Suites numériques

Exercices d'application

Ex 1 Que pensez-vous de l'énoncé suivant : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$? Donner un énoncé correct.

Ex 2 Donner un équivalent simple des suites :

$u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$; $u_n = e^{1/n} - e^{\sin(1/n)}$; $u_n = 3^n - 2^n$

$u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n - e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercices d'entraînement

Ex 3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}.$$

Ex 4 Étudier la monotonie, la convergence, la limite et donner un équivalent simple de

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Indication pour l'equivalent : effectuer une intégration par partie sur $(n+1)\mathrm{I}_n$.

Ex 5 Étudier la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

Ex 6 Pour $a > 0$, montrer que la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{a}$. Montrer ensuite que la convergence est quadratique, c'est à dire qu'il existe une constante M et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \mathrm{M}|u_n - \sqrt{a}|^2$$

Ex 7 ✍

1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une racine dans $[0,1]$ notée x_n, et une autre dans $[1,+\infty[$ notée y_n.
2) Donner un équivalent de x_n.
3) Déterminer la limite ℓ de la suite $(y_n)_n$ ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

Ex 8 X 2011 Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}.$$

Ex 9 X 2017 RMS Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $\cos(nx) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Ex 10 X 2016 RMS Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $b_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = b_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} + 1$.
Trouver un équivalent de b_n.

Exercices d'approfondissement

Ex 11 X 2015 RMS Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
a) Déterminer un équivalent de u_n.
b) Déterminer la nature, suivant $\alpha > 0$, de la série de terme général u_n^α.

Ex 12 ENS 2017 RMS Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$.
a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
c) Déterminer un équivalent de u_n.

Ex 13 X 2017 RMS Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in]-1,1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$.
a) Montrer que (x_n) converge. On note ℓ sa limite.
b) Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Ex 14 X 2013 Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $x_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + n^2}$. Déterminer un équivalent de x_n.

Ex 15 ✍ ENS 2017 RMS Limite et équivalent de la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sin(u_n)$?

Ex 16 ✍ X 2016 RMS Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = n(x_n - n)$.
Montrer que $x_n = \mathrm{O}(n)$ si, et seulement si, $x_1 = 2\mathrm{e}$.

Ex 17 ✍ ENS 2018 RMS Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mu \in]1, +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n (u_n)^\mu$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

Ex 18 ✍ X 2017 RMS Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On suppose que $a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ et $b_n \to \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Ex 19 ✍ X 2019 RMS **a)** Soit, pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$. Montrer que (P_n) converge et déterminer sa limite.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$ et $\mathrm{B}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$. Soient p et q dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{A}_{pn}\mathrm{B}_{qn})_{n\geqslant 1}$.

Ex 20 ☕ X 2011 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.

1) Quelles sont les limites possibles pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$?
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3) Montrer que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ tend vers $1/2$.

Ex 21 ✍ Mines 2013 Soient $z_1, \dots, z_p$ des complexes distincts de module 1, $a_1, \dots, a_p$ des complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_1 z_1^n + \cdots + a_p z_p^n$. On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $(a_1, \dots, a_p) = (0, \dots, 0)$.

Ex 22 ✍ X 2009 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que :
$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(u_{p+q})^{p+q} \leqslant (u_p)^p (u_q)^q$.

1) Montrer : $\forall (p, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{pk} \leqslant u_k$.
2) Que dire de la suite s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 0$?
3) Montrer que $u_n \to \inf\{u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Ex 23 ☕ X 2009 Étudier la suite définie par : $x_0 = 2009^{2009}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est la somme des chiffres de x_n.

Les indications

Ind. 3 : Encadrer bêtement chaque partie entière.

Ind. 14 : Montrer que, si $a = \max(1, x_1)$, alors $\forall n \geqslant 1$, $x_n \leqslant an$.

Ind. 20 : Montrer que si $u_n \geqslant u_{n-1}$, alors $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$ (vous avez bien lu !).
Pour cela notant $f_n(x) = 1 + n/x$, on montrera que $f_{n+1} \circ f_n \geqslant f_n \circ f_{n-1}$ et $f_n \circ f_{n-1}$ est croissante.
De $f_n(u_n) \geqslant u_n$ tirer que u_n est inférieur à la plus grande racine réelle d'un polynôme de degré 2 assez simple.
En écrivant autrement que $u_n \leqslant u_{n+1}$, minorer de même u_n.

Ind. 21 : Considérer $u_{n-1}z_p - u_n$.

Ind. 22 : C'est une relecture en passant au logarithme de l'exercice très classique
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$.
Montrer que $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou diverge vers $-\infty$.
Montrer que sa limite est $\inf\left\{\dfrac{a_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Ind. 23 : Elle est stationnaire !