Fonctions

Ex 1 Rolle généralisée et une application...
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f(a) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \exp\left(-t^2\right)$.
Montrer que la dérivée n-ième de f est de la forme $\mathrm{P}_n(t)\exp\left(-t^2\right)$ où P_n est un polynôme de degré n possédant n racines distinctes.

Ex 2 **Très utile.**
Soit f une fonction réelle n fois dérivable sur I (intervalle) s'annulant en $n+1$ points distincts de I.
Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en un point de I.
Application : soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que l'équation $\mathrm{P}(x) - \sin x = 0$ ne possède qu'un nombre fini de racines réelles deux à deux distinctes sur un segment $[a,b]$.

Ex 3 Soit le polynôme P_n défini par pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1,1]$.

Ex 4 Soit $a > 0$ et $b > 0$. Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Ex 5 X 2015 rms

1) Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2) Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\,f(y)$.

Ex 6 X 2017 rms Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $p\,f(a) + q\,f(b) = (p+q)f(c)$.

Ex 7 X 2016 rms Soit $f : x \in [e,+\infty[\longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$. Montrer que f induit une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$.
Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ quand $x \to +\infty$.

Ex 8 X 2014 Soient f et g dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ g = \mathrm{id}$. Montrer que f et g sont bijectives.

Ex 9 ✍ X 2014 Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x$.

Ex 10 ✍ X 2017 rms Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Ex 11 ✍ X 2015 rms Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$. On suppose que f est bornée et qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $f \leqslant k\,f''$. Montrer que f est monotone et que f' possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Ex 12 ☕ X 2015 Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{3})$.

Ex 13 ☕ X 2014 Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ f(x) = x$.

Ex 14 ☕ X 2015 rms Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = 1 + f(x)$.