Fonctions

Ex 1 Rolle généralisée et une application...
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f(a) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \exp\left(-t^2\right)$.
Montrer que la dérivée n-ième de f est de la forme $\mathrm{P}_n(t)\exp\left(-t^2\right)$ où P_n est un polynôme de degré n possédant n racines distinctes.

Sol. 1) : • Reprenons la **démonstration du théorème de Rolle** :
Si f est constante, le résultat est immédiat.
Sinon, on a vu que f est bornée, considérons $\sup_{[a,+\infty[} f$. Si $\sup_{[a,+\infty[} f = 0$, on considère $-f$ et on a $\sup_{[a,+\infty[} (-f) > 0$.
Quitte à échanger f par $-f$, on peut supposer que $\sup_{[a,+\infty[} f > 0$.
Il existe $\mathrm{A} > a$ tel que $\forall t \in [\mathrm{A}, +\infty[,\ f(t) < \dfrac{\sup_{[a,+\infty[} f}{2}$ grâce à la définition de la limite.
Ainsi, $\sup_{[a,+\infty[} f = \sup_{[a,\mathrm{A}]} f = \max_{[a,\mathrm{A}]} f > 0$. Il existe donc $c \in [a, \mathrm{A}]$ tel que $f(c) = \max_{[a,\mathrm{A}]} f$ mais comme $f(a) = 0$, $c \in]a, +\infty[$.
$f(c)$ est un extremum local donc $f'(c) = 0$. (le sup est un max atteint à l'interieur de l'intervalle).
• **Preuve expéditive de XiangDong**
Supposons que f' ne s'annule pas alors puisque f' est continue, f' garde un signe constant (strict) par le théorème de valeurs intermédiaires donc f est strictement monotone ce qui est absurde au vu des hypothèses.
Remarque sur la remaque On pourrait objecter à XiangDong que sa démonstration ne fonctionne pas si f est seulement supposée dérivable et non pas $\mathscr{C}^1$ mais en fait un théorème dû à Darboux (HP) nous dit que le théorème des valeurs intermédiaires est valable pour une fonction dérivée même si elle n'est pas continue...
• Pour l'application, on montre par récurrence que $f^{(n)}(t) = \mathrm{P}_n(t)\exp\left(-t^2\right)$ avec comme relation de récurrence :
$\mathrm{P}_0 = 1$. $f^{(n+1)}(t) = (\mathrm{P}_n'(t) - 2t\mathrm{P}_n(t))\exp\left(-t^2\right)$ donc $\mathrm{P}_{n+1} = -2\mathrm{X}\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n'$.
On montre alors par récurrence que $\deg \mathrm{P}_n = n$.
Enfin, on montre par récurrence que P_n possède n racines distinctes :
pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est bon.
Puis, si P_n possède n racines distinctes alors $f^{(n)}$ aussi, de plus $\lim_{t \to +\infty} f^{(n)}(t) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} f^{(n)}(t) = 0$ donc en utilisant Rolle ou Rolle généralisé en $-\infty$ et en $+\infty$, on construit $n+1 (= n-1+2)$ racines distinctes de $f^{(n+1)}$ qui sont également racines de P_{n+1} (car $\exp > 0$) et pour des raisons de degré, il n'y a pas d'autres racines.

Ex 2 **Très utile.**
Soit f une fonction réelle n fois dérivable sur I (intervalle) s'annulant en $n+1$ points distincts de I.
Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en un point de I.
Application : soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que l'équation $\mathrm{P}(x) - \sin x = 0$ ne possède qu'un nombre fini de racines réelles deux à deux distinctes sur un segment $[a, b]$.

Sol. 2) : Rolle successif.
sinon, on aurait $\sin x = 0$ ou $\cos x = 0$ qui aurait une infinité de racines sur $[a, b]$.

Ex 3 Soit le polynôme P_n défini par pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$P_n(t) = \left[(1-t^2)^n\right]^{(n)}$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1,1]$.

Sol. 3) : $Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n.
-1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1. $Q(-1) = 0 = Q(+1)$
donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1,1[$ telle que $Q_n'(c) = 0$.
Donc $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q_n'', auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$.
On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$.
Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$.
Par construction, ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Ex 4 Soit $a > 0$ et $b > 0$. Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \mathrm{d}t$.

Sol. 4) : On a $\dfrac{\sin x}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n})$
Prenons d'abord $x > 0$
De plus $\displaystyle\int_{ax}^{bx} o(t^{2n})\mathrm{d}t \underset{\text{réécrire les définitions}}{=} o\left(\int_{ax}^{bx} t^{2n}\mathrm{d}t\right) = o\left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{ax}^{bx}\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
Donc $\boxed{\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t = \ln(\frac{b}{a}) - \frac{1}{2\times 3!}(b^2-a^2)x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n\times(2n+1)!}(b^{2n}-a^{2n})x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$
si $x < 0$, idem

Ex 5 X 2015 RMS

1) Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2) Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)\,f(y)$.

Sol. 5) :

1) Ultra-classique. On commence par montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$.
Puis on conclut par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$ donc $f \geqslant 0$.
S'il existe x tel que $f(x) = 0$ alors $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \sqrt[2^n]{f(x)} = 0$ donc par continuité $f(0) = 0$ puis $f = 0$.
Outre la fonction nulle, les autres vérifient $f > 0$, on pose $g = \ln f$ et on se ramène à la question précédente.

Ex 6 X 2017 RMS Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $p,q \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $p\,f(a) + q\,f(b) = (p+q)f(c)$.

Sol. 6) : $\ell = \dfrac{p\,f(a) + q\,f(b)}{p+q} \in [f(a), f(b)]$ et on utilise le théorème des valeurs intermédiaires.

Ex 7 X 2016 RMS Soit $f : x \in [e, +\infty[\longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$. Montrer que f induit une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ quand $x \to +\infty$.

Sol. 7) : On a $f'(x) > 0$ sur $]e, +\infty[$ donc on a un homéomorphisme de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[= f([e, +\infty[)$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
Intuitivement, on peut penser que $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \ln x$.
Ce n'est pas très difficile à montrer puisque $\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln\left(f^{-1}(x)\right)} = x$ donc $f^{-1}(x) = x \cdot \ln\left(f^{-1}(x)\right)$.
Donc $\ln\left(f^{-1}(x)\right) = \ln x + \ln\left(\ln\left(f^{-1}(x)\right)\right)$. Or $\ln\left(\ln\left(f^{-1}(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\ln\left(f^{-1}(x)\right)\right)$ car $\dfrac{\ln X}{X} \underset{X\to+\infty}{\sim} 0$.
Donc $\ln\left(f^{-1}(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ donc, puisque $f^{-1}(x) = x \cdot \ln\left(f^{-1}(x)\right)$, $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \cdot \ln x}$

Ex 8 X 2014 Soient f et g dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ g = \mathrm{id}$. Montrer que f et g sont bijectives.

Sol. 8) : On vérifie que g injective, et donc est un homéomorphisme strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Supposons g croissante, et l'autre cas se traite de même. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = a < +\infty$, comme g est un homéomorphisme croissant, $\lim\limits_{\substack{y\to a \\ y<a}} f(y) = +\infty$, ce qui contredit la continuité de f en a.

Réf. RMS PC 2014 X exo 99

Ex 9 ✍ X 2014 Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x$.

Sol. 9) : $f(x) - f(x/2) = x/2, \ldots, f(x/2^{n-1}) - f(x/2^n) = x/2^n$. On additionne, et il y a du télescopage :

$$f(x) - f(x/2^n) = x(1 - 1/2^n).$$

Comme f est continue, $f(x) = f(0) + x$.
Réf. RMS PC 2014 X exo 98

Ex 10 ✍ X 2017 RMS Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Sol. 10) : On pose $\varphi(x) = (f'(x) - f(x)) \cdot e^x$.
On a $\varphi'(x) = (f''(x) - f(x)) \cdot e^x$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne $f''(c) = f(c)$.

Ex 11 ✍ X 2015 RMS Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. On suppose que f est bornée et qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $f \leqslant k\,f''$. Montrer que f est monotone et que f' possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Sol. 11) : Si $k = 0$, comme $f \geqslant 0$, f est constante égale à 0.
Si $k > 0$, $f''(x) \geqslant \dfrac{f(x)}{k}$ pour tout $x \geqslant 0$. Donc f' est croissante, et f' admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\ell > 0$ (y compris $+\infty$), soit $\alpha \in]0, \ell[$. Il existe x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, $f'(x) \geqslant \alpha$, et $f(x) \geqslant f(x_0) + \alpha(x - x_0)$. Donc f tend vers $+\infty$.
Si $\ell < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leqslant \ell$ et $f(x) \leqslant f(0) + \ell x$ qui tend vers $-\infty$.
Donc $\ell = 0$, et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leqslant \ell$, f' est négative (au sens large) et f est décroissante.
On notera que nous avons établi la monotonie tout à la fin de la preuve.

Ex 12 ☕ X 2015 Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{3})$.

Sol. 12) : Indication Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est une partie contenant 0, stable par addition et contenant avec un élément a son opposé $-a$. Le groupe G des périodes de f est l'ensemble des p tels que, pour tout x, $f(x) = f(x+p)$. Montrer qu'il est fermé. Dans notre cas, il contient 1 et $\sqrt{3}$. Montrer qu'il est partout dense.
G est intersection des fermés $G_x = \{p \ / \ f(x) = f(x+p)$ et donc fermé. Il n'est pas discret car $(\sqrt{3}-1)^n$ est dans G et tend vers 0 si $n \to \infty$. **Réf.** RMS10 X exo 101

Ex 13 ☕ X 2014 Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ f(x) = x$.

Sol. 13) : Si $f \circ g$ est injective, g est injective. Si $f \circ g$ est surjective, f est surjective.
Donc, dans notre exercice, $f = g$ et f est bijective.
En particulier strictement monotone, car continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
• Montrons que si f est strictement croissante, c'est l'identité.
En effet, s'il existe a tel que $f(a) > a$, alors d'une part $f(f(a)) = a > f(a)$, absurde.
De même s'il existe a tel que $f(a) < a$, donc $f = \mathrm{id}$.
• À quoi ressemble f si f est strictement décroissante ?
Analyse
Comme elle est surjective, elle varie en décroissant de $+\infty$ à $-\infty$.
En appliquant le T.V.I. à $f(x) - x$, on voit tout de suite qu'il existe a tel que $f(a) = a$.
Comme f est strictement décroissante, pour tout $x > a$, $f(x) < a < x$ de sorte que f induit une bijection φ strictement décroissante de $[a,+\infty[$ sur $]-\infty,a]$.
Mais la relation $f \circ f = \mathrm{id}$, entraîne que si $x \leqslant a$, $f(f(x)) = f(\varphi(x)) = x$ donc $f(x) = \varphi^{-1}(x)$.
Synthèse
Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ une bijection continue strictement décroissante de $[a,+\infty[$ sur $]-\infty,a]$ (et donc $\varphi(a) = a$).
On définit f par $\begin{cases} f(x) = \varphi(x) & \text{si } x \geqslant a \\ f(x) = \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \leqslant a \end{cases}$.
On peut tracer le graphe de φ puis symétriser par rapport à la première bissectrice (au niveau du point fixe) pour voir le graphe de f.
Réf. RMS PC 2014 X exo 97

Ex 14 ☕ X 2015 RMS Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = 1 + f(x)$.

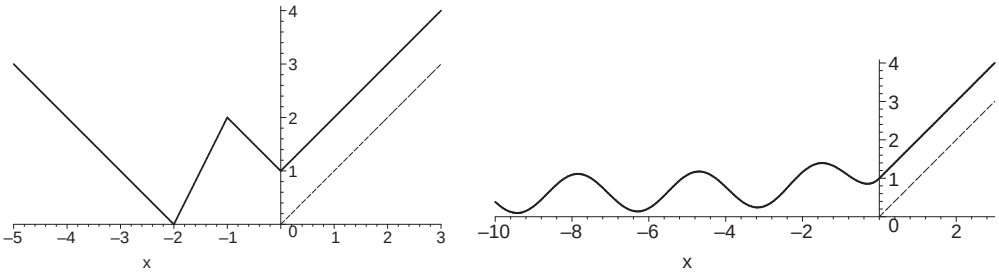
Sol. 14) : Il est naturel de commencer par se poser la question plus simple suivante (qui est un exercice classique d'oral de concours) : quelles sont les f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, $\forall x$, $f \circ f(x) = f(x)$?
Esquissons la réponse. Pour cela, pour une telle f, on montre que l'ensemble $\mathrm{I} = f(\mathbb{R})$ est un intervalle tel que $f(x) = x$ pour $x \in \mathrm{I}$, et l'on remarque alors que n'importe quelle fonction qui vaut l'identité sur I, est continue, et envoie le reste de $\mathbb{R}$ dans I répond à la question. On aura intérêt à faire un dessin.
Revenons maintenant à l'exercice (et détaillons la solution). L'idée est très proche.
Soit $\mathrm{A} = f(\mathbb{R})$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, A est un intervalle. Pour tout $x \in \mathrm{A}$, $f(x) = x + 1 \in \mathrm{A}$. En particulier A n'est pas borné supérieurement. Donc A est soit $\mathbb{R}$ tout entier (et $f(x) = x + 1$ pour tout x), soit de la forme $]a,+\infty[$ ou $[a,+\infty[$.
Laissons tomber le cas $\mathrm{A} = \mathbb{R}$ déjà vu. Dans les deux autres cas, pour tout $x > a$, $f(x) = x + 1$. Par continuité, $f(a) = a + 1$. Mais *cela n'entraîne pas nécessairement* que $a \in \mathrm{A}$, comme nous allons le voir.
Le cas le plus simple est celui où $\mathrm{A} = [a,+\infty[$. Si A est de la forme $[a,+\infty[$, nécessairement :

$$\begin{cases} f \text{ est continue ;} \\ \forall x \geqslant a,\ f(x) = x + 1 \ ; \\ \forall x \leqslant a,\ f(x) \geqslant a \ ; \\ \exists \alpha < a \text{ tel que } \ f(\alpha) = a. \end{cases} \tag{1}$$

La dernière condition est indispensable si A est l'intervalle fermé en a. Mais on voit immédiatement que n'importe quelle fonction vérifiant les conditions (1) répond à la question. Pour les construire explicitement,

on peut dire ceci. On choisit un réel quelconque $\alpha < a$ (strictement). Sur $]-\infty, a]$, f (continue) prend n'importe quelle valeur supérieure ou égale à a, pourvu que $f(\alpha) = a$. Sur $[\alpha, a]$, f (continue) prend n'importe quelle valeur supérieure ou égale à a, pourvu que $f(\alpha) = a$ et $f(a) = a + 1$. Sur $[a, +\infty[$, $f(x) = x + 1$.
Voyons maintenant le cas $\mathrm{A} =]a, +\infty[$. Il est clair que f vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} f \text{ est continue ;} \\ \forall x \geqslant a,\ f(x) = x + 1 \text{ ;} \\ \forall x \leqslant a,\ f(x) > a \text{ ;} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \text{ il existe } x < a \ \text{ tel que } f(x) < a + \varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Comme l'image d'un compact est compacte, on voit qu'il existe alors une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers $-\infty$ telle que la suite $f(\alpha_n)$ soit strictement décroissante et tend vers a. Cela nous indique comment construire les fonctions f répondant à la question. On choisit une suite $(\alpha_n)_n$ strictement décroissante tendant vers $-\infty$ telle que $\alpha_0 < a$, et une suite $(y_n)_n$ quelconque de réels *strictement* supérieurs à a et tendant vers a. On définit alors f continue par intervalles. Sur $[\alpha_{n+1}, \alpha_n]$, f prend n'importe quelle valeur *strictement* supérieure à a pourvu que $f(\alpha_n) = y_n$, et $f(\alpha_{n+1}) = y_{n+1}$. Sur $[\alpha_0, a]$, f prend n'importe quelle valeur strictement supérieure à a pourvu que $f(\alpha_0) = y_0$ et que $f(a) = a + 1$. Sur $[a, +\infty[$, $f(x) = x + 1$.
La figure (**??**) montre un exemple de chacun des deux cas. À gauche, $\mathrm{A} = [0, +\infty[$ (fermé). La fonction de droite (pour laquelle $\mathrm{A} =]0, +\infty[$) est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \sin^2 x & \text{si } \ x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } \ x \geqslant 0 \end{cases} .$$