utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. On a donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
La série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après le critère de Leibniz. D'autre part $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et la série de terme général $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge par comparaison à la série harmonique. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge, et ceci bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n/\sqrt{n}$.
On a donc l'exemple de deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui ne sont pas de même nature.

Ex 17

On veut étudier la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$, où $a > 0$.

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n = (-1)^n/n^a$, et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge absolument.

2) En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ trouver un équivalent de $u_n - v_n$ et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge.

Sol. 17): 1) La suite $((-1)^n/n^a)$ converge vers 0. On peut donc utiliser le fait que, en 0, $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$, et l'on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^a}$, donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^a}$.
On trouve une série de Riemann qui converge si et seulement si $a > 1$. Donc la série de terme général u_n converge absolument si et seulement si $a > 1$.
2) En utilisant le développement limité en 0 : $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$, on obtient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} - \dfrac{1}{2n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right)$. On a donc $u_n = v_n + w_n$, où $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ et $w_n = -\dfrac{1}{n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{2n^{2a}}\right)$. La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz, puisque la suite $(1/n^a)_{n\geqslant1}$ est décroissante et converge vers 0.
Pour la série de terme général $w_n = u_n - v_n$, on a $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{2a}}$. C'est donc une série de Riemann de signe constant qui converge si et seulement si $2a > 1$, soit $a > 1/2$.
Donc, si $1/2 < a \leqslant 1$, la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge donc. Par contre si $0 < a \leqslant 1/2$, la série de terme général u_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle diverge donc.
En résumé :
- si $a > 1$ la série converge absolument
- si $1/2 < a \leqslant 1$ la série est semi-convergente
- si $0 < a \leqslant 1/2$ la série diverge.

Ex 18 Mines 2011 Soit, pour $n \geqslant 2$: $u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(2 - 3^{1/k}\right)$.

1) Étudier la suite de terme général u_n.

2) Nature de la série de terme général u_n ?

Sol. 18):

1) On a $\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(2 - 3^{1/k})$

Or $\ln(2-3^{1/k}) = -\ln(3)/k + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(1/k^2)$.

Ainsi, avec le D.A. de la série harmonique, $\ln(u_n) = -\ln(3)\ln(n) + s_n$, où $(s_n)_n$ est une suite convergente.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^3}$ avec $K > 0$.

2) $\sum u_n$ converge.

Réf. RMS PC Mines 2011 exo 180

Ex 19 Mines 2011 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + {u_n}^2\right)$.

1) Déterminer le comportement de u_n quand $n \to +\infty$?

2) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3) Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Sol. 19):

1) Soit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + x^2\right)$. L'intervalle $[0,1]$ est stable et $f(x) \leqslant x$ donc le suite est décroissante, bornée et converge le seul point fixe 0.

2) On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$ donc par d'Alembert, la série converge.

3) $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(1+u_n) - \ln(2)$. Par comparaison, la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge, donc $\ln(u_n) = s_n - n\ln(2)$, où $(s_n)_n$ est une suite convergente.

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{K}}{2^n}$ avec $\mathrm{K} > 0$.

Réf. RMS PC Mines 2011 exo 183

Ex 20 X 2014 Trouver un équivalent de $u_n = 1! + 2! + \cdots + n!$.

Sol. 20): Il suffit de majorer (grossièrement) u_{n-2} par $(n-1)(n-2)!$. Alors

$$\begin{aligned} n! \leqslant u_n &\leqslant u_{n-2} + (n-1)! + n! = (n-1)(n-2)! + (n-1)! + n! \\ &= 2(n-1)! + n! = n!\left(1 + \frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

L'équivalent est donc $n!$.
Réf. RMS PC 2014 X exo 83

Ex 21 Mines 2012 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f'(x)/f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Sol. 21): • Supposons $\ell \neq 0$.
$(\ln(f))'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$ donc $\ln f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell \cdot x$.
Si $\ell > 0$ alors $f(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc divergence grossière.
Si $\ell < 0$, fixons un $\ell' \in]\ell, 0[$.
Il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que pour $x \geqslant x_0$, $\frac{\ln f(x)}{x} \leqslant \ell'$ donc $f'(x) \leqslant e^{\ell' x}$.
Il vient pour n assez grand, $0 \leqslant f(n) \leqslant q^n$ avec $q = e^{\ell'} < 1$ donc la série converge.
• Examinons le cas $\ell = 0$.
Tout peut se passer.
Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, on a bien $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et la série diverge.
$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, on a bien $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et la série converge.
Solution nř2 pour $\ell < 0$.
Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A > 0 tel que pour tout réel $x \geqslant$ A,

$$\ell - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant \ell + \varepsilon$$

d'où, si n est un entier supérieur à A,

$$\ell - \varepsilon \leqslant \int_n^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \ell + \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Conclusion $\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ donc $\frac{f(n+1)}{f(n)} \underset{x\to+\infty}{\to} e^{\ell} < 1$ et la règle de d'Alembert permet de conclure que la série de terme général $f(n)$ converge.
Réf. RMS12 Mines exo 190

Ex 22 X 2014

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels > 0. On suppose que $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \ell$.

1) Montrer que si $\ell > 1$ alors la série de terme général a_n converge.

2) Montrer que si $\ell < 1$ alors la série de terme général a_n diverge.

Sol. 22): Si $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - \ell = \varepsilon_n$ tend vers 0, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \ell/n + \varepsilon_n/n} = 1 - \frac{\ell}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
À partir de là, c'est vu en cours (Raabe-Duhamel)
Réf. RMS PC 2014 X exo 94

Exercices d'approfondissement

Ex 23 ✍

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n.n!}$.

2) Étudier la convergence de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in}$ de terme général $u_n = \sin(n!\pi e)$

Sol. 23): a) On sait que $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Or on a

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} + \ldots$$
$$\leqslant \frac{1}{n+3} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)!} \leqslant \frac{1}{n+3} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2}{n+3} \leqslant \frac{2}{n}$$

(avec un effet dominos).
D'où on déduit

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(1 + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right)\right]$$
$$\leqslant \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(1+\frac{2}{n}\right)\right] = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)n}\right] = \frac{1}{n.n!}$$

b) On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \leqslant e \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} + \frac{1}{n} \leqslant (n-1)!e \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{k!} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

et donc $(n-1)!e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} + \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} = (n-1)! + \cdots + (n-2)(n-1) + (n-1) + 1$ est un entier K_n de même parité que n , on en déduit :

$$u_{n-1} = \sin((n-1)!\pi e) = \sin\left[\mathrm{K}_n\pi + \frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = (-1)^n \sin\left[\frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

On en déduit avec le développement limité de sinus en 0 : $u_{n-1} = \frac{(-1)^n \pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Cette série est donc la somme de deux séries convergentes : elle est convergente.

Ex 24 ✍ Déterminer la nature de la série $\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ suivant les valeurs de $\alpha > 0$.

Sol. 24): On fait un développement asyptotique en utilisant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On trouve après calcul, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{(-1)^3}{n^{3\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8}\frac{1}{n^{4\alpha}} + \underset{n\to+0}{o}\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{8n^{4\alpha}}}$.

Le début converge par CSSA donc $\sum_n u_n$ converge ssi $4\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{4}$.

Ex 25 ✍ Mines 2011 Soient, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x} \mathrm{d}x$.

1) Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

2) Quelle est la nature de ces séries ?

Sol. 25): 1) Restons simples ! Si $x \in [n, n+1]$,

$$\frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} = \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{n} + \frac{\sin(\ln(x))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x}$$
$$= \mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

Ensuite, $0 \leqslant \ln(x) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{x-n}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Comme $|\sin(u) - \sin(v)| \leqslant |u - v|$, $\mathrm{A} \leqslant 1/n^2$.
Pour l'autre terme, on majore la valeur absolue du sinus par 1, et c'est facile.
2) Changement de variable $\ln(x) = u$. La somme partielle de la série des intégrales est, après le changement de variable indiqué, et à une constante additive près, $s_n = \cos(\ln n)$. Il faut montrer que la suite $\left(\cos(\ln n)\right)_n$ diverge.
Démonstration de $\left(\cos(\ln n)\right)_n$ diverge (par l'absurde).
démo n°1
Supposons que la suite converge vers ℓ.
$\cos\left(\ln\left(2^n\right)\right) = \cos(n \ln 2) \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.
Lemme $(\cos(n\theta))$ converge (vers a) ssi $\theta = 0\ [\pi]$.
(car $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$ donc si $a \neq 0$, $\cos\theta = 1$, gagné, si $a = 0$ alors
$\cos((n+1)\theta) - \cos((n-1)\theta) = -2\sin(n\theta)\sin(\theta)$ donc si $\sin\theta \neq 0$, $\sin n\theta \to 0$ absurde car $\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1 \to 0$).
Donc $\ln 2 = 0\ [\pi]$ or $\ln 2 \in]0, \pi[$, absurde.
démo n°2 pour réviser Tchebychev.
Supposons que la suite $\left(\cos(\ln n)\right)_n$ converge vers ℓ. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(\ln(n^k)) = \cos(k \ln n) = \mathrm{T}_k(\cos(\ln n))$ (où T_k est le k-ième polynôme de Tchebychev) converge aussi vers ℓ. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell = \mathrm{T}_k(\ell)$. En particulier, $\ell = \mathrm{T}_2(\ell) = 2\ell^2 - 1$. Mais aussi, $\ell = \mathrm{T}_3(\ell) = 4\ell^3 - 3\ell$. Ces deux équations ont comme unique racine commune $\ell = 1$. Par ailleurs, $\cos(\ln(2n)) = \cos(\ln 2 + \ln n)$ converge aussi vers $\ell = 1$. Or

$$\cos(\ln 2 + \ln n) = \cos(\ln 2)\cos(\ln n) - \sin(\ln 2)\sin(\ln n),$$

qui tend vers 1, alors que $\cos(\ln n)$ tend vers 1, et donc $\sin(\ln n)$ tend vers 0. En passant à la limite, cela entraînerait que $\ln 2 = 1$, ce qui est faux.
Réf. RMS PC Mines 2011 exo 182

Ex 26 ✍ Mines 2018 A. Bakkoury Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right).$$

Sol. 26):
On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (-t)^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.$
Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 - \mathrm{R}_n$ avec $\displaystyle\mathrm{R}_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.$
Remarquons que $\displaystyle|\mathrm{R}_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $(|\mathrm{R}_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Il vient

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \exp(\ln 2 - \mathrm{R}_n) = 2 \times \exp(-\mathrm{R}_n)$$
$$= 2\left(1 - \mathrm{R}_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\mathrm{R}_n^2\right)\right)$$

Donc

$$2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \mathrm{R}_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\mathrm{R}_n^2\right)$$
$$= (-1)^n |\mathrm{R}_n| + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n |\mathrm{R}_n|$ vérifie le CSSA et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente.
En conclusion, la série converge.

Ex 27 ☕ Mines 2014 Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute suite $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $|b_n|^2$ soit convergente, la série de terme général $a_n b_n$ est convergente. Montrer que la série de terme général $|a_n|^2$ est convergente.

Sol. 27): Supposons que $\displaystyle\sum_n |a_n|^2$ diverge. Nous allons construire une suite (b_n) de carré (de module) sommable, mais telle que la série $\displaystyle\sum a_n b_n$ diverge et même, à partir d'un certain rang, soit réelle positive tendant vers $+\infty$.
Premier cas. si $(a_n)_n$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(a_{\varphi(p)})_p$ telle que $\forall p \geqslant 1$, $|a_{\varphi(p)}| \geqslant \varepsilon$, où, rappelons-le, la suite $(\varphi(p))_p$ est strictement croissante.
Pour chaque $p \geqslant 1$, posons $\theta_p = \arg(a_{\varphi(p)})$, puis $b_{\varphi(p)} = \dfrac{e^{-i\theta_p}}{p}$, et si n n'est pas l'un des $\varphi(p)$, $b_n = 0$.

Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2=\sum_{p=1}^{\infty}|b_{\varphi(p)}|^2=\sum_{p=1}^{\infty}1/p^2<\infty.$$

Mais $b_{\varphi(p)}a_{\varphi(p)}$ est un réel $\geqslant\frac{\varepsilon}{p}$, terme général d'une série à termes positifs divergente.

Deuxième cas. a_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Soit N un indice tel que, pour tout $n\geqslant \mathrm{N}$, $|a_n|^2\leqslant 1$.
On construit une suite $(\varphi(p))_p$ est strictement croissante telle qu'en découpant la série $\sum_{n\geqslant \mathrm{N}}|a_n|^2$ en tranches, la p-ième allant de l'indice $\varphi(p-1)+1$ à l'indice $\varphi(p)$, on ait pour tout p, $1\leqslant\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)}|a_k|^2\leqslant 2$.

Pour tout k dans cette tranche, on pose $b_k=\frac{\overline{a_k}}{p}$. On voit que $\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)}|b_k|^2\leqslant\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)}\frac{|a_k|^2}{p^2}$ $\frac{2}{p^2}$, terme général d'une série convergente.

Or $\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)}a_kb_k=\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)}\frac{|a_k|^2}{p}$, terme général d'une série à termes positifs divergente.

Réf. RMS PC 2014 Mines exo 174

Ex 28 ✍ X 2015 RMS Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective. Nature de la série de terme général $f(n)/n^2$?

Sol. 28): Posons $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ avec $u_k=\frac{f(n)}{n^2}$.

On a $\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n\geqslant\frac{1}{4n^2}\sum_{k=n+1}^{2n}f(k)\geqslant\frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}k\geqslant\frac{1}{8}$ donc (S_n) ne converge pas.

Ex 29 ☕ X 2015 RMS Existe t-il $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général u_n converge et la série de terme général u_n^3 diverge ?

Sol. 29): Pas simple... Nécessairement la série n'est pas absolument convergente et ne suit pas le critère spécial des séries alternées...
On peut prendre les termes:
$1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{1/3}},\frac{1}{3^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{1/3}},\cdots,\frac{1}{n^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^{1/3}},-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^{1/3}},\cdots$
La somme vaut 0 mais quand on regarde u_n^3, on voit
$1,-\frac{1}{8},-\frac{1}{8},\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{3},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{n},-\frac{1}{8}\times\frac{1}{n},\cdots$
qui diverge assez clairement (série harmonique).
Tentative infructueuse, si on cherche dans cette direction
$u_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}+\frac{1}{n^{1/3}\ln n}$ Non ! car la série diverge...
On a $u_n^3=\frac{(-1)}{n}+\frac{3}{n\ln n}+\frac{3(-1)^n}{n(\ln n)^2}+\frac{1}{n(\ln n)^3}=$ tout converge sauf $\frac{3}{n\ln n}$, dommage...

Ex 30 ☕☕ Mines 2014 Soit $a\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer que la somme de la série $\sum a^{-n^2}$ est irrationnelle. *(On pourra traiter le cas $a=10$ puis le cas général.)*

Sol. 30): Un nombre rationnel a un développement décimal (ou autre) fini ou périodique.