Suites numériques

Exercices d'application

Ex 1 Que pensez-vous de l'énoncé suivant : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$? Donner un énoncé correct.

Sol. 1) : ssi $u_n - v_n \to 0$

Ex 2 Donner un équivalent simple des suites :
$u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; $u_n = e^{1/n} - e^{\sin(1/n)}$; $u_n = 3^n - 2^n$
$u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n - e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Sol. 2) : $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ avec $x = \dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{O}}(x^6)$, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}}$
$e^{1/n} - e^{\sin(1/n)} = e^{1/n}\left(1 - e^{\sin(1/n)-1/n}\right)$ or $e^{\sin(1/n)-1/n} = 1 - 1/6x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)$ donc
$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}}$
$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n}$

$$\begin{aligned}u_n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= e^2(1-\frac{2}{n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})) - e^2\left(1-\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n}e^2}\end{aligned}$$

Exercices d'entraînement

Ex 3 Soit $x\in\mathbb{R}$. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ de terme général

$$u_n = \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}.$$

Sol. 3) : On a

$$kx - 1 < \lfloor kx\rfloor \leqslant kx$$

donc

$$\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{2n}x$$

Par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{x}{2}$.

Ex 4 Étudier la monotonie, la convergence, la limite et donner un équivalent simple de

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Indication pour l'equivalent : effectuer une intégration par partie sur $(n+1)\mathrm{I}_n$.

Sol. 4) : $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant0}$ est clairement décroissante, minorée par 0 donc converge.
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

$$\begin{aligned}(n+1)\mathrm{I}_n &= \int_0^1 (n+1)x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &\underset{\mathrm{IPP}}{=} \sqrt{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{2}\end{aligned}$$

avec la même preuve que précédemment.
Conclusion $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
Remarque. Le changement de variable $u = x^n$ donne des résultats intéressants si on sait échanger limite et intégrale, ce qui n'est pas la cas d'un 3/2 en début d'année...

Ex 5 Étudier la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

Sol. 5) : On pose $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
f admet un seul point fixe 0.
On montre par simple calcul que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant x$ donc (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge, vers le seul point fixe 0.

Ex 6 Pour $a > 0$, montrer que la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{a}$. Montrer ensuite que la convergence est quadratique, c'est à dire qu'il existe une constante M et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \mathrm{M}|u_n - \sqrt{a}|^2$$

Sol. 6) : On étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
Elle admet un seul point fixe en $\sqrt{a}$.
f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}]$ puis croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.
On a $\forall x > 0,\ f(x) \geqslant \sqrt{a}$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
(autrement dit l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f).
On montre sans difficulté que pour tout $x \geqslant \sqrt{a}$, $f(x) \leqslant x$
(on est en-dessous de la première bissectrice)
Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers un point fixe $\geqslant \sqrt{a}$.
Comme il n'y a que $\sqrt{a}$, c'est la limite de la suite.
On écrit ensuite $(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n}$.
Or pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2u_n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \mathrm{M}$.
Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \mathrm{M}|u_n - \sqrt{a}|^2$.

Ex 7 ✍

1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une racine dans $[0, 1]$ notée x_n, et une autre dans $[1, +\infty[$ notée y_n.
2) Donner un équivalent de x_n.
3) Déterminer la limite ℓ de la suite $(y_n)_n$ ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

Sol. 7) :

1) On pose $\varphi_n(x) = x^n - nx + 1$. $\varphi_n'(x) = n\left(x^{n-1} - 1\right) \leqslant 0$ en ne s'annulant qu'en 1 (pour $x \in [0, 1]$).
φ_n est continue, strictement décroissante sur $[0, 1]$. $\varphi_n(0) = 1 > 0$ et $\varphi_n(1) = 2 - n < 0$ pour $n \geqslant 3$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[2 - n, 1] \ni 0$.
On raisonne de même sur $[1, +\infty[$.
2) $0 \leqslant x_n = \dfrac{1}{n}\left(x_n^n + 1\right) \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc $x_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
A partir d'un certain rang $x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $nx_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ d'où $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3) φ_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on est tenté de montrer que (y_n) est décroissante mais ici c'est difficile !
Contournons le problème de la monotonie (on nous demande seulement de montrer que la suite converge).
Pour n assez grand, $\varphi_n(2) = 2^n - 2n + 1 > 0$ donc $y_n \leqslant 2$ (pour n assez grand).
Ainsi, $y_n^n \leqslant 2n - 1 \leqslant 2n$ donc $1 \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1 = \ell$.
Remarque un preuve plus matheuse est :
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\varphi_n(1+\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\varphi_n(1+\varepsilon) > 0$ donc $(1 \leqslant) y_n \leqslant 1 + \varepsilon$, ce qui est précisément la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$.
Examinons l'équivalent. Posons $y_n = 1 + u_n$.
$(1 + u_n)^n = ny_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\exp\left[n\left(\ln(1 + u_n)\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\ln n)$
Il vient par quotient $n\left(\ln(1 + u_n)\right) - \ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
donc a fortiori c'est un $\underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$, ainsi $n\left(\ln(1 + u_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, il vient $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}}$ puisque $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Remarque. Pour montrer que la suite (y_n) est décroissante au moins à partir d'un certain rang, on a besoin de montrer que

$$\varphi_{n+1}(y_n) > 0 \text{ à partir d'un certain rang}$$

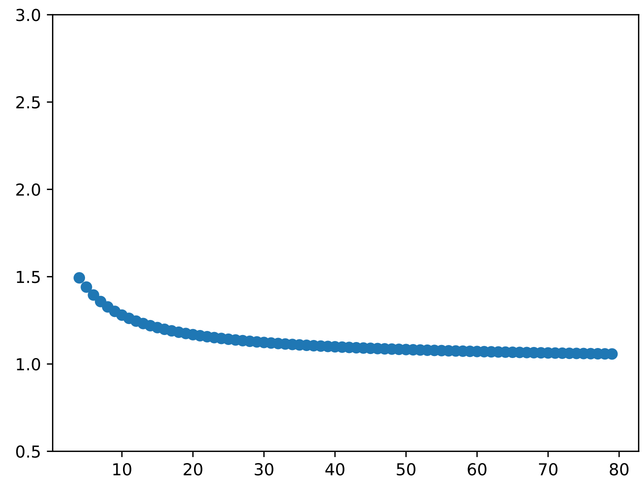
Or, par calcul, $\varphi_{n+1}(y_n) = ny_n^2 - (n+2)y_n + 1$. Posons $g_n(x) = nx^2 - (n+2)x + 1$.
Le lecteur vérifiera que $g_n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1$ (ce qui nous intéresse est que $g_n(\alpha_n) > 0$ pour n assez grand) et que g_n est croissante sur $\left[1 + \dfrac{2}{n}, +\infty\right[$.

Sachant maintenant que $y_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, on sait que pour n assez grand, $y_n \geqslant 1 + \dfrac{2}{n}$,

donc $\varphi_{n+1}(y_n) = g_n(y_n) \geqslant g_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1 > 0$ donc $y_n > y_{n+1}$ (pour n assez grand).

Python nous confirme que la suite (y_n) est décroissante et apparemment dès le début ($n \geqslant 3$).

```
import numpy as np
import scipy.optimize as resol
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt


def f(n,x):
    return x**n-n*x+1

def U(n):
    # on peut aussi définir la fonction f ici avec n var. semi-globale
    return resol.fsolve(lambda x: f(n,x), 20)

N = 80
X = np.arange(4, N)
Y = [U(k) for k in range(4, N)]  # pour l'équivalent
# Y = [U(k) for k in range(1, N)]

plt.plot(X, Y, 'o')
plt.ylim([.5, 3])
plt.show()

def sgn(n):
    if n >= 0:
        return '+'
    else:
        return '-'

print([sgn((U(k+1)-U(k))[0]) for k in range(3,N-1)])
```



Ex 8 X 2011 Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}.$$

Sol. 8) : $\sqrt{1+n^2} = n\left(1 + \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

donc $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n\pi}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$\ln u_n = \dfrac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{\pi n} = 2$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2/\pi}.}$

Réf. RMS X PC 2011, exo 70

Ex 9 X 2017 RMS Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $\cos(nx) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Sol. 9) : Donc $\sin^2(nx) \to 0$ donc $\sin(nx) \to 0$. Ainsi $\left(e^{ix}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc $e^{ix} = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{\left(e^{ix}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ (suite décalée) donc $e^{ix} = 1$.
Remarque si on considère $2\pi\mathbb{Z}+x\mathbb{Z}$ qui un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $2\pi\mathbb{Z}+x\mathbb{Z}$ est soit dense soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$ (classique mais subtil) mais $2\pi\mathbb{Z}+x\mathbb{Z} \neq 2\pi\mathbb{Z}$
On distingue alors les deux cas... On va alors plus loin dans l'étude de la suite...

Ex 10 X 2016 RMS Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $b_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1$.
Trouver un équivalent de b_n.

Sol. 10) : Par récurrence, on prouve que si $n \in [\![2^p, 2^{p+1}[\![$, alors $b_n = p+2$. Or $p = \log_2(2^p) \leqslant \log_2(n) < p+1 = \log_2(2^{p+1})$. Donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \log_2(n)$.

Exercices d'approfondissement

Ex 11 X 2015 RMS Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
a) Déterminer un équivalent de u_n.
b) Déterminer la nature, suivant $\alpha > 0$, de la série de terme général u_n^α.

Sol. 11) :

1) Posons $f(x) = xe^{-x}$. On a $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.

On a $f(x) \leqslant x$, maximum en 1 où $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, converge vers le seul point fixe 0.

$u_{n+1} = u_n\left(1 - u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right)$. En regardant $y' = -y$ ou bien avec $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$, on voit que $\gamma = -1$ donne un bon résultat.

On a $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ donc par Cesaro, $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2) Trivial ?

Ex 12 ENS 2017 RMS Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}$.
a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
c) Déterminer un équivalent de u_n.

Sol. 12) :

1) (u_n) est décroissante, positive, converge vers ℓ vérifiant $\ell = \dfrac{\ell}{2+\ell}$ donc $\ell^2 + \ell = 0$ donc $\ell = 0$ car $\ell \geqslant 0$.

2) $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{u_0}{2^n}$ donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3) On constate par une simple récurrence que $u_n = \dfrac{u_0}{2^n + (2^n-1)\,u_0}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_0}{1+u_0} \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

Dans le cas où on ne voit pas cette expression on peut toujours faire appel à l'artillerie théorique mais on n'aura pas la constante.
Posons $v_n = 2^n u_n$. (v_n) est bornée..

Étudions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) &= \ln\left(\frac{2u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{2+u_n}\right)\\ &= \ln\left(1 - \frac{u_n}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{2} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Donc la série converge donc $(\ln v_n)$ converge vers α donc (v_n) converge vers $\mathrm{K} = e^\alpha > 0$.

Conclusion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{K}}{2^n}$.

Ex 13 X 2017 RMS Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in]-1,1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$.
a) Montrer que (x_n) converge. On note ℓ sa limite.
b) Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Sol. 13) : a) Si $x \in]-1,1[$, $x < \dfrac{1+x}{2} < 1$. De plus, $\dfrac{1+x}{2} > 0$, de sorte que $\dfrac{1+x}{2} < \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$. Donc la suite $(x_n)_n$ est croissante majorée et converge vers une limite dans $]0,1]$.
Par continuité, ce ne peut être que $\ell = 1$.

b) Le changement de variable $y_n = 1 - x_n$ transforme la relation de récurrence en

$$y_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{y_n}{2}},$$

et rappelons que y_n tend vers 0 en décroissant. De plus,

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{4}\big(1 + \mathrm{O}(y_n)\big).$$

On peut alors conclure avec le lemme à la fin de l'exercice que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K} \cdot \frac{1}{4^n}$.
Mais ce lemme ne nous donnera pas la valeur de la constante K.
Utilisons plutôt la trigonométrie. Puisque pour tout $n \geqslant 0$, $-1 < x_n < 1$, il existe un unique $\theta_n \in]0, \pi[$ tel que $x_n = \cos\theta_n$.
Donc $\cos\theta_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta_n}{2}} = \cos\dfrac{\theta_n}{2}$.
On en déduit $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ puis $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$ (parce que la fonction cosinus est strictement décroissante, donc injective, sur $]0, \pi[$).
Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction cosinus au point $x = 0$ montre alors que : $1 - x_n = 1 - \cos\dfrac{\theta_0}{2^n} \sim \dfrac{\theta_0^2}{2 \cdot 4^n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 14 X 2013 Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $x_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + n^2}$. Déterminer un équivalent de x_n.

Sol. 14) : $x_1 \geqslant 1$.
Montrons que, si $a = \max(1, x_1)$, alors $\forall n \geqslant 1$, $x_n \leqslant an$ par récurrence.
$x_{n+1} = \sqrt{x_n + n^2} \leqslant \sqrt{an + n^2}$.
On veut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $an+n^2 \leqslant a^2(n+1)^2$, ou encore $(a^2-1)n^2+an(2a-1)+a^2 \geqslant 0$ ce qui est vrai pour $a \geqslant 1$.
En conclusion, $n \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a(n-1)+(n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Réf. RMS PC X 2013 exo 73

Ex 15 ✍ ENS 2017 RMS Limite et équivalent de la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sin(u_n)$?

Sol. 15) : On a (u_n) décroissante tendant vers le seul point fixe de $[0, \pi/2]$, 0.
$u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(u_n^3\right)$. Posons $v_n = 3^n u_n$. On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\sin u_n}{u_n} = 1 - \dfrac{u_n^2}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right)$.
Donc $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{6}$ t.g. d'une série abs convergente car $\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{9} < 1$.
Donc $(\ln(v_n))$ converge vers ℓ et (v_n) converge vers $\mathrm{K} = e^\ell > 0$.
Conclusion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{K}}{3^n}$.

Ex 16 ✍ X 2016 RMS Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = n(x_n - n)$.
Montrer que $x_n = \mathrm{O}(n)$ si, et seulement si, $x_1 = 2\mathrm{e}$.

Sol. 16) : Après l'examen des premières valeurs de x_n, on voit que $x_n = (n-1)!x_1-$ une expression un peu compliquée. Il est alors naturel de poser : $x_n = (n-1)!y_n$. Cela donne la relation de récurrence : $x_{n+1} = n!y_{n+1} = n\big((n-1)!y_n - n\big)$ qui devient :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{n^2}{n!} = y_n - \frac{n}{(n-1)!}.$$

Finalement, il s'agit de l'étude d'une série.

$$y_{n+1} = y_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} = y_1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k!}.$$

On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e$. Évidemment, si $y_1 \neq 2e$, la suite (x_n) tend rapidement vers l'infini.
Si $y_1 = 2e$, rappelons le lemme

Lemme Le reste $\mathrm{R}_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un $\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{(n+1)!}\Big)$

Démonstration.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)} + \cdots\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \left(\frac{1}{(n+2)}\right)^k + \cdots\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

□

Avec $y_1 = 2e$, $y_{n+1} = \mathrm{R}_{n-2} + \mathrm{R}_{n-1} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{(n-1)!}\Big) + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n!}\Big) = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ donc $x_{n+1} = n! y_{n+1} = \mathrm{O}(n)$ ce qui implique que $x_n = \mathrm{O}(n)$.

Ex 17 ✍ ENS 2018 RMS Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mu \in]1, +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n (u_n)^\mu$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

Sol. 17) : On pose $v_n = \ln u_n$. Ainsi, $v_0 \in \mathbb{R}$, et $v_{n+1} = n\ln 2 + \mu v_n$. On utilise la méthode traditionnelle pour nous débarrasser de ce $n \ln 2$. D'abord, $w_n = v_{n+1} - v_n$ vérifie : $w_{n+1} = \ln 2 + \mu v_n$.
Puis $t_n = w_{n+1} - w_n$ vérifie : $t_{n+1} = \mu t_n$.
Premier cas. t_0 n'est pas nul. Dans ce cas, pour tout $n \geqslant 1$, $t_n = \mu^n t_0$. Si $t_0 > 0$, alors t_n tend vers $+\infty$, tout comme w_n, puis v_n, et donc u_n.
Si $t_0 < 0$, alors t_n tend vers $-\infty$, tout comme w_n et v_n, de sorte que u_n tend vers 0.
Deuxième cas. t_0 est nul. Comme $t_0 = w_1 - w_0$, cela équivaut à $w_1 = \ln 2 + \mu w_0 = w_0$, c'est-à-dire à $w_0 = \dfrac{\ln 2}{1-\mu}$. Mais comme $w_0 = v_1 - v_0 = (\mu - 1)v_0$, cela équivaut à $v_0 = -\dfrac{\ln 2}{(\mu-1)^2}$, c'est-à-dire à $u_0 = 2^{-1/(\mu-1)^2}$.
L'intérêt des transformations successives ci-dessus de la suite (u_n), c'est que dans ce cas particulier, t_n est nul pour tout n, donc w_n est constant égal à w_0. Mais alors $v_{n+1} - v_n = w_0 = \dfrac{\ln 2}{1-\mu} < 0$, donc $\forall n \geqslant 1$, $v_n = v_0 + \dfrac{n \ln 2}{1-\mu}$ qui tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas, u_n tend finalement vers 0. On peut préciser que $u_n = 2^{-1/(\mu-1)^2}\left(2^{-1/(\mu-1)}\right)^n$.

Ex 18 ✍ X 2017 RMS Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On suppose que $a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ et $b_n \to \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Sol. 18) : On pose $a'_n = a_n - \alpha$ et $b'_n = b_n - \beta$.
On a $u'_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a'_k b'_{n-k} = u_n - \dfrac{\alpha}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} - \dfrac{\beta}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \alpha\beta$
Par Cesaro et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u'_n = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha\beta$.
On se ramène donc à prouver le résultat lorsque $\alpha = \beta = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang k_0 à partir duquel $|a_k| \leqslant \varepsilon$. De plus (a_n) et (b_n) sont bornées par M.

Ecrivons que

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=k_0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{M}^2 \cdot k_0 + \varepsilon \cdot \mathrm{M} \cdot (n - k_0 + 1)\right) \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\mathrm{M}^2 \cdot k_0 + \mathrm{M}\varepsilon \leqslant 2\mathrm{M}\varepsilon \text{ pour } n \geqslant k_1 \geqslant k_0
\end{aligned}$$

Ex 19 ✍ X 2019 RMS **a)** Soit, pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$. Montrer que (P_n) converge et déterminer sa limite.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$ et $\mathrm{B}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$. Soient p et q dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{A}_{pn}\mathrm{B}_{qn})_{n\geqslant 1}$.

Sol. 19) : a) On voit sur les premières valeurs de n, et on vérifie aisément par récurrence, que si n est pair, $\mathrm{P}_n = \dfrac{n+1}{n}$ et si n est impair $\mathrm{P}_n = 1$, donc la suite est convergente de limite 1.
b) Comme $1 - \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1}$, on voit que $\mathrm{B}_n = \dfrac{1}{\mathrm{A}_n}$. Ainsi, $\mathrm{A}_{pn}\mathrm{B}_{qn} = \dfrac{\mathrm{A}_{pn}}{\mathrm{A}_{qn}}$. Nous pouvons supposer que $p > q$, de sorte que

$$\frac{\mathrm{A}_{pn}}{\mathrm{A}_{qn}} = \prod_{k=qn+1}^{pn}\frac{2k+1}{2k} = \prod_{k=1}^{(p-q)n}\frac{2(qn+k)+1}{2(qn+k)} = \prod_{k=1}^{(p-q)n}\left(1 + \frac{1}{2(qn+k)}\right).$$

Nous aurons intérêt à « passer au logarithme » :

$$u_n = \ln\left(\frac{\mathrm{A}_{pn}}{\mathrm{A}_{qn}}\right) = \sum_{k=1}^{(p-q)n}\ln\left(1 + \frac{1}{2(qn+k)}\right).$$

Pour tout $u \in]0, 1[$, $u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{(p-q)n}\frac{1}{2(qn+k)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(p-q)n}\frac{1}{4(qn+k)^2} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{(p-q)n}\frac{1}{2(qn+k)}.$$

Or d'une part
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{(p-q)n} \frac{1}{4(qn+k)^2} \leqslant \frac{(p-q)n}{4q^2n^2},$$
qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. D'autre part
$$\sum_{k=1}^{(p-q)n} \frac{1}{2(qn+k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(p-q)n} \frac{1}{2(q+k/n)},$$
qui (somme de Riemann) tend vers $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{p-q} \frac{dt}{q+t} = \frac{1}{2}\int_q^p \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{\mathrm{A}_{pn}}{\mathrm{A}_{qn}}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{p}{q}}$.

Ex 20 ☕ X 2011 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.

1) Quelles sont les limites possibles pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

3) Montrer que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 1/2.

Sol. 20) :

1) Si $u_n \to \ell$ alors si $\ell \neq 0$, on obtient $\ell = +\infty$, seule limite possible.
$\ell = 0$ donne $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ absurde, donc s'il y a une limite c'est seulement $+\infty$.

2) $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1 + \dfrac{2}{2} = 2$, $u_4 = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

On pose $f_n(x) = 1 + \dfrac{n}{x}$ pour $x \geqslant 1$. On a $f_{n+1}\circ f_n(x) = 1 + \dfrac{n+1}{1+\dfrac{n}{x}} = 1 + x\left(1 + \dfrac{1-x}{n+x}\right)$ qui est croissante par rapport à n à $x \geqslant 1$ fixé.

Donc $f_{n+1}\circ f_n \geqslant f_n \circ f_{n-1}$. De plus, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, $f_{n+1}\circ f_n$ (et $f_n\circ f_{n-1}$) sont croissantes.

Ainsi, si $u_n \geqslant u_{n-1}$, alors $u_{n+2} = f_{n+1}\circ f_n(u_n) \geqslant f_n\circ f_{n-1}(u_n) \geqslant f_n\circ f_{n-1}(u_{n-1}) = u_{n+1}$.

On effectue alors une récurrence de 2 en 2, comme $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$ on a $u_3 \leqslant u_4$ et $u_4 \leqslant u_5$.

Donc HR $= u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

Ainsi, (u_n) est croissante, donc converge vers $+\infty$.

3) On écrit que $f_n(u_n) \geqslant u_n$ ce qui se traduit par $u_n^2 - u_n - n \leqslant 0$ donc $u_n \in \left[\dfrac{1-\sqrt{1+4n}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right]$ (et $u_n \geqslant 1$).

Il vient en particulier
$$u_n - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\sqrt{1+4n}}{2} - \sqrt{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0}$$
car $\dfrac{\sqrt{1+4n}}{2} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}} = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{8n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n} + \dfrac{1}{8\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$u_n = 1 + \dfrac{n-1}{u_{n-1}} \geqslant 1 + \dfrac{n-1}{u_n}$ donc $u_n^2 - u_n - (n-1) \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2}$ pour n assez grand.

Donc
$$u_n - \sqrt{n} \geqslant \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\sqrt{1+4(n-1)}}{2} - \sqrt{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0}$$
comme précédemment, on conlut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}$.

Réf. RMS X PC 2011, exo 69

Ex 21 ✍ Mines 2013 Soient $z_1, \dots, z_p$ des complexes distincts de module 1, $a_1, \dots, a_p$ des complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_1 z_1^n + \cdots + a_p z_p^n$. On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $(a_1, \dots, a_p) = (0, \dots, 0)$.

Sol. 21) : Preuve par récurrence sur p. Clair pour $p = 1$. Si le résultat est vrai pour $p-1$, on voit que
$$u_{n-1}z_p - u_n = a_1(z_p - z_1)z_1^{n-1} + \cdots + a_{p-1}(z_p - z_{p-1})z_{p-1}^{n-1}.$$
Le terme en z_p^n a disparu, c'était le but. Comme les $z_p - z_j$ sont non nuls, l'hypothèse de récurrence tue les a_j, $j < p$.
Et a_p reste tout seul, et cela le tue aussi.
Réf. RMS PC Mines 2013 exo 154

Ex 22 ✍ X 2009 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que :
$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(u_{p+q})^{p+q} \leqslant (u_p)^p (u_q)^q$.

1) Montrer : $\forall (p,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{pk} \leqslant u_k$.
2) Que dire de la suite s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 0$?
3) Montrer que $u_n \to \inf \{u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Sol. 22) :

1) Facile par récurrence sur p.
2) La suite $(u_n)_{n \geqslant k}$ est stationnaire nulle.
3) On suppose u_n jamais nul.
On pose $a_n = n \ln u_n$ la suite (a_n) est une suite sous-additive (exercice classique quoique subtil) et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{n} = \inf \left\{ \dfrac{a_k}{k} = \ln u_k,\ k \in \mathbb{N}^* \right\} = \ell \in [-\infty, +\infty[$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n/n} = \exp\left(\inf\left\{\dfrac{a_k}{k} = \ln u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \inf\{u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$
car exp est continue et dans le cas $\ell = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Réf. RMS X PC 2009, exo 100

Ex 23 X 2009 Étudier la suite définie par : $x_0 = 2009^{2009}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est la somme des chiffres de x_n.

Sol. 23) : On peut penser que (x_n) a une nombre de chiffres qui décroit strictement au début puis il ne reste plus qu'un seul chiffre.
En effet, lemme (par récurrence), pour $k \geqslant 3$, $9k < 10^{k-1}$ ($k = 3$ OK puis récurrence facile).
Donc si x_n a $k \geqslant 3$ chiffres alors, puisque $x_n \in [\![10^{k-1}, 10^k[\![$, $x_{n+1} \leqslant 9k < 10^{k-1} \leqslant x_n$.
(on a $k = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ mais nous ne nous serviront pas de cette formule)
Donc au bout d'un moment x_n a un ou deux chiffres.
Si x_n a deux chiffres alors $x_{n+1} \leqslant 9 + 9 = 18$. Puis $x_{n+2} \leqslant 1 + 8 = 9$.
Donc au bout d'un moment, il n'y a plus qu'un seul chiffre et (x_n) est stationnaire.
Pour connaître ce chiffre, on calcule 2009^{2009} modulo 9 ou encore 2^9 modulo 9.
$2^3 = -1$ (9) donc $2^6 = 1$ (9), or $2009 = 334 \times 6 + 5$ donc $2009^{2009} = 2^5 = -2^2 = -4 = 5$ (9).
Ainsi, au bout d'un moment $x_n = 5$.
Réf. RMS X PC 2009, exo 97