Séries numériques

Exercices d'application

Ex 1 **d'Alembert ou pas d'Alembert ?**
Etudier la nature des séries suivantes:

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln n}{n^2}$

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}2^{-\ln(\ln n))}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-\sqrt{n}}$

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n^n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$ $\qquad$ (☕) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(\ln n)^n}{(n^2+1)a^n}, a>0$ $\qquad$ (☕) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1!+2!+...+n!}{(n+p)!}$

(☕) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^\alpha}$ $\qquad$ (☕) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]^{\sqrt{n}}$ $\qquad$ (☕) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

Ex 2 Montrer l'existence et calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{2^n}.$$

Ex 3 On se donne une série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ convergente.

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sqrt{a_na_{2n}}$; $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^2$; $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Ex 4 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et $u_0>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+\frac{a_n}{u_n}$$

Montrer l'équivalence : (u_n) converge $\Leftrightarrow\left(\sum a_n\right)$ converge.

Ex 5 Calculer les sommes, si elles existent, des séries:
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^n}$; $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{1^2+...+n^2}$.

Indication: $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right]$

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$

Indication: on pourra démontrer que $\displaystyle\mathrm{Arctan}\frac{1}{x^2+x+1}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{x}-\mathrm{Arctan}\frac{1}{x+1}$ pour $x>0$.

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}3^n\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$ Indication: on pourra exprimer $\sin(3\theta)$ comme polynôme en $\sin\theta$.

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^2+n+1}{n!}$ Indication: on pourra utiliser la base $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}(\mathrm{X}-1))$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Ex 6 ✍ Étudier la nature des séries suivantes:

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{\ln(n+a)}{\ln n}-1\right)^\alpha, a>0$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-(\mathrm{Arctan} n)^\alpha\right), (\alpha\neq 0)$

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ (utiliser : $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$)

Ex 7 Montrer que la série de terme général $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, $n\geqslant 1$, est convergente puis calculer sa somme.
Indication on pourra calculer $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$.

Ex 8 **Séries de Bertrand**
Etudier la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ en comparant à une série de Riemann lorsque $\alpha\neq 1$ et à une intégrale lorsque $\alpha=1$.
Application : étudier les séries de terme généraux $v_n=\dfrac{1}{\ln n!}$ puis $w_n=n^{\frac{\ln n}{n}}-1$.

Ex 9 **Un théorème sur les suites récurrentes: le théorème du point fixe**
Soit $k\in[0,1[$ et $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2\qquad|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|\text{ (application contractante)}$$

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au plus une solution.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{K}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
Vérifier que $|u_{n+1}-u_n|\leqslant k^n|u_1-u_0|$

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (étudier la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1}-u_n)$)

4) Déterminer sa limite.

Ex 10 X 2017 RMS Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ lorsque $n \to +\infty$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) Montrer que la série de terme général e^{-a_n} converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
b) Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

Exercices d'entraînement

Ex 11 ☕ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Convergence et somme de la série $\sum u_n$.

Ex 12 ☕

1) Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

2) À l'aide du produit de Cauchy, établir l'égalité

$$e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{n!}.$$

Ex 13 Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{j^n}{n}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$.
INDICATION: regrouper par paquets de 3 termes...

Ex 14 ☕ Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln n/n$ et $v_n = (-1)^n u_n$.

1) Préciser la nature des séries de termes généraux u_n et v_n.

On pose $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ et $T_n = \sum\limits_{p=1}^{n} v_p$.

2) Donner un équivalent de S_n à l'infini.

3) Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

4) Calculer $S_{2n} + T_{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) En déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Ex 15 ☕ Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$ de limite 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = n^2 u_{n^2}$. Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Ex 16 ☕ Etudier si la série de terme général $u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$ converge.

Ex 17 ☕

On veut étudier la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$, où $a > 0$.

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n = (-1)^n/n^a$, et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge absolument.

2) En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ trouver un équivalent de $u_n - v_n$ et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge.

Ex 18 MINES 2011 Soit, pour $n \geqslant 2$: $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{1/k}\right)$.

1) Étudier la suite de terme général u_n.

2) Nature de la série de terme général u_n ?

Ex 19 MINES 2011 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_n{}^2\right)$.

1) Déterminer le comportement de u_n quand $n \to +\infty$?

2) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3) Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Ex 20 X 2014 Trouver un équivalent de $u_n = 1! + 2! + \cdots + n!$.

Ex 21 Mines 2012 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f'(x)/f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Ex 22 X 2014

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels > 0. On suppose que $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \ell$.

1) Montrer que si $\ell > 1$ alors la série de terme général a_n converge.

2) Montrer que si $\ell < 1$ alors la série de terme général a_n diverge.

Exercices d'approfondissement

Ex 23 ✍

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n.n!}$.

2) Étudier la convergence de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in}$ de terme général $u_n = \sin(n!\pi e)$

Ex 24 ✍ Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ suivant les valeurs de $\alpha > 0$.

Ex 25 ✍ Mines 2011 Soient, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ et $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x} \mathrm{d}x$.

1) Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

2) Quelle est la nature de ces séries ?

Ex 26 ✍ Mines 2018 A. Bakkoury Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right).$$

Ex 27 ☕ Mines 2014 Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute suite $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $|b_n|^2$ soit convergente, la série de terme général $a_n b_n$ est convergente. Montrer que la série de terme général $|a_n|^2$ est convergente.

Ex 28 ✍ X 2015 RMS Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Nature de la série de terme général $f(n)/n^2$?

Ex 29 ☕ X 2015 RMS Existe t-il $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général u_n converge et la série de terme général u_n^3 diverge ?

Ex 30 ☕☕ Mines 2014 Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que la somme de la série $\sum a^{-n^2}$ est irrationnelle. *(On pourra traiter le cas $a = 10$ puis le cas général.)*

Les indications

Ind. 19: 3) On cherchera un développement asymptotique à deux termes de $\ln(u_n)$, en utilisant le résultat du 2).
Attention, un équivalent de $\ln(u_n)$ ne suffira pas !